COLLECTION
INTER
AFRICAINE DE
MATHÉMATIQUES

1re SM

MATHÉMATIQUES

EDICEF

Collection
Inter
Africaine de
Mathématiques

BENGALY
KALIFA

sous la direction
de Saliou Touré
Professeur à l'Université
d'Abidjan

MATHÉMATIQUES

1re
SCIENCES
MATHÉMATIQUES

Christophe AKELE
Ould Hadj Amar BAYE
Kotol Miandom BENDIMAN
Kémo CONDE
Oumar DJIGUIBA
Assalé Patrice DON
Jean-Luc NEULAT
Soma TRAORÉ

EDICEF
58, rue Jean-Bleuzen
92178 Vanves Cedex

L'idée d'harmoniser les programmes de mathématiques entre les pays francophones d'Afrique et de l'océan Indien remonte à l'année 1983 où fut organisé par l'IRMA, à Abidjan, le premier séminaire d'harmonisation. Depuis, d'autres séminaires ont suivi : en 1985 à Cotonou, en 1988 à Conakry et en juin 1992 à Abidjan avec la participation de 20 pays.

PARTICIPATION DES DIFFÉRENTS PAYS

BÉNIN	COMORES	GUINÉE	RWANDA
BURKINA FASO	CONGO	MADAGASCAR	SÉNÉGAL
BURUNDI	COTE D'IVOIRE	MALI	TCHAD
CAMEROUN	DJIBOUTI	MAURITANIE	TOGO
CENTRAFRIQUE	GABON	NIGER	ZAÏRE

La suite logique, souhaitée par tous les participants, est l'élaboration d'une Collection Inter-Africaine de manuels de mathématiques pour l'enseignement secondaire. Des rédacteurs de tous les pays participent à la réalisation de ce projet. Un comité de coordination travaille avec les cellules nationales mises en place dans chaque pays.

COMITÉ DE COORDINATION

Valère BONNET	Albert LE CALONNEC
Gérard DUBOS	Jules N'DA KOUADIO
Auguste GRÉGOIRE	Soma TRAORÉ

D'autres séminaires de concertation ont réuni les responsables de ces cellules, à Libreville en 1993, à Ndjaména en 1994, à Yaoundé en 1995, à Antananarivo en 1996, à Dakar en 1997 et à Niamey en 1998.

ISSN 1248-587-X
ISBN 2-84-129358-0

PRÉFACE

Dans un monde qui évolue rapidement, la maîtrise et l'approfondissement des mathématiques apparaissent comme une condition indispensable au développement des nations, plongées qu'elles sont dans l'ère de la haute technologie et de la mondialisation des marchés.

Voilà pourquoi les mathématiciens africains ont commencé, dès 1983, à organiser des réunions de concertation sur les problèmes posés par l'enseignement des mathématiques qui jouent un rôle essentiel dans la préparation des jeunes aux défis de l'avenir.

La Collection Inter-Africaine de Mathématiques que nous proposons aujourd'hui aux élèves de l'Enseignement Secondaire des pays francophones d'Afrique et de l'Océan Indien est le fruit de cette collaboration franche et fraternelle qui a abouti, au mois de juin 1992, à l'élaboration et à l'adoption par tous ces pays des programmes des premier et second cycles de l'Enseignement Secondaire.

Elle a pour objectifs majeurs :

– l'harmonisation de la pédagogie des mathématiques et la mise à la disposition des élèves et des enseignants africains de manuels de qualité tenant compte du milieu socioculturel africain en tant que support et véhicule privilégiés des concepts mathématiques ;

– l'acquisition par les élèves des bases d'une formation mathématique solide qui leur permettent d'analyser une situation, de conjecturer des hypothèses et de les valider ou non à l'épreuve des faits ou du raisonnement, de recourir aux modèles mathématiques qu'ils connaissent et de dégager une conclusion ;

– la diminution du coût du manuel pour permettre la réalisation d'un vieux rêve : un élève, un livre.

Les ouvrages de la Collection Inter-Africaine de Mathématiques, rédigés par des équipes d'enseignants, de chercheurs et de responsables pédagogiques africains, belges et français, s'appuient sur l'environnement des élèves pour les motiver, les faire agir, les amener à comprendre et à agir de nouveau, de manière autonome et créatrice. Les contenus adoptés et les méthodes pédagogiques préconisées ont été systématiquement expérimentés dans plusieurs pays avant que ne soient entreprises les rédactions définitives.

Conformément à notre conception de l'enseignement des mathématiques, nous n'avons pas voulu présenter les leçons sous forme d'exposés théoriques, mais comme des séances de travail au cours desquelles des activités de calcul, de dessin, de lecture de documents (le plus souvent empruntés au milieu africain) sont mises en œuvre pour solliciter et provoquer constamment la participation active des élèves.

Insérés dans les leçons, des exercices d'application immédiate permettent l'assimilation des notions étudiées. Placés à la fin des chapitres, des exercices d'entraînement et d'approfondissement permettent aux élèves d'éprouver leur compétence et aux professeurs d'évaluer leur enseignement.

Nous exprimons notre gratitude aux différents Ministres chargés de l'Éducation dans les pays francophones d'Afrique et de l'océan Indien, ainsi qu'aux responsables de la Coopération Française et de la Coopération Belge qui, par leur compréhension, leurs encouragements et leur soutien constant tant moral que matériel, nous ont permis de réaliser ces ouvrages dans les meilleures conditions possibles.

Enfin, nous espérons que ce manuel répondra au mieux à l'attente et aux besoins des utilisateurs (professeurs et élèves). Afin d'en améliorer les prochaines éditions, nous accueillerons avec reconnaissance les remarques, les critiques et les suggestions qu'ils voudront bien nous faire et, par avance, nous les en remercions.

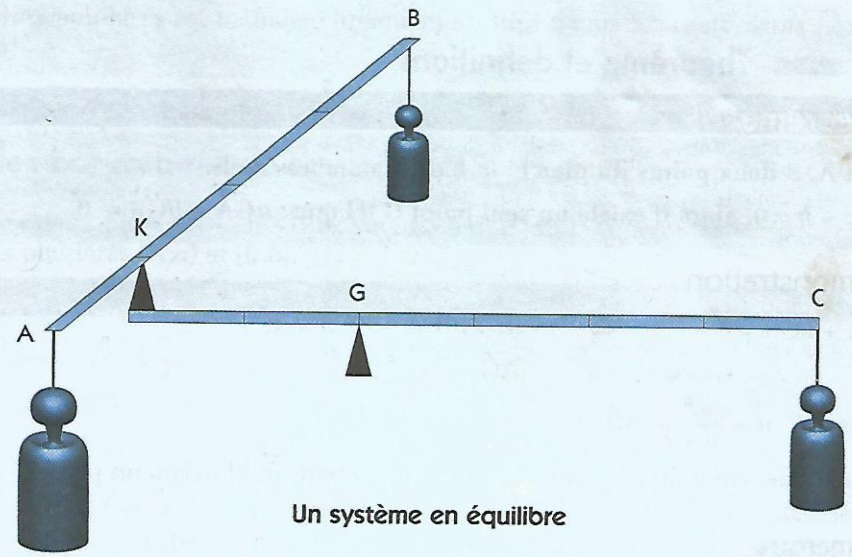
Saliou Touré

SOMMAIRE

1 BARYCENTRE

Introduction

Nous disposons de plusieurs outils pour aborder les problèmes de géométrie : les configurations, le calcul vectoriel, l'outil analytique et les transformations. L'outil barycentre vient s'ajouter à ce riche répertoire. Il permet de résoudre certains problèmes de réduction d'une somme de vecteurs, d'alignement de points, de concours de droites et de recherche de lieux géométriques.



Un système en équilibre

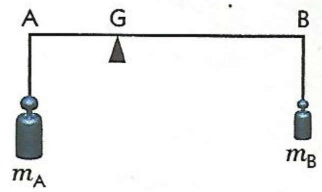
$\begin{cases} 3\,\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{KB} = \vec{0} \\ 4\,\overrightarrow{GK} + 2\,\overrightarrow{GC} = \vec{0} \end{cases}$ ou $3\,\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + 2\,\overrightarrow{GC} = \vec{0}$

SOMMAIRE

1 Barycentre de deux points pondérés

1.1. Premières notions

Introduction



Soit le système constitué par une tige AB de masse négligeable portant à ses extrémités deux masses m_A et m_B. Comment doit-on poser la tige sur un pointeau pour qu'elle reste en équilibre :

- lorsque $m_A = m_B$?
- lorsque $m_A = 2m_B$?
- lorsque $m_B = 3m_A$?

En faisant varier les masses m_A et m_B, on constate, dans chaque cas, que la tige reste en équilibre lorsque le pointeau se trouve en un point G, situé entre A et B, tel que : $m_A \times GA = m_B \times GB$;
c'est-à-dire : $m_A\overrightarrow{GA} + m_B\overrightarrow{GB} = \overrightarrow{0}$.

En physique, on dit que G est le centre de gravité du système. En mathématiques, on dit que G est le barycentre des points A et B affectés respectivement des coefficients m_A et m_B.

Théorème et définitions

Théorème

Soit A, B deux points du plan et a, b deux nombres réels.
Si $a + b \neq 0$, alors il existe un seul point G tel que : $a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB} = \overrightarrow{0}$.

Démonstration

$$a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB} = \overrightarrow{0} \quad \Leftrightarrow \quad (a+b)\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{0}$$
$$\Leftrightarrow \quad \overrightarrow{AG} = \frac{b}{a+b}\overrightarrow{AB}.$$

On pose : $\overrightarrow{u} = \dfrac{b}{a+b}\overrightarrow{AB}$.

On sait que, étant donnés un point A et un vecteur $\overrightarrow{u}$, il existe un point G unique tel que : $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{u}$.

Remarque

Si $a + b$ est nul, alors a et b sont opposés et : $a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB} = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow a\overrightarrow{GA} - a\overrightarrow{GB} = \overrightarrow{0}$
$\Leftrightarrow a\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{0}$.

On distingue deux cas :
- *si $a = 0$ ou A = B, alors tout point G du plan vérifie l'égalité :* $a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB} = \overrightarrow{0}$;
- *si $a \neq 0$ et A ≠ B, alors aucun point du plan ne vérifie cette égalité.*

Définitions

- **On appelle point pondéré tout couple (A,a) où A est un point et a un nombre réel ; a est appelé coefficient du point A.**
- **Soit (A,a) et (B,b) deux points pondérés tels que : $a + b \neq 0$.**

On appelle barycentre des points pondérés (A,a) et (B,b) l'unique point G tel que : $a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB} = \overrightarrow{0}$.

On note : G = bar{(A,a), (B,b)} ou G = bar $\begin{array}{|c|c|}\hline A & B \\ \hline a & b \\ \hline\end{array}$.

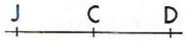
Remarques

- *On retiendra également de la démonstration du théorème précédent que G est le barycentre de (A,a) et (B,b) si et seulement si* $\overrightarrow{AG} = \dfrac{b}{a+b}\overrightarrow{AB}$ *; cette égalité permet en particulier la construction du point G.*
- *Si A et B sont distincts, alors G appartient à la droite (AB).*
- *Si A = B, alors G = A.*

Exemples

- Le barycentre des points pondérés (A,2) et (B,3) est le point G tel que : $\overrightarrow{AG} = \dfrac{3}{5}\overrightarrow{AB}$.

- Le barycentre J des points pondérés (C,2) et (D,–1) est le symétrique de D par rapport à C. En effet, $2\overrightarrow{JC} - \overrightarrow{JD} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{CJ} = -\overrightarrow{CD}$.



- Le barycentre de (E,1) et (F,1) est le milieu I du segment [EF]. En effet, $\overrightarrow{IE} + \overrightarrow{IF} = \vec{0}$.

1.2. Propriétés

Homogénéité

Propriété

Le barycentre de deux points pondérés est inchangé lorsqu'on multiplie tous les coefficients par un même nombre réel non nul.

En effet, pour tout nombre réel k non nul : $a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB} = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad ka\overrightarrow{GA} + kb\overrightarrow{GB} = \vec{0}$.

Ensemble des barycentres de deux points distincts

Un point G est barycentre de deux points A et B s'il existe un couple (a,b) de nombres réels tel que G soit le barycentre des points pondérés (A,a) et (B,b).

Théorème

Soit A et B deux points distincts du plan.

L'ensemble des barycentres des points A et B est la droite (AB).

Démonstration

- On a vu que si G est barycentre de deux points distincts A et B, alors G appartient à la droite (AB).
- Réciproquement, soit G un point de la droite (AB).

Il existe un nombre réel k tel que : $\overrightarrow{AG} = k\overrightarrow{AB}$, ou encore : $\overrightarrow{AG} = \dfrac{k}{(1-k)+k}\overrightarrow{AB}$.

G est donc le barycentre de $(A,1-k)$ et (B,k).

L

Pour démontrer l'égalité de deux ensembles E et F, on peut procéder par double inclusion :

$$(E = F) \quad \Leftrightarrow \quad (E \subset F \text{ et } F \subset E).$$

Exemple

Dans la démonstration précédente :

E est l'ensemble des barycentres des points A et B ;

F est la droite (AB).

Cas particuliers

A est le barycentre des points pondérés (A,1) et (B,0). B est le barycentre des points pondérés (A,0) et (B,1).

Réduction de la somme $a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB}$

Propriété

Soit (A,a) et (B,b) des points pondérés. Pour tout point M du plan :

- **si $a + b \neq 0$, alors $a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB} = (a + b)\overrightarrow{MG}$, où G est le barycentre des points pondérés (A,a) et (B,b) ;**
- **si $a + b = 0$, alors le vecteur $a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB}$ est indépendant du point M.**

Démonstration

- Si $a + b \neq 0$, alors
$$\begin{aligned} a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB} &= a(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA}) + b(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB}) \\ &= (a + b)\overrightarrow{MG} + (a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB}) \\ &= (a + b)\overrightarrow{MG}. \end{aligned}$$

- Si $a + b = 0$, alors $a = -b$
et
$$\begin{aligned} a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB} &= -b\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB} \\ &= b\overrightarrow{AB}. \end{aligned}$$

Le vecteur $a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB}$ est indépendant du point M.

Coordonnées du barycentre

Le plan est muni du repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
On considère les points $A\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$. On désigne par G le barycentre des points pondérés (A,– 2) et (B,5).

- Exprimer $\overrightarrow{OG}$ en fonction de $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$.
- Calculer les coordonnées du point G.

Propriété

Le plan est muni du repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Si $A\begin{pmatrix}x_A\\y_A\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}x_B\\y_B\end{pmatrix}$ et si G est le barycentre de (A,a) et (B,b), alors $G\begin{pmatrix}\dfrac{ax_A + bx_B}{a+b}\\[2mm]\dfrac{ay_A + by_B}{a+b}\end{pmatrix}$.

Démonstration guidée

- En appliquant la propriété précédente au point O, vérifier que : $\overrightarrow{OG} = \dfrac{1}{a+b}(a\overrightarrow{OA} + b\overrightarrow{OB})$.
- Conclure.

Conservation du barycentre par projection

On sait que la projection conserve le milieu ; le théorème suivant généralise cette propriété.

Théorème

Le projeté du barycentre de deux points pondérés est le barycentre des projetés de ces deux points affectés des mêmes coefficients.

On dit que la projection conserve le barycentre.

Démonstration guidée

Soit G le barycentre des points pondérés (A,a), (B,b) et G', A', B' les images respectives de G, A, B par la projection sur une droite $(\mathscr{D})$ parallèlement à une droite (Δ).

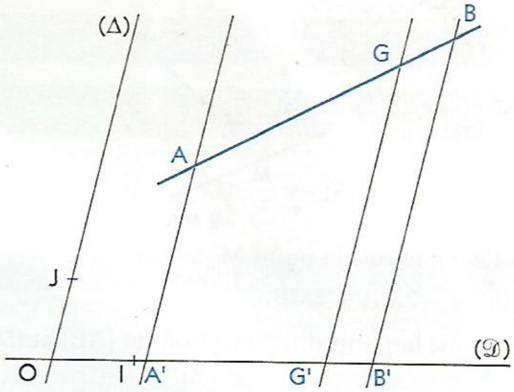
On munit le plan d'un repère (O, I, J) tel que :

$(OI) = (\mathscr{D})$ et $(OJ) = (\Delta)$.

Soit (x_A, y_A) et (x_B, y_B) les coordonnées respectives des points A et B dans le repère (O, I, J).

• Déterminer les coordonnées de G, A', B' et G' en fonction de x_A, y_A, x_B et y_B.

• Vérifier que G' est le barycentre des points pondérés (A',a) et (B',b).



1.3. Travaux dirigés

1. Une construction vectorielle du barycentre de deux points pondérés

Soit A, B deux points distincts du plan et a, b deux nombres réels non nuls.

M étant un point du plan n'appartenant pas à la droite (AB), on considère le point M' tel que :

$\overrightarrow{MM'} = a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB}$.

1°) Démontrer que M et M' sont deux points distincts et exprimer le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{MA}$ et $\overrightarrow{AB}$.

2°) On suppose $a + b \neq 0$.

a) Démontrer que les droites (AB) et (MM') sont sécantes en un point G, barycentre des points pondérés (A,a) et (B,b).

b) Application

Construire le point G_1, barycentre de $(A,-2)$ et $(B,5)$, puis le point G_2, barycentre de $(A, \frac{3}{2})$ et $(B,1)$.

Solution

1°) M n'appartenant pas à la droite (AB) et les nombres réels a, b étant non nuls, les vecteurs $a\overrightarrow{MA}$ et $b\overrightarrow{MB}$ ne sont pas colinéaires. Le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ n'est donc pas nul et $M \neq M'$.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MM'} &= a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB}\\ &= (a+b)\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{AB}.\end{aligned}$$

2°) On suppose $a + b \neq 0$.

a) On a : $(a+b)\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MM'} - b\overrightarrow{AB}$.

Les vecteurs $\overrightarrow{MM'}$ et $\overrightarrow{AB}$ ne sont pas colinéaires, sinon le vecteur non nul $(a+b)\overrightarrow{MA}$ serait colinéaire à $\overrightarrow{AB}$, ce qui est impossible car M n'appartient pas à la droite (AB) ; les droites (AB) et (MM') sont donc sécantes.

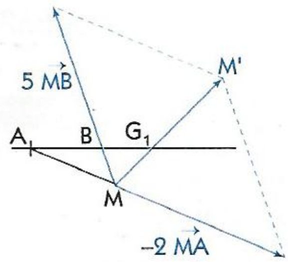
Désignons par G le barycentre des points pondérés (A,a) et (B,b).

On sait que : $G \in (AB)$ et $a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB} = (a+b)\overrightarrow{MG}$.

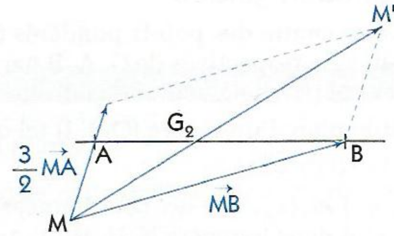
D'où : $\overrightarrow{MM'} = (a+b)\overrightarrow{MG}$ et $G \in (MM')$.

Les droites (AB) et (MM') sont sécantes en G.

b) Les figures ci-dessous indiquent la construction des points G_1 et G_2 :



- On construit le point M' tel que :
$\overrightarrow{MM'} = -2\overrightarrow{MA} + 5\overrightarrow{MB}$.
- G_1 est le point d'intersection de (AB) et (MM').

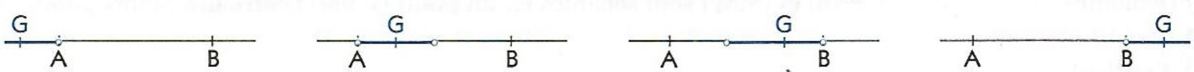


- On construit le point M'' tel que :
$\overrightarrow{MM''} = \dfrac{3}{2}\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}$.
- G_2 est le point d'intersection de (AB) et (MM'').

2. Soit G le barycentre des points pondérés (A,a) et (B,b). Discuter, suivant les valeurs des coefficients a et b, la position de G par rapport aux points A et B.

Solution guidée

- En utilisant l'égalité $a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB} = \overrightarrow{0}$ (1), justifier que : $|a|\,GA = |b|\,GB$ (2).
- Déduire de (1) que :
  - si $ab > 0$, alors G appartient au segment [AB] privé des points A et B ;
  - si $a = 0$, alors G = B ; si $b = 0$, alors G = A ;
  - si $ab < 0$, alors G appartient au complémentaire du segment [AB] dans la droite (AB).
- Déduire de (2) que G est plus proche du point qui a le plus grand coefficient en valeur absolue.
- Vérifier que l'on obtient les résultats suivants :



$ab < 0$ et $|a| > |b|$ — $ab > 0$ et $|a| > |b|$ — $ab > 0$ et $|a| < |b|$ — $ab < 0$ et $|a| < |b|$

Exercices

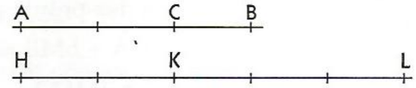
1.a Soit deux points A et B. On considère le point G, barycentre des points pondérés (A,2222) et (B,3333). Exprimer le vecteur $\overrightarrow{AG}$ en fonction du vecteur $\overrightarrow{AB}$.

1.b A, B et G sont des points tels que : $\overrightarrow{AG} = 7\overrightarrow{AB}$. Déterminer un couple (a,b) de nombres réels tels que G soit le barycentre des points pondérés (A,a) et (B,b).

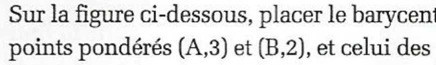
1.c Le plan est muni d'un repère. On considère les points $A\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}-2\\-4\end{pmatrix}$, G le barycentre des points pondérés (A,2) et (B,1). Déterminer les coordonnées de G.

1.d Soit deux points A et B.
Construire le point G, barycentre des points pondérés (A,2) et (B,3).
Construire le point G', barycentre des points pondérés (A,− 1) et (B,3).

1.e Écrire chaque point comme le barycentre des deux autres dans les deux cas suivants :



1.f Sur la figure ci-dessous, placer le barycentre des points pondérés (A,3) et (B,2), et celui des points (A,− 3) et (B,13).



2 Barycentre de plus de deux points pondérés

2.1. Théorème et définition

Théorème

Soit (A,a), (B,b) et (C,c) trois points pondérés.

Si $a + b + c \neq 0$, alors il existe un seul point G tel que : $a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB} + c\overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0}$.

Démonstration

$$a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB} + c\overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0} \iff (a+b+c)\overrightarrow{AG} = b\overrightarrow{AB} + c\overrightarrow{AC}$$

$$\iff \overrightarrow{AG} = \frac{b}{a+b+c}\overrightarrow{AB} + \frac{c}{a+b+c}\overrightarrow{AC}.$$

Cette dernière égalité justifie l'existence et l'unicité du point G.

Définition

Soit (A,a), (B,b) et (C,c) trois points pondérés tels que : $a + b + c \neq 0$.

On appelle barycentre des points pondérés (A,a), (B,b) et (C,c) l'unique point G tel que :
$a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB} + c\overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0}$.

On note : G = bar{(A,a), (B,b), (C,c)} ou G = bar $\begin{array}{|c|c|c|}\hline A & B & C \\ \hline a & b & c \\ \hline\end{array}$.

Remarques

- *Si l'un des coefficients est nul, par exemple a, alors G est le barycentre de (B,b) et (C,c).*
- *Cette définition et la remarque précédente se généralisent à 4 points (et plus).*

Exemple

Soit ABC un triangle. Construire le barycentre G des points pondérés (A,3), (B,–2) et (C,1).

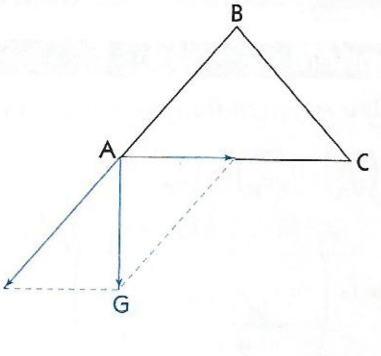
Le point G cherché est tel que : $3\overrightarrow{GA} - 2\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0}$ (1).

(1) $\iff 3\overrightarrow{GA} - 2(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AB}) + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{0}$

$\iff 2\overrightarrow{GA} - 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{0}$

$\iff \overrightarrow{AG} = -\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}.$

On en déduit la construction ci-contre.



2.2. Propriétés

Homogénéité

Propriété

Le barycentre de trois (ou plus) points pondérés est inchangé lorsqu'on multiplie tous les coefficients par un même nombre réel non nul.

La démonstration est identique à celle qui a été faite pour deux points.

Remarque

Le barycentre de points pondérés affectés de coefficients égaux est appelé isobarycentre de ces points :
- *l'isobarycentre de deux points A et B est le milieu du segment [AB] ;*
- *l'isobarycentre de trois points A, B et C non alignés est le centre de gravité du triangle ABC ;*
- *l'isobarycentre des sommets d'un parallélogramme est le centre de ce parallélogramme.*

Réduction de la somme $a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB} + c\overrightarrow{MC}$

Propriété

Soit (A,a), (B,b) et (C,c) des points pondérés. Pour tout point M du plan :
- **si $a + b + c \neq 0$, alors $a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB} + c\overrightarrow{MC} = (a + b + c)\overrightarrow{MG}$,**
  où G est le barycentre des points pondérés (A,a), (B,b) et (C,c) ;
- **si $a + b + c = 0$, alors le vecteur $a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB} + c\overrightarrow{MC}$ est indépendant du point M.**

Démonstration

- Si $a + b + c \neq 0$, alors $a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB} + c\overrightarrow{MC} = (a + b + c)\overrightarrow{MG} + a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB} + c\overrightarrow{GC}$
  $= (a + b + c)\overrightarrow{MG}$.
- Si $a + b + c = 0$, alors $a = -b - c$
  et $a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB} + c\overrightarrow{MC} = (-b - c)\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB} + c\overrightarrow{MC}$
  $= b\overrightarrow{AB} + c\overrightarrow{AC}$.

Donc, le vecteur $a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB} + c\overrightarrow{MC}$ est indépendant du point M.

Comme pour deux points, on déduit de cette propriété les coordonnées du barycentre de trois points.

Coordonnées du barycentre

Propriété

Le plan est muni du repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Si $A\begin{pmatrix}x_A\\y_A\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}x_B\\y_B\end{pmatrix}$, $C\begin{pmatrix}x_C\\y_C\end{pmatrix}$ et si G est le barycentre de (A,a), (B,b) et (C,c),

alors $$G\left(\begin{array}{c}\dfrac{ax_A + bx_B + cx_C}{a + b + c}\\[2ex] \dfrac{ay_A + by_B + cy_C}{a + b + c}\end{array}\right).$$

Barycentres partiels

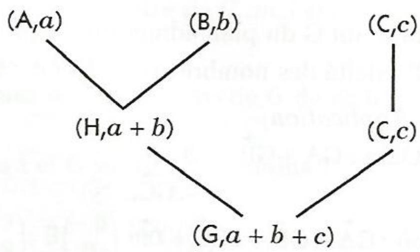
ABC est un triangle. Soit G le point défini par l'égalité $\overrightarrow{GA} - 3\overrightarrow{GB} + 4\overrightarrow{GC} = \vec{0}$.
On désigne par K le barycentre des points (B,–3) et (C,4).
- Écrire G comme barycentre des points A et K.
- En déduire une construction du point G.

Théorème

Soit (A,a), (B,b) et (C,c) trois points pondérés tels que : $a + b + c \neq 0$ et $a + b \neq 0$.
Si H est le barycentre de (A,a) et (B,b), alors bar {(A,a), (B,b), (C,c)} = bar {(H,$a + b$), (C,c)}.

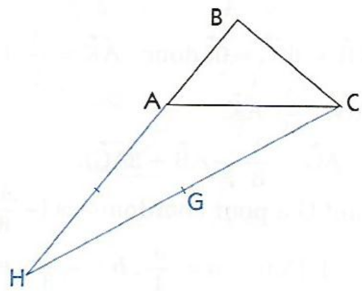
H est appelé barycentre partiel.

Démonstration



Soit G le barycentre des points pondérés (A,a), (B,b) et (C,c).
On a : $a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB} + c\overrightarrow{GC} = \vec{0}$.
Or : $a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB} = (a + b)\overrightarrow{GH}$.
D'où : $(a + b)\overrightarrow{GH} + c\overrightarrow{GC} = \vec{0}$.
Donc, G est le barycentre de (H,$a + b$) et (C,c).
Cette méthode de détermination du barycentre peut être illustrée par le schéma ci-contre.

Exemple



Reprenons l'exemple du § 2.1.
Soit ABC un triangle. Construire le barycentre G des points pondérés (A,3), (B,–2) et (C,1), en utilisant le théorème des barycentres partiels.
Si H est le barycentre de (A,3) et (B,–2), alors $\overrightarrow{AH} = -2\overrightarrow{AB}$
et G est le barycentre de (C,1) et (H,1), c'est-à-dire le milieu de [CH].
On en déduit une construction du point H, puis du point G.

Le théorème précédent se généralise à un nombre quelconque de points et permet d'établir le point méthode suivant.

M

Pour déterminer le barycentre de plusieurs points pondérés, on peut remplacer certains d'entre eux par leur barycentre partiel, affecté de la somme de leurs coefficients, à condition que cette somme soit différente de zéro.

Remarque

Soit un triangle ABC et G le barycentre de (A,a), (B,b) et (C,c). Lorsque $a + b \neq 0$, H est barycentre de (A,a) et (B,b) si et seulement si H est le point d'intersection des droites (AB) et (CG).

2.3. Travaux dirigés

1. Ensemble des barycentres de trois points non alignés

Soit A, B et C trois points non alignés du plan.
1°) Étant donné un point G, démontrer qu'il existe un triplet unique (a,b,c) de nombres réels tels que G soit le barycentre de (A,a), (B,b), (C,c) et $a + b + c = 1$.
2°) *Application*
Déterminer les coefficients a, b et c ($a + b + c = 1$) pour que G soit le barycentre des points pondérés (A,a), (B,b) et (C,c) dans les cas suivants :
a) **C' est le milieu de [AB] et G est le milieu de [CC'] ;**
b) **K est tel que $\overrightarrow{KB} = 3\overrightarrow{KC}$ et G est tel que $\overrightarrow{AK} = 4\overrightarrow{AG}$.**

Solution

1°) Soit a, b et c trois nombres réels tels que : $a + b + c = 1$.

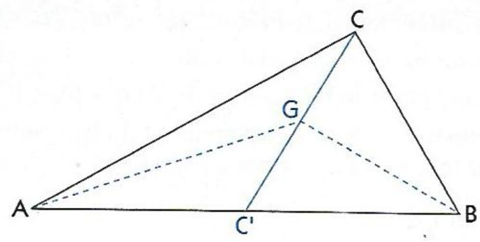
$$G = \text{bar}\ \{(A,a), (B,b), (C,c)\} \iff \overrightarrow{AG} = \frac{b}{a+b+c}\overrightarrow{AB} + \frac{c}{a+b+c}\overrightarrow{AC}$$

$$\iff \overrightarrow{AG} = b\overrightarrow{AB} + c\overrightarrow{AC} \qquad \text{(car } a + b + c = 1\text{)}$$

$$\iff G\begin{pmatrix} b \\ c \end{pmatrix} \text{ dans le repère (A, B, C).}$$

Tout point G du plan admet un couple unique de coordonnées dans le repère (A, B, C), d'où l'existence et l'unicité des nombres réels b et c, comme du nombre réel a ($a = 1 - b - c$).

2°) *Application*



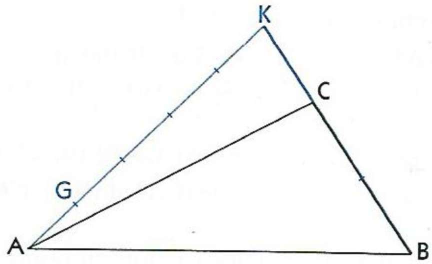
a) On a : $GA + \overrightarrow{GB} = 2\overrightarrow{GC'}$

$= -2\overrightarrow{GC}$.

D'où : $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + 2\overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0}$.

Donc a, b, c sont proportionnels à 1, 1, 2.

Ainsi : $a = b = \dfrac{1}{4}$ et $c = \dfrac{1}{2}$.



b) $-\overrightarrow{KB} + 3\overrightarrow{KC} = \overrightarrow{0}$, donc : $\overrightarrow{AK} = \dfrac{1}{2}(-\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC})$.

Or : $\overrightarrow{AG} = \dfrac{1}{4}\overrightarrow{AK}$.

Donc : $\overrightarrow{AG} = \dfrac{1}{8}(-\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC})$.

Le point G a pour coordonnées $(-\dfrac{1}{8}, \dfrac{3}{8})$ dans le repère (A, B, C). Donc : $a = \dfrac{3}{4}$, $b = -\dfrac{1}{8}$ et $c = \dfrac{3}{8}$.

2. Centre du cercle inscrit dans un triangle

Soit ABC un triangle. On pose : BC = a, AC = b et AB = c.

On désigne par I le barycentre de (A,a), (B,b) et (C,c).

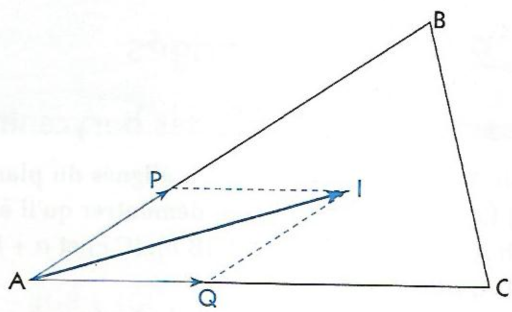
1°) Soit P le point de (AB) et Q le point de (AC) tels que : $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{AQ}$.

***a)* Démontrer que : $\|\overrightarrow{AP}\| = \|\overrightarrow{AQ}\|$.**

***b)* Quelle est la nature du quadrilatère APIQ ? En déduire que le point I appartient à la bissectrice de l'angle $\widehat{A}$ du triangle ABC.**

2°) Démontrer que le point I est le centre du cercle inscrit dans le triangle ABC.

Solution



1°) *a)* On a : $\overrightarrow{AI} = \dfrac{b}{a+b+c}\overrightarrow{AB} + \dfrac{c}{a+b+c}\overrightarrow{AC}$.

D'où : $\overrightarrow{AP} = \dfrac{b}{a+b+c}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AQ} = \dfrac{c}{a+b+c}\overrightarrow{AC}$.

On a donc : $\|\overrightarrow{AP}\| = \|\overrightarrow{AQ}\| = \dfrac{bc}{a+b+c}$.

b) Le quadrilatère APIQ est un losange car c'est un parallélogramme ayant deux côtés consécutifs égaux.

I appartient donc à la bissectrice de l'angle $\widehat{A}$.

2°) On démontre de même que I appartient aux bissectrices des angles $\widehat{B}$ et $\widehat{C}$; I est donc le centre du cercle inscrit dans le triangle ABC.

3. Centre d'inertie d'une plaque homogène

On admet les résultats suivants, utilisés en Physique, concernant les plaques homogènes :
– le centre d'inertie d'une plaque triangulaire est l'isobarycentre de ses sommets ;
– si une plaque admet un centre de symétrie I, ce point est le centre d'inertie de la plaque ;
– si une plaque admet un axe de symétrie, le centre d'inertie de la plaque est un point de cet axe ;
– si une plaque P est la juxtaposition de deux plaques P_1 et P_2, de centres d'inertie respectifs I_1 et I_2 et de masses respectives m_1 et m_2, le centre d'inertie de la plaque P est le barycentre de (I_1,m_1) et (I_2,m_2).

Soit ABC un triangle, M et N les milieux respectifs des segments [AB] et [AC].

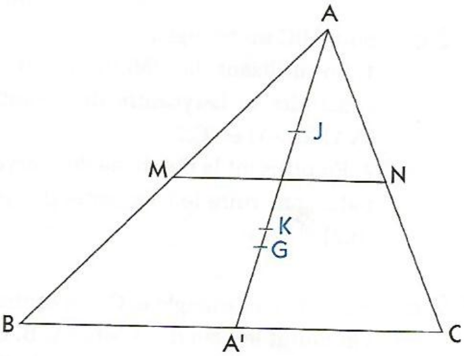
1°) Vérifier que le quadrilatère MNCB est un trapèze et déterminer le centre d'inertie G de ce trapèze, considéré comme une plaque homogène.

2°) Déterminer l'isobarycentre I des points M, N, C, B. Les points I et G sont-ils confondus ?

3°) *Application*

Le plan est muni du repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On considère les points $A\begin{pmatrix}3\\9\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}-6\\0\end{pmatrix}$ et $C\begin{pmatrix}6\\0\end{pmatrix}$. Calculer les coordonnées des points G et I.

Solution



1°) Dans le triangle ABC, (MN) est la droite passant par les milieux des côtés [AB] et [AC], elle est donc parallèle à la droite (BC). Ainsi, le quadrilatère MNCB est un trapèze.

Le triangle ABC peut être considéré comme la juxtaposition de deux plaques homogènes : le triangle AMN et le trapèze MNCB.

On désigne par J et K les centres d'inertie respectifs des triangles AMN et ABC, c'est-à-dire leurs centres de gravité, et par G le centre d'inertie du trapèze MNCB.

Le triangle AMN est l'image du triangle ABC par l'homothétie h de centre A et de rapport $\frac{1}{2}$.

Donc : $\frac{\text{aire (AMN)}}{\text{aire (ABC)}} = \frac{1}{4}$ et $\frac{\text{aire (AMN)}}{\text{aire (MNCB)}} = \frac{1}{3}$.

Les plaques AMN, MNCB et ABC sont homogènes, donc leurs masses sont proportionnelles à leurs aires respectives.

Donc, K est le barycentre des points pondérés (J,1) et (G,3).

On a : $\overrightarrow{AJ} + 3\overrightarrow{AG} = 4\overrightarrow{AK}$ (1).

Soit A' le milieu de [BC] : $\overrightarrow{AK} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AA'} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$ et $\overrightarrow{AJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AK} = \frac{1}{6}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$.

En remplaçant dans (1), on obtient :

$3\overrightarrow{AG} = \frac{4}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) - \frac{1}{6}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \Leftrightarrow \overrightarrow{AG} = \frac{7}{18}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$ (2).

2°) L'isobarycentre I des points M, N, C, B est tel que :

$$\overrightarrow{AI} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$$
$$= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right)$$
$$= \frac{3}{8}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \quad (3).$$

Le centre d'inertie G du trapèze MNCB et l'isobarycentre I de ses sommets sont donc distincts.

3°) *Application*

On a : $A\begin{pmatrix}3\\9\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}-6\\0\end{pmatrix}$ et $C\begin{pmatrix}6\\0\end{pmatrix}$.

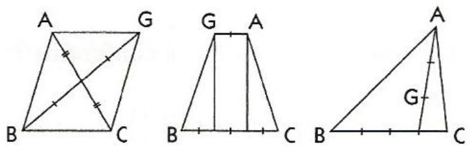
De l'égalité (2), on déduit : $\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OA} + \frac{7}{18}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) = \frac{2}{9}\overrightarrow{OA} + \frac{7}{18}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$; donc : $G\begin{pmatrix}\frac{2}{3}\\2\end{pmatrix}$.

De même, de l'égalité (3), on déduit : $\overrightarrow{OI} = \overrightarrow{OA} + \frac{3}{8}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) = \frac{1}{4}\overrightarrow{OA} + \frac{3}{8}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$; donc : $I\begin{pmatrix}\frac{3}{4}\\\frac{9}{4}\end{pmatrix}$.

Exercices

2.a Soit A, B, C, D quatre points tels que D soit l'isobarycentre des points A, B et C.
Écrire A comme barycentre des points B, C et D.

2.b Écrire G comme barycentre des points A, B et C dans les trois cas de figure ci-dessous.



2.c Soit ABC un triangle.
1. En utilisant la définition du barycentre, construire le barycentre des points pondérés (A,1), (B,–1) et (C,2).
2. En utilisant le théorème des barycentres partiels, construire le barycentre des points (A,1), (B,2) et (C,3).

2.d Soit ABC un triangle et G son centre de gravité. On munit le plan du repère (A, B, C).
1. Déterminer les coordonnées de G.
2. Déterminer une équation de chacune des médianes du triangle ABC.
3. Vérifier que le point G appartient à chacune d'elle.

2.e Soit ABC un triangle, B' et C' les milieux respectifs des côtés [AC] et [AB].
On désigne par G le point d'intersection des diagonales du trapèze BCB'C'.
1. Que représente G pour le triangle ABC ?
2. Écrire G comme barycentre des points B, C, B' et C'.

2.f Soit ABC un triangle, B' et C' les milieux respectifs des côtés [AC] et [AB].
1. Construire l'isobarycentre I des points B, C, B' et C'.
2. Écrire I comme barycentre des points A, B et C.

2.g Soit ABCD un parallélogramme.
1. En utilisant le théorème des barycentres partiels, construire les points G et G' définis par :
G = bar {(A,–1), (B,4), (C,1), (D,2)},
G' = bar {(A,1), (B,2), (C,3), (D,4)}.
2. Le plan étant muni du repère (A, B, C), calculer les coordonnées des points G et G'.

2.h On considère un triangle ABC.
1. Construire le barycentre G des points pondérés (A, 1), (B, 1) et (C, 2).
2. Exprimer le point C comme barycentre des points A, B et G.

3 Utilisations du barycentre

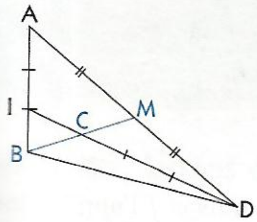
3.1. Problèmes d'alignement et de concours

On peut utiliser les barycentres pour démontrer l'alignement de trois points ou le concours de trois droites. Dans certains cas, cet outil permet de conclure rapidement. Nous allons en observer l'usage à travers quelques exemples.

Alignement de points

Soit ABD un triangle et M le milieu du segment [AD].
Placer les points I et C tels que : $\overrightarrow{AI} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC} = \dfrac{3}{4}\overrightarrow{DI}$.
Démontrer que les points B, C, M sont alignés.

Solution



$\overrightarrow{AI} = \dfrac{2}{2+1}\overrightarrow{AB}$; donc : I $= \mathrm{bar}\begin{array}{|c|c|}\hline A & B\\ \hline 1 & 2\\ \hline\end{array}$.

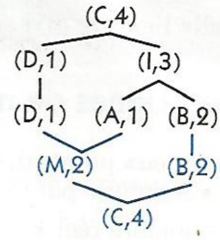
$\overrightarrow{DC} = \dfrac{3}{1+3}\overrightarrow{DI}$; donc : C $= \mathrm{bar}\begin{array}{|c|c|}\hline D & I\\ \hline 1 & 3\\ \hline\end{array}$

$= \mathrm{bar}\begin{array}{|c|c|c|}\hline D & A & B\\ \hline 1 & 1 & 2\\ \hline\end{array}$

$= \mathrm{bar}\begin{array}{|c|c|}\hline M & B\\ \hline 2 & 2\\ \hline\end{array}$.

Les points B, C, M sont donc alignés.

On peut résumer l'argumentation à l'aide du schéma ci-dessous :



M Pour démontrer que trois points sont alignés, il suffit de démontrer que l'un est barycentre des deux autres.

Concours de droites

Soit ABC un triangle. On désigne par I, J et K les points tels que :
$\overrightarrow{AI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CJ} = \frac{1}{4}\overrightarrow{CB}$ et $\overrightarrow{CK} = \frac{2}{5}\overrightarrow{CA}$.
Démontrer que les droites (AJ), (BK) et (CI) sont concourantes.

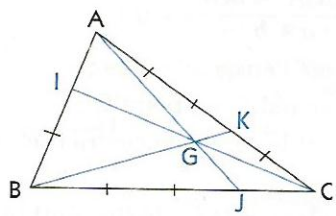
Solution

$\overrightarrow{AI} = \dfrac{1}{2+1}\overrightarrow{AB}$; donc : I $= \mathrm{bar}\begin{array}{|c|c|}\hline A & B\\ \hline 2 & 1\\ \hline\end{array}$.

$\overrightarrow{CJ} = \dfrac{1}{3+1}\overrightarrow{CB}$; donc : J $= \mathrm{bar}\begin{array}{|c|c|}\hline B & C\\ \hline 1 & 3\\ \hline\end{array}$.

$\overrightarrow{CK} = \dfrac{2}{3+2}\overrightarrow{CA}$; donc : K $= \mathrm{bar}\begin{array}{|c|c|}\hline A & C\\ \hline 2 & 3\\ \hline\end{array}$.

Posons : G $= \mathrm{bar}\begin{array}{|c|c|c|}\hline A & B & C\\ \hline 2 & 1 & 3\\ \hline\end{array}$.

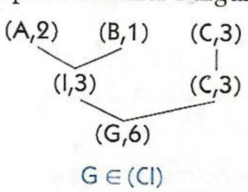


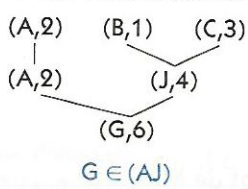
En appliquant trois fois le théorème des barycentres partiels à cette dernière égalité, on obtient :

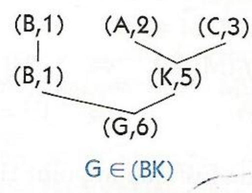
G $= \mathrm{bar}\begin{array}{|c|c|}\hline I & C\\ \hline 3 & 3\\ \hline\end{array}$, G $= \mathrm{bar}\begin{array}{|c|c|}\hline A & J\\ \hline 2 & 4\\ \hline\end{array}$, G $= \mathrm{bar}\begin{array}{|c|c|}\hline B & K\\ \hline 1 & 5\\ \hline\end{array}$.

Par conséquent, les droites (IC), (AJ) et (BK) sont concourantes en G.

On peut résumer l'argumentation à l'aide des trois schémas suivants :







3.2. Lignes de niveau

Introduction

Dans les manuels de géographie ou dans les atlas, certaines cartes contiennent des courbes telles que des isothermes ou des courbes de niveau :
– l'ensemble des points où la température moyenne est égale à 28° s'appelle isotherme de 28° ;
– l'ensemble des points de même altitude s'appelle courbe de niveau ou ligne isocline.
On fait ainsi correspondre à chaque point d'une région du globe terrestre un nombre réel.

Définition

Soit k un nombre réel et f une application du plan $\mathscr{P}$ dans $\mathbb{R}$.
On appelle ligne de niveau k de f, l'ensemble (E_k) des points M tels que : $f(M) = k$.

Lignes de niveau de $M \mapsto a MA^2 + b MB^2$

Soit A et B deux points distincts du plan $\mathscr{P}$, a et b deux nombres réels non tous nuls et f l'application de $\mathscr{P}$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $f(M) = aMA^2 + bMB^2$.
Pour tout nombre réel k, on se propose de déterminer l'ensemble (E_k) des points M du plan tels que : $f(M) = k$.

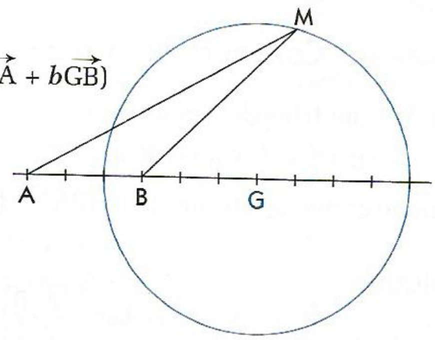
- **Si $a + b \neq 0$**, désignons par G le barycentre des points pondérés (A,a) et (B,b).

On a :
$$\begin{aligned} aMA^2 + bMB^2 &= a\overrightarrow{MA}^2 + b\overrightarrow{MB}^2 \\ &= a(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA})^2 + b(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB})^2 \\ &= (a+b)MG^2 + aGA^2 + bGB^2 + 2\overrightarrow{MG}.(a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB}) \\ &= (a+b)MG^2 + aGA^2 + bGB^2. \end{aligned}$$

On a donc :
$$\begin{aligned} f(M) = k &\Leftrightarrow (a+b)MG^2 + aGA^2 + bGB^2 = k \\ &\Leftrightarrow MG^2 = \frac{k - aGA^2 - bGB^2}{a+b}. \end{aligned}$$

On pose : $\dfrac{k - aGA^2 - bGB^2}{a+b} = \alpha$;

– si $\alpha < 0$, (E_k) est l'ensemble vide ;
– si $\alpha = 0$, (E_k) se réduit au point G ;
– si $\alpha > 0$, (E_k) est le cercle de centre G et de rayon $\sqrt{\alpha}$.



Ensemble des points M tels que : $MA^2 - 2MB^2 = 2$

- **Si $a + b = 0$**, alors $aMA^2 + bMB^2 = a(MA^2 - MB^2)$.

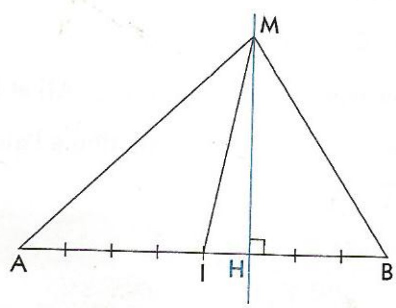
On pose : $k' = \dfrac{k}{a}$; le problème revient à déterminer l'ensemble des points M du plan tels que : $MA^2 - MB^2 = k'$.
Soit I le milieu du segment [AB].

On a :
$$\begin{aligned} MA^2 - MB^2 &= (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}).(\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}) \\ &= 2\overrightarrow{MJ}.\overrightarrow{BA} \\ &= 2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{IM}. \end{aligned}$$

Désignons par H le projeté orthogonal de M sur la droite (AB).
On a : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{IM} = \overline{AB} \times \overline{IH}$.

Donc :
$$\begin{aligned} f(M) = k &\Leftrightarrow 2\overline{AB} \times \overline{IH} = k' \\ &\Leftrightarrow \overline{IH} = \frac{k'}{2\overline{AB}}. \end{aligned}$$

On en déduit que le point H est indépendant de M.
(E_k) est la droite perpendiculaire à (AB) passant par H.



Ensemble des points M tels que : $MA^2 - MB^2 = 16$

Propriété

Soit A et B deux points distincts du plan $\mathscr{P}$, a et b deux nombres réels non tous nuls et f l'application de $\mathscr{P}$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $f(M) = aMA^2 + bMB^2$.

- **Si $a + b \neq 0$, on désigne par G le barycentre de (A,a) et (B,b) ; la ligne de niveau k de l'application f est : ou bien l'ensemble vide, ou bien le point G, ou bien un cercle de centre G.**
- **Si $a + b = 0$, la ligne de niveau k de l'application f est une droite perpendiculaire à (AB).**

L

- a et b sont tous nuls signifie que : $a = 0$ et $b = 0$;
- a et b sont non tous nuls signifie que : $a \neq 0$ ou $b \neq 0$;
- a et b sont tous non nuls signifie que : $a \neq 0$ et $b \neq 0$.

Lignes de niveau de $M \mapsto \dfrac{MA}{MB}$

Soit A, B deux points distincts du plan et k un nombre réel strictement positif. On se propose de déterminer l'ensemble (E_k) des points M du plan tels que : $\dfrac{MA}{MB} = k$.

- Si $k = 1$, alors (E_k) est la médiatrice de [AB].
- Si $k \neq 1$, alors : $\dfrac{MA}{MB} = k \quad \Leftrightarrow \quad MA^2 - k^2MB^2 = 0$.

On se ramène au problème précédent : déterminer la ligne de niveau 0 de l'application $M \mapsto aMA^2 + bMB^2$, avec $a = 1$ et $b = -k^2$.

Soit G le barycentre de $(A,1)$ et $(B,-k^2)$.

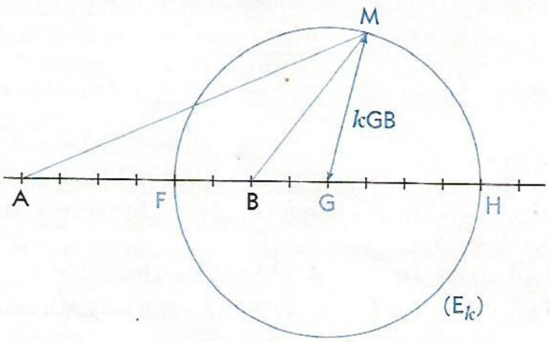
$\overrightarrow{GA} - k^2\,\overrightarrow{GB} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad GA = k^2GB$.

$M \in (E_k) \quad \Leftrightarrow \quad MG^2 = \dfrac{GA^2 - k^2GB^2}{k^2-1}$ (d'après le paragraphe précédent)

$\Leftrightarrow \quad MG^2 = \dfrac{k^2(k^2-1)GB^2}{k^2-1}$

$\Leftrightarrow \quad MG = kGB$.

(E_k) est le cercle de centre G et de rayon kGB.



Ensemble des points M tels que : $\dfrac{MA}{MB} = 2$

Remarques

- *G est extérieur au segment [AB].*
- $MG^2 = k^2\, GB \times GB$
  $= GA \times GB$.

Donc : $MG^2 = \overline{GA}\ \overline{GB}$.

Exercices

3.a Soit ABCD un quadrilatère. On désigne par I, J, K, L, M et N les milieux respectifs des segments [AB], [BC], [CD], [DA], [AC] et [BD].
En utilisant les barycentres partiels, démontrer que les segments [IK], [JL] et [MN] ont même milieu.

3.b Soit ABC un triangle. On considère les points D, E, F barycentres respectifs de (A,1) et (B,1), de (A,3) et (C,–1), de (B,3) et (C,1).
Démontrer que E est barycentre des points pondérés (D,3) et (F,–2).
En déduire que les points D, E et F sont alignés.

3.c Soit A et B deux points distincts. Déterminer l'ensemble des points M tels que : $MA^2 + MB^2 = AB^2$.

3.d Soit A et B deux points distincts. Construire l'ensemble (E) des points M tels que :
$MA^2 - MB^2 = AB^2$.

3.e Soit A et B deux points distincts. Construire l'ensemble (E) des points M tels que :
$MA^2 - MB^2 = 2AB^2$.

3.f Soit A et B deux points distincts. Construire l'ensemble (E) des points M tels que : $MA\sqrt{2} = MB$.

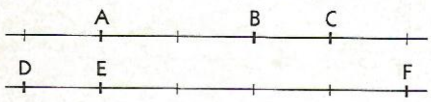
Exercices

APPRENTISSAGE

Barycentre de deux points pondérés

1 On considère un segment [AB].
Placer, sans calcul, le barycentre des points pondérés (A, a) et (B, b) dans chacun des cas suivants :
a) $a = 1$ et $b = 2$; *b)* $a = 2$ et $b = -5$;
c) $a = -5$ et $b = -1$; *d)* $a = 10$ et $b = 10$.

2 Pour chaque cas de figure, écrire chacun des trois points comme barycentre des deux autres.



3 Déterminer deux nombres réels a et b tels que C soit le barycentre des points (A, a) et (B, b) dans chacun des cas suivants :
a) $\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BC} = \vec{0}$; *b)* $3\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{BC}$;
c) $\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{CA} = 3\overrightarrow{CB}$; *d)* $\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{BC} = 3\overrightarrow{AC}$.

4 Le plan est muni du repère (O, I, J).
On donne les points $A\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix}$; on désigne par G le barycentre des points pondérés (A, –1) et (B, 4).
1. Exprimer $\overrightarrow{OG}$ en fonction de $\overrightarrow{OA}$ et de $\overrightarrow{OB}$.
2. Calculer les coordonnées de G.

5 Sur une droite de repère (O, I), on donne les points A et B d'abscisses respectives – 3 et 3.
1. Construire les points C et D tels que :
C est barycentre des points (A,1) et (B, 2) ;
D est barycentre des points (A,1) et (B, –2).
2. Déterminer deux nombres entiers positifs c et d tels que :
A est barycentre des points (C, c) et (D, – d) ;
B est barycentre des points (C, c) et (D, d).
3. Soit J le milieu du segment [CD]. Vérifier que :
$OA^2 = OB^2 = \overline{OC} \times \overline{OD}$ et $JC^2 = JD^2 = \overline{JA} \times \overline{JB}$.

Barycentre de plus de deux points pondérés

6 Soit A, B, C trois points non alignés et G le barycentre de (A, –3), (B, 1), (C, 1).
1. Démontrer que A est le centre de gravité de GBC.
2. En déduire une construction de G.

7 Les notes sur 20 d'un élève sont 14 en mathématiques, 8 en physique et 5 en français. Les coefficients affectés à ces disciplines sont respectivement 4, 2 et 1.
1. Calculer la moyenne m sur 20 de cet élève.
2. *a)* Sur une droite de repère (O, I), placer les points A, B, C et G d'abscisses respectives 14, 8, 5 et m.
b) Démontrer que G est le barycentre de (A, 4), (B, 2) et (C, 1).

8 Soit ABC et A'B'C' deux triangles de centres de gravité respectifs G et G'.
1. Démontrer que : $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = 3\overrightarrow{GG'}$.
2. En déduire une condition nécessaire et suffisante pour que ABC et A'B'C' aient le même centre de gravité.
Application
Soit ABC un triangle et k un nombre réel. On désigne par A', B' et C' les points tels que :
$\overrightarrow{BA'} = k\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CB'} = k\overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{AC'} = k\overrightarrow{AB}$.
Démontrer que les triangles ABC et A'B'C' ont le même centre de gravité.

9 Soit ABCD un parallélogramme. On désigne par C' le milieu de [AB] et par G le point d'intersection de (BD) et (CC').
1. Démontrer que G est le centre de gravité de ABC.
2. Écrire C comme barycentre des points A, B et D.
3. Démontrer que : $3\overrightarrow{AG} - 2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = \vec{0}$.

10 Soit ABC un triangle, I et K les milieux respectifs des segments [AB] et [IC].
Écrire K comme barycentre des points A, B et C.

11 On considère un triangle ABC. Soit I le milieu de [BC] et G le point de [AI] tel que : $AG = \frac{3}{4}AI$.
1. Écrire G comme barycentre des points A, B et C et déterminer les coordonnées de G dans le repère (B, C, A).
2. On désigne par K le point d'intersection des droites (AB) et (GC). Écrire K comme barycentre de G et C.

12 Soit ABC un triangle équilatéral, I le milieu du segment [BC] et H le projeté orthogonal de I sur (AB).
1. Écrire H comme barycentre des points A et B.
2. Soit K le milieu du segment [IH]. Démontrer que K est le barycentre de (A, 1), (B, 5) et (C, 2).

13 Soit ABC un triangle.
1. Construire le point G, barycentre de (A, 2), (B, –1) et $(C, \frac{3}{2})$.
2. Construire les points P, Q et R tels que :
$\overrightarrow{GP} = 4\overrightarrow{GA}$, $\overrightarrow{GQ} = -2\overrightarrow{GB}$ et $\overrightarrow{GR} = 3\overrightarrow{GC}$.
Démontrer que le point G est le centre de gravité du triangle PQR.

Utilisations du barycentre

14 Soit ABCD un quadrilatère. On désigne par I, J, K, L, M, N les milieux respectifs des segments [AB], [BC], [CD], [DA], [AC], [BD] et par G l'isobarycentre des points A, B, C et D.
1. Démontrer que les droites (IK), (JL) et (MN) sont concourantes en G.
2. Soit H le centre de gravité du triangle BCD.
Démontrer que les points A, G et H sont alignés.
Énoncer trois autres alignements de même type.

15 Soit ABC un triangle. On désigne par D le symétrique de B par rapport à A, I le milieu de [AC] et J le point tel que : $\overrightarrow{BJ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$.
Démontrer que les points D, I et J sont alignés.

16 Soit ABCD un quadrilatère, L et J les milieux respectifs des segments [AD] et [BC], I et K les points définis par : $\overrightarrow{AI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DK} = \frac{2}{3}\overrightarrow{DC}$.
Démontrer que le milieu du segment [IK] appartient à la droite (JL).

17 Soit ABC un triangle.
1. Construire les points P, Q et R tels que :
$\overrightarrow{CP} = \frac{3}{8}\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{AQ} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BR} = \frac{5}{6}\overrightarrow{BC}$.
2. Démontrer que les droites (AR), (BP) et (CQ) sont concourantes.

18 Mêmes questions que dans l'exercice précédent avec : $\overrightarrow{CP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{AQ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BR} = \frac{4}{5}\overrightarrow{BC}$.

19 Soit ABC un triangle. On désigne par A', B', C' les milieux respectifs des segments [BC], [AC], [AB] et par P le point défini par : $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$.
Démontrer que les droites (AA'), (B'C') et (CP) sont concourantes.

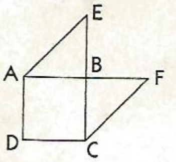
20 Soit A et B deux points du plan tels que AB = 6 et f l'application numérique définie dans le plan par : $f(M) = MA^2 + MB^2$.
1. Déterminer les lignes de niveau 50, 36, 26, 20 de f.
2. Pour quelles valeurs de k la ligne de niveau k de f :
– est-elle réduite à un point ?
– passe-t-elle par A ?
– passe-t-elle par le symétrique de B par rapport à A ?
3. Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que : $26 \leq MA^2 + MB^2 \leq 68$.

21 On donne un segment [AB].
Déterminer et construire l'ensemble (E) des points M du plan tels que : MA = 2MB.

22 On considère un triangle ABC et I le milieu du côté [AB]. Déterminer et tracer la ligne de niveau $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}$ de l'application définie dans le plan par $f(M) = \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}$.

23 On donne un segment [AB].
1. Construire le barycentre G des points pondérés (A, 1) et (B, –2).
2. Soit M un point du plan.
a) Démontrer que le vecteur $2\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB}$ est indépendant de M.
b) Déterminer et construire l'ensemble des points M tels que : $\|\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB}\| = \|2\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB}\|$.

24 La figure ci-contre représente une plaque homogène d'épaisseur constante, formée d'un carré ABCD et de deux triangles rectangles isocèles ABE et BCF.
Déterminer la position du centre de gravité de cette plaque.



APPROFONDISSEMENT

25 Soit ABC un triangle, B' et C' les milieux respectifs des côtés [AC] et [AB]. On désigne par D le symétrique de A par rapport à B, E le symétrique de C par rapport à A et F le milieu de [DE].
Démontrer, en utilisant le théorème des barycentres partiels, que les points F, B' et C' sont alignés. Préciser leurs positions relatives.

26 Soit ABC un triangle, p et q deux nombres réels positifs non nuls. On désigne par G le barycentre de (A, p), (B, q) et (C, q). Les droites (AG), (BG) et (CG) coupent respectivement (BC), (CA) et (AB) en I, J et K.
En utilisant le théorème des barycentres partiels, démontrer que :
a) I est le milieu de [BC] ;
b) les droites (JK) et (BC) sont parallèles.

27 Soit ABC un triangle. On pose : AB = c, BC = a et AC = b. On désigne par I le point d'intersection de (BC) avec la bissectrice de l'angle $\widehat{A}$. La droite parallèle à (AI) passant par C coupe (AB) en D.
1. Démontrer que ACD est isocèle et que $\frac{IB}{IC} = \frac{c}{b}$.
2. En déduire les barycentres respectifs de (B, b) et (C, c), de (A, a) et (B, b), de (A, a) et (C, c).
3. Démontrer que le centre du cercle inscrit dans le triangle ABC est le barycentre de (A, a), (B, b) et (C, c).

28 Soit ABC un triangle. La bissectrice extérieure de l'angle $\widehat{A}$ (*droite perpendiculaire à la bissectrice de l'angle* $\widehat{A}$) coupe la droite (BC) en K. La parallèle à (AK) passant par C coupe (AB) en C'.
1. Démontrer que le triangle ACC' est isocèle.
2. On pose : AB = c et AC = b.
Démontrer que K est le barycentre de (B, b) et (C, $-c$).

29 Soit ABC un triangle non isocèle en A. Les bissectrices des angles $\widehat{B}$ et $\widehat{C}$ coupent respectivement les côtés [AC] et [AB] en I et J. Les droites (IJ) et (BC) se coupent en K.
1. Écrire K comme barycentre des points I et J, comme barycentre des points B et C.
2. En déduire que (AK) est la bissectrice extérieure de l'angle $\widehat{A}$ du triangle ABC.
(*On utilisera les propriétés des bissectrices démontrées dans les exercices 27 et 28.*)

30 Soit A et B deux points d'une droite (Δ), a et b deux nombres réels tels que : $0 < a < b$.
1. Démontrer qu'il existe deux points C et D tels que C est le barycentre des points (A, a) et (B, b), D est le barycentre des points (A, a) et (B, $-b$).

Préciser la position de ces points par rapport aux points A et B.
2. La droite (Δ) est munie du repère (A, B).
Calculer, en fonction de a et b, les abscisses des points C et D et vérifier que : $\dfrac{\overline{CA}}{\overline{CB}} = -\dfrac{\overline{DA}}{\overline{DB}}$.
3. Démontrer que :
a) A est le barycentre des points $(C, a+b)$ et $(D, a-b)$;
b) B est le barycentre des points $(C, a+b)$ et $(D, b-a)$.

31 Soit ABC un triangle et M un point strictement intérieur à ce triangle. Les droites (AM), (BM) et (CM) coupent respectivement les côtés [BC], [CA] et [AB] du triangle en A', B' et C'.
1. *a)* Démontrer que : $\dfrac{\text{aire (MAB)}}{\text{aire (MAC)}} = \dfrac{A'B}{A'C}$.
b) En déduire que A' est le barycentre des points pondérés (B, aire(MAC)) et (C, aire(MAB)).
2. Soit G le barycentre des points pondérés (A, aire(MBC)), (B, aire(MAC)) et (C, aire(MAB)).
Démontrer que les points G et M sont confondus.
Application
Soit I le centre du cercle inscrit dans le triangle ABC. On pose : $BC = a$, $CA = b$ et $AB = c$.
En utilisant les résultats précédents, démontrer que I est le barycentre des points (A, a), (B, b) et (C, c).

32 On considère une droite $(\mathcal{D})$, un point P extérieur à cette droite et H le projeté orthogonal de P sur $(\mathcal{D})$.
À tout point M de la droite $(\mathcal{D})$, on associe le point N barycentre des points pondérés (M, HP^2) et (P, HM^2).
1. Exprimer le vecteur $\overrightarrow{HN}$ en fonction de $\overrightarrow{HM}$ et $\overrightarrow{HP}$.
2. En déduire que les vecteurs $\overrightarrow{HN}$ et $\overrightarrow{MP}$ sont orthogonaux.
3. Déduire de la question précédente le lieu des points N lorsque M décrit la droite $(\mathcal{D})$.

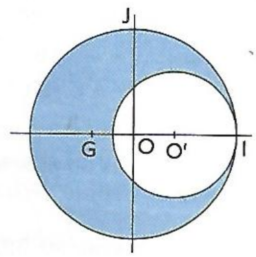
33 ABC est un triangle rectangle en A, tel que $BC = 2a$ et G est le barycentre de $(A, 4)$, $(B, -1)$, $(C, -1)$.
1. Démontrer que G et le milieu de [BC] sont symétriques par rapport au point A.
2. Démontrer que pour tout point M du plan, on a :
$4MA^2 - MB^2 - MC^2 = 2MG^2 + 4GA^2 - GB^2 - GC^2$.
3. Soit (E) l'ensemble des points M du plan tels que :
$4MA^2 - MB^2 - MC^2 = -4a^2$.
Vérifier que A appartient à (E) puis déterminer (E).

34 Soit ABC un triangle. Sur la droite (BC), on choisit un point M distinct de B et de C.
On lui associe le point N de la droite (AB) tel que :
$$\overrightarrow{AN} = \frac{\overline{MC}}{\overline{BC} + \overline{MC}}\overrightarrow{AB}$$
et le point P de la droite (AC) tel que :
$$\overrightarrow{AP} = \frac{\overline{BM}}{\overline{BC} + \overline{BM}}\overrightarrow{AC}.$$
1. Vérifier que :
a) M est le barycentre de $(B, \overline{MC})$ et $(C, \overline{BM})$;
b) N est le barycentre de $(A, \overline{BC})$ et $(B, \overline{MC})$;
c) P est le barycentre de $(A, \overline{BC})$ et $(C, \overline{BM})$.
2. Démontrer que les droites (AM), (BP) et (CN) concourent en un point G que l'on déterminera.
3. Déterminer le lieu des points G lorsque le point M décrit la droite (BC).

35 ABC est un triangle.
On pose : $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$, $\alpha = a \cos \widehat{B} \cos \widehat{C}$, $\beta = b \cos \widehat{A} \cos \widehat{C}$, $\gamma = c \cos \widehat{A} \cos \widehat{B}$.
On admettra que : $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$.
1. Soit H le barycentre de (A, α), (B, β) et (C, γ).
Exprimer le vecteur $\overrightarrow{AH}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
2. Déduire de la question précédente que les vecteurs $\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont orthogonaux.
3. Démontrer que H est l'orthocentre du triangle ABC.

36 Soit ABC un triangle, G son centre de gravité, O le centre de son cercle circonscrit et H le point tel que :
$$\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}.$$
1. *a)* Vérifier que les vecteurs $\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont orthogonaux.
b) Démontrer que H est l'orthocentre du triangle ABC.
2. Démontrer que O est le barycentre de (G, 3) et (H, –1).
3. On reprend dans cette question les données et les résultats établis dans l'exercice précédent.
a) Vérifier que : $\beta + \gamma = a \cos \widehat{A}$.
b) Déduire des questions précédentes que O est le barycentre de $(A, a \cos \widehat{A})$, $(B, b \cos \widehat{B})$ et $(C, c \cos \widehat{C})$.

37 Le croissant d'or
Le plan est muni du repère (O, I, J).
On considère une plaque homogène d'épaisseur constante, formée du disque de centre O et de rayon 1, auquel on a enlevé un disque, de rayon r, tangent intérieurement en I au précédent.
1. Déterminer, en fonction de r, la position du point G, centre de gravité de cette plaque.
2. Calculer r pour que le point G soit exactement sur la «frontière» entre les deux disques.
(*On remarquera que la valeur de r trouvée est égale à l'inverse du « nombre d'or ».*)



38 Théorème de Céva[1]
Soit ABC un triangle, A', B' et C' des points appartenant respectivement aux droites (BC), (CA) et (AB), distincts des sommets A, B et C.
1. On suppose que les droites (AA'), (BB') et (CC') sont concourantes en un point G.
a) Démontrer qu'il existe trois nombres réels a, b et c tels que G soit le barycentre des points pondérés (A, a), (B, b) et (C, c).
b) En appliquant le théorème des barycentres partiels aux points A', B' et C', démontrer la relation de Céva :
$$\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \times \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \times \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = -1.$$
2. Réciproquement, on suppose que les points A', B' et C' vérifient la relation précédente et que les droites (AA') et (BB') sont sécantes en un point K.
Démontrer que les droites (AA'), (BB') et (CC') sont concourantes.

[1]. *Céva Giovanni – 1648-1734.*

2 Angles orientés et Trigonométrie

Introduction

Nous avons rencontré les angles orientés en classe de seconde. L'objet de ce chapitre est d'approfondir cette notion et celles qui s'y rattachent : formules de trigonométrie et équations trigonométriques.

Astrolabe arabe du XIV[e] siècle.
(Instrument servant à mesurer la position des astres et leur hauteur au-dessus de l'horizon.)

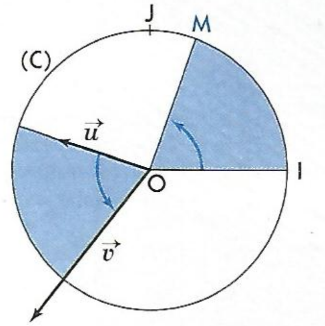
SOMMAIRE

Le plan orienté est muni du repère orthonormé direct (O, I, J). (C) est le cercle trigonométrique. I' et J' sont les points de (C) diamétralement opposés respectivement à I et J. (T) est la tangente à (C) en I. L'unité de mesure d'angle est le radian.

1 Angles orientés

1.1. Mesures d'un angle orienté

Présentation



$\vec{u}$ et $\vec{v}$ étant deux vecteurs non nuls, on a défini en classe de seconde l'angle orienté $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$ et sa mesure principale α ($\alpha \in]-\pi\ ;\ \pi]$).

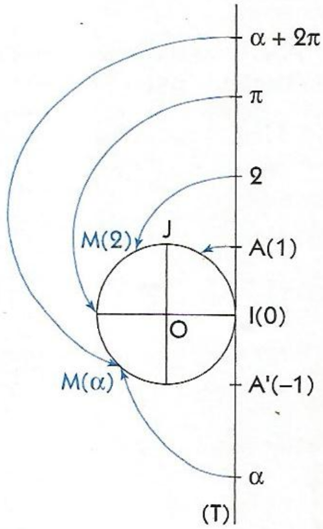
On a vu également qu'il existe un unique point M du cercle trigonométrique tel que : $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = (\widehat{\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM}})$.

Toutefois, on remarque que la somme des mesures principales de deux angles orientés n'est pas toujours la mesure principale d'un angle orienté ; par exemple : $\frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{2} = \frac{5\pi}{4}$ et $\frac{5\pi}{4} \notin]-\pi\ ;\ \pi]$.

On est donc amené à étendre la notion de mesure d'angle orienté.

On munit la tangente (T) du repère $(I, \overrightarrow{OJ})$. Soit A et A' les points de (T) d'abscisses respectives 1 et –1. Imaginons maintenant que (T) soit un fil inextensible que l'on enroule autour de (C) :

- dans le sens trigonométrique pour les points de la demi-droite [IA) ;
- dans le sens contraire pour les points de la demi-droite [IA').



À tout point de (T) d'abscisse x dans le repère $(I, \overrightarrow{OJ})$ on associe ainsi un point M(x) de (C).

On définit alors une application de $\mathbb{R}$ dans (C).

Soit $\alpha \in]-\pi\ ;\ \pi]$ et M(α) son image sur (C).

α est la mesure principale de l'angle orienté $(\widehat{\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM}(\alpha)})$.

De plus, les points de (T) qui viennent se placer sur M(α) ont pour abscisses α, $\alpha + 2\pi$, $\alpha + 4\pi$, …, $\alpha - 2\pi$, $\alpha - 4\pi$, …

Les points de (T) dont l'image est M(α) sont donc les points dont l'abscisse est de la forme $\alpha + k2\pi$, où $k \in \mathbb{Z}$.

Cette étude justifie la définition suivante.

Définition

Soit $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$ un angle orienté et α sa mesure principale.

On appelle mesure de l'angle orienté $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$ tout nombre réel de la forme : $\alpha + k2\pi$, où $k \in \mathbb{Z}$.

Remarques

- *À tout nombre réel x correspond un unique point M de (C), donc un unique angle orienté $(\widehat{\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM}})$ dont x est l'une des mesures.*
- *Si x est une mesure d'un angle orienté, les mesures de cet angle sont les nombres réels de la forme $x + k2\pi$, où k appartient à $\mathbb{Z}$.*
- *Tous les nombres réels, mesures d'un même angle orienté, ont le même point image sur le cercle trigonométrique. Ce point sera noté, selon les besoins, M(x), M($x + 2\pi$), M($x - 2\pi$), etc.*
- *Deux angles orientés sont égaux si et seulement si une mesure de l'un est une mesure de l'autre.*

Notations

- L'angle orienté $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$ de mesure α sera noté $\widehat{\alpha}$.
- L'angle orienté nul et l'angle orienté plat seront notés respectivement $\widehat{0}$ et $\widehat{\pi}$.
- Le fait qu'il existe une infinité de nombres réels, mesures d'un même angle orienté, ne permet pas de donner une notation satisfaisante à ces mesures. On écrira : soit $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$ un angle orienté de mesure α.

Congruence modulo 2π

Deux mesures quelconques d'un même angle orienté diffèrent d'un multiple entier de 2π ; on dit qu'elles sont congrues modulo 2π.

Définition

Deux nombres réels x et y sont congrus modulo 2π s'ils diffèrent d'un multiple entier de 2π.
On note : $x \equiv y\ [2\pi]$ et on lit : « x est congru à y modulo 2π ».

On a : $x \equiv y\ [2\pi] \Leftrightarrow \exists\, k \in \mathbb{Z},\ x = y + k\, 2\pi$.[1]

Les propriétés suivantes s'établissent sans difficulté. Elles serviront à résoudre des équations trigonométriques.

Propriétés

Pour tous nombres réels x, y, z et a, on a :

(1) $x \equiv y\ [2\pi] \quad \Leftrightarrow \quad x + a \equiv y + a\ [2\pi]$;

(2) $x \equiv y\ [2\pi] \quad \Leftrightarrow \quad -x \equiv -y\ [2\pi]$;

(3) $\left\{\begin{array}{l} x \equiv y\ [2\pi] \\ y \equiv z\ [2\pi] \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad x \equiv z\ [2\pi]$.

Recherche de la mesure principale d'un angle orienté

1°) Déterminer la mesure principale α de l'angle orienté de mesure $\frac{37\pi}{3}$ et placer sur le cercle trigonométrique le point $M(\frac{37\pi}{3})$.

2°) Mêmes questions pour les angles orientés de mesures $-\frac{71\pi}{6}$ et $-\frac{119\pi}{4}$.

Solution

1°) Nous remarquons que : $\frac{37\pi}{3} = \frac{36\pi + \pi}{3} = 6 \times (2\pi) + \frac{\pi}{3}$. Donc : $\frac{37\pi}{3} \equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$.

De plus, $\frac{\pi}{3} \in \,]-\pi\,;\pi]$; donc : $\alpha = \frac{\pi}{3}$.

2°) De même : $-\frac{71\pi}{6} = \frac{(-72 + 1)\pi}{6} = -6 \times (2\pi) + \frac{\pi}{6}$. Donc : $\frac{37\pi}{6} \equiv \frac{\pi}{6}\ [2\pi]$.

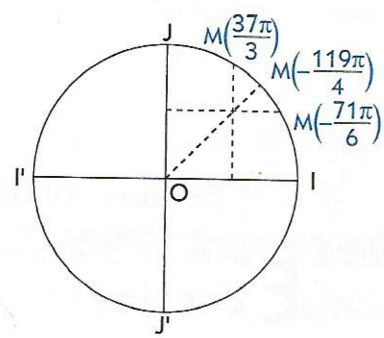
De plus, $\frac{\pi}{6} \in \,]-\pi\,;\pi]$; donc : $\alpha = \frac{\pi}{6}$.

Trouvons, par une méthode générale, la mesure principale α de l'angle orienté de mesure $-\frac{119\pi}{4}$.

α vérifie les deux conditions suivantes :

(1) $\quad -\pi < \alpha \leq \pi$;

(2) $\quad \exists\, k \in \mathbb{Z},\ \alpha = -\frac{119\pi}{4} + k\, 2\pi$.



Déterminons tout d'abord k.

De (1) et (2), on déduit que : $-\pi < -\frac{119\pi}{4} + k\, 2\pi \leq \pi$;

en divisant par 2π, on obtient : $-\frac{1}{2} < -\frac{119}{8} + k \leq \frac{1}{2}$;

par suite : $\frac{115}{8} < k \leq \frac{123}{8}$; d'où : $k = 15$.

Donc : $\alpha = -\frac{119\pi}{4} + 15 \times 2\pi = \frac{(-119 + 120)\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$.

M

Déterminer la mesure principale α d'un angle orienté, dont une mesure a est connue, consiste à écrire $\alpha = a + k\, 2\pi$, où $-\pi < \alpha \leq \pi$ et $k \in \mathbb{Z}$.

- Cette écriture peut être immédiate.
- Sinon, on détermine tout d'abord k à l'aide des inégalités : $-\pi < a + k\, 2\pi \leq \pi$.
- Puis l'on détermine α en utilisant l'égalité $\alpha = a + k\, 2\pi$.

1. *Le symbole $\exists$ signifie : « il existe ». Ainsi, « $\exists\, k \in \mathbb{Z},\ x = y + k2\pi$ » signifie : « il existe un nombre entier relatif k tel que : $x = y + k2\pi$ ».*

Remarques

- *Si x est une mesure en radian d'un angle orienté, une mesure y en degré de cet angle orienté est obtenue par l'égalité :* $\frac{x}{\pi} = \frac{y}{180}$.
- *Sauf indication contraire, l'unité d'angle utilisée par la suite, sera le radian.*
- *Si α est la mesure principale (en radian) d'un angle orienté et M le point image de α sur le cercle trigonométrique, la longueur de l'arc $\widehat{IM}$ est $|\alpha|$.*

1.2. Somme de deux angles orientés

Soit $\widehat{\alpha}$ et $\widehat{\beta}$ deux angles orientés de mesures α et β, α' et β' deux mesures quelconques de $\widehat{\alpha}$ et $\widehat{\beta}$.

On a : $\alpha' \equiv \alpha\ [2\pi] \quad \Leftrightarrow \quad \alpha' + \beta' \equiv \alpha + \beta'\ [2\pi]$

$\beta' \equiv \beta\ [2\pi] \quad \Leftrightarrow \quad \alpha + \beta' \equiv \alpha + \beta\ [2\pi]$.

Donc : $\alpha' + \beta' \equiv \alpha + \beta\ [2\pi]$; $\alpha' + \beta'$ et $\alpha + \beta$ sont des mesures d'un même angle orienté.

Cette étude justifie la définition suivante.

Définition

Soit $\widehat{\alpha}$ et $\widehat{\beta}$ deux angles orientés de mesures respectives α et β. On appelle somme des angles orientés $\widehat{\alpha}$ et $\widehat{\beta}$, et on note $\widehat{\alpha} + \widehat{\beta}$, l'angle orienté dont l'une des mesures est $\alpha + \beta$.

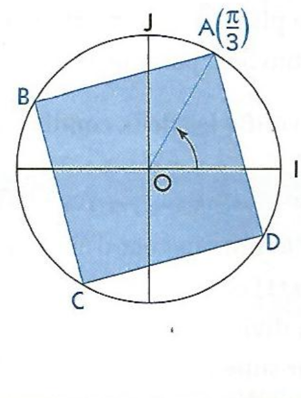
Remarques

- *Deux angles orientés sont opposés lorsque leur somme est l'angle orienté nul ; l'opposé de $\widehat{\alpha}$ est noté $-\widehat{\alpha}$.*
On a : $\widehat{\alpha} + (-\widehat{\alpha}) = \widehat{0}$.
- *La différence de deux angles orientés est la somme du premier et de l'opposé de l'autre :*
$\widehat{\alpha} - \widehat{\beta} = \widehat{\alpha} + (-\widehat{\beta})$.
- *Les propriétés de l'addition des angles orientés sont celles de l'addition des nombres réels ; en particulier,* $\widehat{\alpha} + \widehat{\beta} = \widehat{\beta} + \widehat{\alpha}$.

Exemples

ABCD est un carré inscrit dans (C) tel que $(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}})$ soit l'angle droit direct et $\frac{\pi}{3}$ une mesure de $(\widehat{\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OA}})$. On a :

Angle	$(\widehat{\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OA}})$	$(\widehat{\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ}})$	$(\widehat{\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OB}})$	$(\widehat{\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OC}})$
Mesure	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{6}$	$-\frac{2\pi}{3}$



$\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2} = \frac{5\pi}{6}$; donc : $(\widehat{\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OA}}) + (\widehat{\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ}}) = (\widehat{\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OB}})$;

$\frac{\pi}{2} + \frac{5\pi}{6} \equiv -\frac{2\pi}{3}\ [2\pi]$; donc : $(\widehat{\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ}}) + (\widehat{\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OB}}) = (\widehat{\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OC}})$.

Exercices

1.a On considère un angle orienté dont une mesure est $\frac{21\pi}{4}$. Donner quatre autres mesures de cet angle orienté, dont la mesure principale. Placer sur le cercle trigonométrique le point image de $\frac{21\pi}{4}$.

1.b Vérifier que, dans chaque cas, on a : $x \equiv y\ [2\pi]$.

a) $x = \frac{\pi}{2},\ y = -\frac{3\pi}{2}$. *c)* $x = \frac{2\pi}{3},\ y = \frac{14\pi}{3}$.

b) $x = -\frac{5\pi}{4},\ y = \frac{3\pi}{4}$. *d)* $x = -\frac{29\pi}{12},\ y = \frac{67\pi}{12}$.

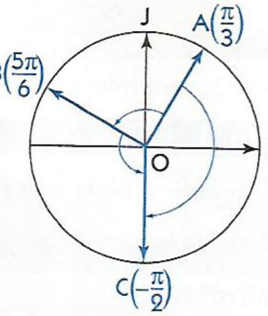
1.c On considère l'angle orienté de mesure $\frac{3\pi}{4}$. Trouver trois mesures en degré de cet angle orienté.

1.d Le plan est muni du repère orthonormé direct (O, I, J). Soit A l'image du nombre réel $\frac{16\pi}{3}$ sur le cercle trigonométrique. Quelle est la longueur de l'arc $\widehat{IA}$?

2 Propriétés des angles orientés

2.1. Relation de Chasles

Introduction



• Sur le cercle trigonométrique, placer les points A, B et C, images respectives des nombres réels $\frac{\pi}{3}$, $\frac{5\pi}{6}$ et $-\frac{\pi}{2}$.

• Déterminer les mesures principales des angles orientés $(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}})$, $(\widehat{\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}})$ et $(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OC}})$.

• Vérifier que : $(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}}) + (\widehat{\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}}) = (\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OC}})$.

Cette relation se généralise à des angles orientés quelconques et conduit à la propriété suivante que nous admettons.

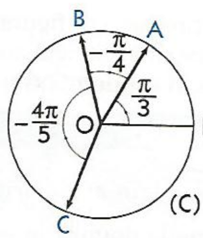
Propriété

Pour tous vecteurs non nuls $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$: $(\widehat{\vec{u},\vec{v}}) + (\widehat{\vec{v},\vec{w}}) = (\widehat{\vec{u},\vec{w}})$.

Cette propriété est appelée relation de Chasles.

Exemples

• Soit A, B et C les points de (C) tels que $\frac{\pi}{3}$, $-\frac{\pi}{4}$ et $-\frac{4\pi}{5}$ soient les mesures principales respectives des angles $(\widehat{\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OA}})$, $(\widehat{\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OA}})$ et $(\widehat{\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OB}})$.



On se propose de calculer les mesures principales respectives α et β des angles $(\widehat{\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OB}})$ et $(\widehat{\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OC}})$.

– On a : $(\widehat{\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OB}}) = (\widehat{\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OA}}) + (\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}})$.

$(\widehat{\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OB}})$ a pour mesure : $\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{12}$; d'où : $\alpha = \frac{7\pi}{12}$.

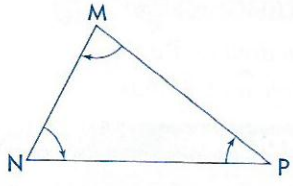
– On a : $(\widehat{\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OC}}) = (\widehat{\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OB}}) + (\widehat{\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}})$.

$(\widehat{\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OC}})$ a pour mesure : $\frac{7\pi}{12} + \frac{4\pi}{5} = \frac{83\pi}{60} = 2\pi - \frac{37\pi}{60}$; d'où : $\beta = -\frac{37\pi}{60}$.

• Soit MNP un triangle ; on a : $(\widehat{\overrightarrow{MP},\overrightarrow{MN}}) + (\widehat{\overrightarrow{NM},\overrightarrow{NP}}) + (\widehat{\overrightarrow{PN},\overrightarrow{PM}}) = \hat{\pi}$.

En effet : $(\widehat{\overrightarrow{MP},\overrightarrow{MN}}) + (\widehat{\overrightarrow{NM},\overrightarrow{NP}}) + (\widehat{\overrightarrow{PN},\overrightarrow{PM}}) = (\widehat{\overrightarrow{MP},\overrightarrow{MN}}) + (\widehat{\overrightarrow{MN},\overrightarrow{PN}}) + (\widehat{\overrightarrow{PN},\overrightarrow{PM}})$

$= (\widehat{\overrightarrow{MP},\overrightarrow{PM}}) = \hat{\pi}$.



Conséquences

Propriété 1

Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{u}'$ et $\vec{v}'$ quatre vecteurs non nuls. On a : $(\widehat{\vec{u},\vec{v}}) = (\widehat{\vec{u}',\vec{v}'}) \Leftrightarrow (\widehat{\vec{u},\vec{u}'}) = (\widehat{\vec{v},\vec{v}'})$.

En effet, $(\widehat{\vec{u},\vec{v}}) = (\widehat{\vec{u}',\vec{v}'}) \Leftrightarrow (\widehat{\vec{u},\vec{u}'}) + (\widehat{\vec{u}',\vec{v}}) = (\widehat{\vec{u}',\vec{v}}) + (\widehat{\vec{v},\vec{v}'})$.

Propriétés 2

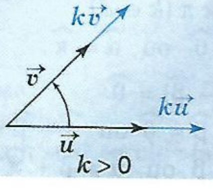
Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls et k un nombre réel non nul. On a :

(1) $(\widehat{\vec{v},\vec{u}}) = -(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$;

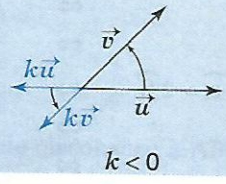
(2) **si $k > 0$, alors** $(\widehat{k\vec{u},\vec{v}}) = (\widehat{\vec{u},k\vec{v}}) = (\widehat{\vec{u},\vec{v}})$;

(3) **si $k < 0$, alors** $(\widehat{k\vec{u},\vec{v}}) = (\widehat{\vec{u},k\vec{v}}) = (\widehat{\vec{u},\vec{v}}) + \hat{\pi}$;

(4) $(\widehat{k\vec{u},k\vec{v}}) = (\widehat{\vec{u},\vec{v}})$.



$k > 0$



$k < 0$

Démonstration

Ces propriétés se démontrent aisément ; à titre indicatif, démontrons la propriété (3).

Si $k < 0$, les vecteurs $\vec{u}$ et $k\vec{u}$ sont de sens contraires.

Donc : $\widehat{(k\vec{u}, \vec{v})} = \widehat{(k\vec{u}, \vec{u})} + \widehat{(\vec{u}, \vec{v})} = \hat{\pi} + \widehat{(\vec{u}, \vec{v})}$.

On démontre de même que : $\widehat{(\vec{u}, k\vec{v})} = \widehat{(\vec{u}, \vec{v})} + \widehat{(\vec{v}, k\vec{v})} = \widehat{(\vec{u}, \vec{v})} + \hat{\pi}$.

Cas particulier

Pour $k = -1$, la propriété (3) *devient :* $\widehat{(-\vec{u}, \vec{v})} = \widehat{(\vec{u}, -\vec{v})} = \hat{\pi} + \widehat{(\vec{u}, \vec{v})}$.

Propriété 3

Pour tous nombres réels a et b d'images respectives A et B sur (C), $b - a$ est une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$.

Démonstration

D'après la relation de Chasles, on a : $\widehat{(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})} = \widehat{(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OI})} + \widehat{(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OB})}$

$= \widehat{(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OB})} - \widehat{(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OA})}$.

$\widehat{(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OA})}$ et $\widehat{(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OB})}$ admettent pour mesures respectives a et b.

Donc, $b - a$ est une mesure de l'angle orienté $\widehat{(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})}$.

2.2. Double d'un angle orienté

De nombreuses configurations géométriques font appel au double d'un angle géométrique, par exemple un angle inscrit et l'angle au centre correspondant. Dans le §1.2, nous avons défini la somme de deux angles orientés. Il est donc utile de définir également le double d'un angle orienté.

Définition

Soit $\widehat{(\vec{u}, \vec{v})}$ un angle orienté.

On appelle double de $\widehat{(\vec{u}, \vec{v})}$, et on note $2\widehat{(\vec{u}, \vec{v})}$, l'angle orienté défini par : $2\widehat{(\vec{u}, \vec{v})} = \widehat{(\vec{u}, \vec{v})} + \widehat{(\vec{u}, \vec{v})}$.

Remarques

- *Le double d'un angle orienté de mesure α a pour mesure 2α.*
- *Soit $\hat{\alpha}$ et $\hat{\beta}$ deux angles orientés ; on a : $2\hat{\alpha} + 2\hat{\beta} = 2(\hat{\alpha} + \hat{\beta})$.*

Propriétés

Soit $\hat{\alpha}$ et $\hat{\beta}$ deux angles orientés et $\hat{\delta}$ l'angle orienté droit direct. On a :

(1) $2\hat{\alpha} = \hat{0} \iff \hat{\alpha} = \hat{0}$ **ou** $\hat{\alpha} = \hat{\pi}$;

(2) $2\hat{\alpha} = 2\hat{\beta} \iff \hat{\alpha} = \hat{\beta}$ **ou** $\hat{\alpha} = \hat{\beta} + \hat{\pi}$;

(3) $2\hat{\alpha} = \hat{\pi} \iff \hat{\alpha} = \hat{\delta}$ **ou** $\hat{\alpha} = -\hat{\delta}$.

Démonstration

(1) $2\hat{\alpha} = \hat{0} \iff 2\alpha = k\,2\pi \ (k \in \mathbb{Z})$

$\iff \alpha = k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$

$\iff \hat{\alpha} = \hat{0}$ ou $\hat{\alpha} = \hat{\pi}$.

(2) $2\hat{\alpha} = 2\hat{\beta} \iff 2(\hat{\alpha} - \hat{\beta}) = \hat{0}$

$\iff \hat{\alpha} - \hat{\beta} = \hat{0}$ ou $\hat{\alpha} - \hat{\beta} = \hat{\pi}$

$\iff \hat{\alpha} = \hat{\beta}$ ou $\hat{\alpha} = \hat{\beta} + \hat{\pi}$.

(3) On a : $2\hat{\delta} = \hat{\pi}$.

$2\hat{\alpha} = \hat{\pi} \iff 2\hat{\alpha} = 2\hat{\delta}$

$\iff \hat{\alpha} = \hat{\delta}$ ou $\hat{\alpha} = \hat{\delta} + \hat{\pi}$

$\iff \hat{\alpha} = \hat{\delta}$ ou $\hat{\alpha} = -\hat{\delta}$.

Exemple

Trois points A, B et C distincts du plan sont alignés si et seulement si : $2(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \widehat{0}$.

En effet : $2(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \widehat{0} \iff (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \widehat{0}$ ou $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \widehat{\pi}$

$\iff \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ colinéaires

$\iff$ A, B, C alignés.

M Pour démontrer que trois points A, B et C sont alignés, on peut établir que : $2(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \widehat{0}$.

2.3. Angles orientés et cercle

Caractérisation d'un cercle

Propriété

Soit $(\mathscr{C})$ un cercle de centre O, A et B deux points distincts de ce cercle.

Pour tout point M distinct de A et B, on a : $M \in (\mathscr{C}) \iff 2(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$.

Démonstration

Si la corde [AB] est un diamètre, alors la propriété est immédiate.

En effet : $M \in (\mathscr{C}) \iff \overrightarrow{MA} \perp \overrightarrow{MB}$

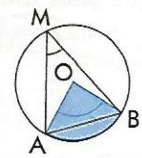
$\iff 2(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \widehat{\pi}$.

Nous supposerons désormais que la corde [AB] n'est pas un diamètre de $(\mathscr{C})$.

- Démontrons que : si $M \in (\mathscr{C})$, alors $2(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$.

L'angle $\widehat{AMB}$ intercepte l'arc $\overset{\frown}{AB}$ ou l'arc $\overset{\smile}{AB}$.

– Si $\widehat{AMB}$ intercepte l'arc $\overset{\frown}{AB}$, alors les triangles MAB et OAB sont orientés dans le même sens et $\text{mes}\,\widehat{AMB} = \frac{1}{2}\,\text{mes}\,\widehat{AOB}$;



donc : $2(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$.

– Si $\widehat{AMB}$ intercepte l'arc $\overset{\smile}{AB}$, alors les triangles MAB et OAB sont orientés en sens contraires et $\text{mes}\,\widehat{AMB} = \pi - \frac{1}{2}\,\text{mes}\,\widehat{AOB}$;

donc : $2(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = -\left(2\widehat{\pi} - (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})\right)$

$= (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$.

- Réciproquement, démontrons que : si $2(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$, alors $M \in (\mathscr{C})$.

Si $2(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$, les points A,B, M ne sont pas alignés, sinon on aurait $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = \widehat{0}$, ce qui est contradictoire avec l'énoncé.

Soit O' le centre du cercle circonscrit au triangle ABM ; on a : $2(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = (\overrightarrow{O'A}, \overrightarrow{O'B})$.

Donc : $(\overrightarrow{O'A}, \overrightarrow{O'B}) = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$.

Les triangles isocèles OAB et O'AB ont une base commune [AB] et les angles $\widehat{AOB}$ et $\widehat{AO'B}$ ont même mesure. Ces deux triangles sont donc confondus ou symétriques par rapport à la droite (AB).

De plus, ils sont orientés dans le même sens ; ils sont donc confondus.

Ainsi : O = O' et $M \in (\mathscr{C})$.

Points cocycliques

Des points situés sur un même cercle sont dits cocycliques.

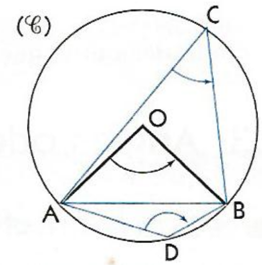
Par deux points distincts A et B, il passe une infinité de cercles.

Par trois points distincts et non alignés A, B et C, il passe un seul cercle : le cercle circonscrit à ABC.

Propriété

Soit A, B, C, D quatre points distincts du plan tels que trois quelconques d'entre eux ne sont pas alignés.
Les points A, B, C et D sont cocycliques si et seulement si : $2(\widehat{\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}}) = 2(\widehat{\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}})$.

Démonstration



• Si A, B, C et D appartiennent à un même cercle (𝒞) de centre O, alors, d'après la propriété précédente,
on a : $2(\widehat{\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}}) = (\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}})$ et $2(\widehat{\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}}) = (\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}})$.
Donc : $2(\widehat{\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}}) = 2(\widehat{\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}})$.
• Réciproquement, si $2(\widehat{\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}}) = 2(\widehat{\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}})$, désignons par (𝒞) le cercle circonscrit au triangle ABC et par O le centre de ce cercle.
On a : $2(\widehat{\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}}) = (\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}})$; donc : $2(\widehat{\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}}) = (\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}})$ et le point D appartient au cercle (𝒞).
Les points A, B, C et D sont donc cocycliques.

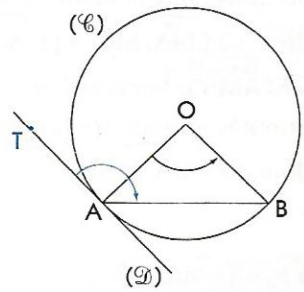
2.4. Travaux dirigés

1. Caractérisation d'une tangente à un cercle

Soit (𝒞) un cercle de centre O, A et B deux points distincts de ce cercle, (𝒟) la tangente à (𝒞) en A.
Démontrer que pour tout point T du plan, distinct de A, on a :

$$T \in (\mathscr{D}) \quad \Leftrightarrow \quad 2(\widehat{\overrightarrow{AT}, \overrightarrow{AB}}) = (\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}}).$$

Solution



Le triangle OAB est isocèle en O et $(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}}) + (\widehat{\overrightarrow{BO}, \overrightarrow{BA}}) + (\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AO}}) = \widehat{\pi}$;
donc : $(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}}) = \widehat{\pi} - 2(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AO}})$.
Soit T un point du plan, distinct de A ; on a :

$$\begin{aligned} T \in (\mathscr{D}) &\Leftrightarrow \overrightarrow{AT} \perp \overrightarrow{AO} \\ &\Leftrightarrow 2(\widehat{\overrightarrow{AT}, \overrightarrow{AO}}) = \widehat{\pi} \\ &\Leftrightarrow 2(\widehat{\overrightarrow{AT}, \overrightarrow{AB}}) + 2(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AO}}) = \widehat{\pi} \\ &\Leftrightarrow 2(\widehat{\overrightarrow{AT}, \overrightarrow{AB}}) = (\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}}). \end{aligned}$$

2. Droite de Simson

ABC est un triangle, (𝒞) le cercle circonscrit à ce triangle et M un point du plan. Soit E, F, G les projetés orthogonaux respectifs du point M sur les droites (AB), (AC), (BC).
Démontrer que les points E, F, G sont alignés si et seulement si M appartient au cercle (𝒞).
La droite passant par les points E, F et G est appelée droite de Simson du triangle ABC relative à M.

Solution

Deux des points E, F, G sont confondus si et seulement si le point M est un sommet du triangle. La propriété est alors immédiate.
Nous supposerons désormais que M est distinct des points A, B, C.

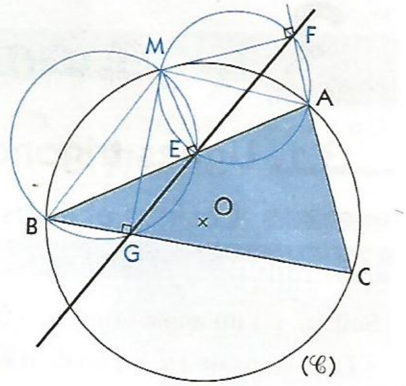
$M \in (\mathscr{C}) \quad \Leftrightarrow \quad 2(\widehat{\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AM}}) = 2(\widehat{\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BM}})$, car A, B, C et M sont cocycliques.

Or : $2\,\widehat{(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AM})} = 2\,\widehat{(\overrightarrow{AF},\overrightarrow{AM})}$ (à condition que $F \neq A$)

$= 2\,\widehat{(\overrightarrow{EF},\overrightarrow{EM})}$, car A, E, F et M sont cocycliques ;

et : $2\,\widehat{(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BM})} = 2\,\widehat{(\overrightarrow{BG},\overrightarrow{BM})}$ (à condition que $G \neq B$)

$= 2\,\widehat{(\overrightarrow{EG},\overrightarrow{EM})}$, car B, E, G et M sont cocycliques.



Si les angles $\widehat{(\overrightarrow{AF},\overrightarrow{AM})}$ et $\widehat{(\overrightarrow{BG},\overrightarrow{BM})}$ sont définis , on a donc :

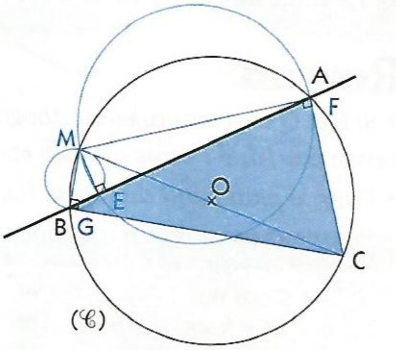
$M \in (\mathscr{C}) \quad \Leftrightarrow \quad 2\,\widehat{(\overrightarrow{EF},\overrightarrow{EM})} = 2\,\widehat{(\overrightarrow{EG},\overrightarrow{EM})}$

$\Leftrightarrow \quad 2\,\widehat{(\overrightarrow{EF},\overrightarrow{EG})} = \widehat{0}$

$\Leftrightarrow$ E, F, G alignés.

Cas particuliers

- *Si l'angle $\widehat{(\overrightarrow{AF},\overrightarrow{AM})}$ n'est pas défini, c'est-à-dire si F est en A, alors M et C sont diamétralement opposés, G est en B, les droites (FG) et (AB) sont confondues et les points E, F, G sont alignés.*
- *Si l'angle $\widehat{(\overrightarrow{BG},\overrightarrow{BM})}$ n'est pas défini, c'est-à-dire si G est en B, alors M et C sont diamétralement opposés, F est en A, les droites (FG) et (AB) sont confondues, et les points E, F, G sont alignés.*



Exercices

2.a Sur le cercle trigonométrique, on considère les points A et B, images respectives des nombres réels $-\dfrac{1999\pi}{6}$ et $\dfrac{3\pi}{4}$.

1. Placer les points A et B.

2. Quelle est la mesure principale de l'angle orienté $\widehat{(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})}$?

2.b Soit ABC un triangle ; on désigne par α une mesure de l'angle orienté $\widehat{(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})}$.
Donner, en fonction de α, une mesure des angles $\widehat{(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{AC})}$, $\widehat{(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB})}$, $\widehat{(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{AB})}$, $\widehat{(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{BA})}$.

2.c $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs non nuls, k et k' sont deux nombres réels non nuls. Exprimer $\widehat{(k\vec{u},k'\vec{v})}$ en fonction de $\widehat{(\vec{u},\vec{v})}$.
(On distinguera deux cas : $kk' > 0$ et $kk' < 0$.)

2.d A, B, C, D sont quatre points distincts du plan.
Démontrer que :
$\widehat{(\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AB})} + \widehat{(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC})} + \widehat{(\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CD})} + \widehat{(\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DA})} = \widehat{0}$.

2.e [AB] est une corde d'un cercle $(\mathscr{C})$ de centre O. M et N sont deux points de $(\mathscr{C})$ n'appartenant pas au même demi-plan de frontière (AB). On désigne par α une mesure de l'angle orienté $\widehat{(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB})}$.

1. Déterminer, en fonction de α, une mesure des angles $\widehat{(\overrightarrow{NA},\overrightarrow{NB})}$ et $\widehat{(\overrightarrow{BM},\overrightarrow{MA})}$.

2. Exprimer $\widehat{(\overrightarrow{OB},\overrightarrow{AO})}$ en fonction de $\widehat{(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AO})}$.

2.f ABCD est losange de sens indirect tel que : mes $\widehat{BAD} = \dfrac{\pi}{6}$. Déterminer une mesure des angles $\widehat{(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC})}$ et $\widehat{(\overrightarrow{CD},\overrightarrow{CA})}$.

3 Trigonométrie

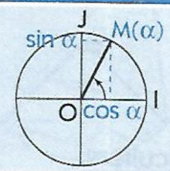
3.1. Lignes trigonométriques d'un angle orienté

Cosinus et sinus d'un angle orienté

Définitions

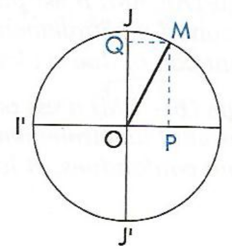
Soit $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$ un angle orienté de mesure α et M l'image de α sur (C).

- **Le cosinus de $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$ ou de α est l'abscisse de M.**
- **Le sinus de $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$ ou de α est l'ordonnée de M.**



Remarques

- *Si P et Q sont les projetés orthogonaux respectifs de M sur (I'I) et (J'J), on a :* $\cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \cos\alpha = \overline{OP}$ *et* $\sin(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \sin\alpha = \overline{OQ}$.
- *Dans le plan muni du repère (O, I, J), on a :* $M\begin{pmatrix}\cos\alpha\\ \sin\alpha\end{pmatrix}$.
- *Pour tout nombre réel α et pour tout nombre entier relatif k, on a :*
  $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$;
  $-1 \leq \cos\alpha \leq 1$ *et* $-1 \leq \sin\alpha \leq 1$;
  $\cos(\alpha + k\,2\pi) = \cos\alpha$ *et* $\sin(\alpha + k\,2\pi) = \sin\alpha$.



Tangente d'un angle orienté

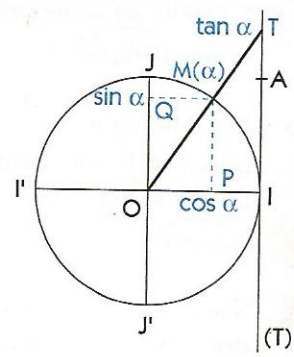
Définition

Soit $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$ un angle orienté non droit de mesure α.

La tangente de $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$ ou de α est le nombre réel, noté $\tan(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$ ou $\tan\alpha$, défini par :
$\tan(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$.

Remarques

- *$\tan\alpha$ n'est pas défini pour les nombres réels associés aux points J et J', c'est-à-dire les nombres réels α de la forme :* $\alpha = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
- *Soit T le point d'intersection de (OM) et (T), h l'homothétie de centre O qui applique P sur I. Le rapport de h est* $\dfrac{1}{\cos\alpha}$ *et* $h(M) = T$.
  Donc : $\overrightarrow{IT} = \dfrac{1}{\cos\alpha}\overrightarrow{PM} = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\overrightarrow{IA}$; *d'où :* $\overline{IT} = \tan\alpha$.
- *Pour tout nombre réel α et pour tout nombre entier relatif k, on a :*
  $\tan(\alpha + k\pi) = \tan\alpha$ *et* $1 + \tan^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$.



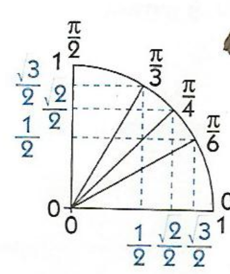
Vocabulaire

$\cos\alpha$, $\sin\alpha$ et $\tan\alpha$ sont appelés « lignes trigonométriques » de l'angle $(\widehat{\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM}})$ ou du nombre réel α.

Lignes trigonométriques des angles remarquables

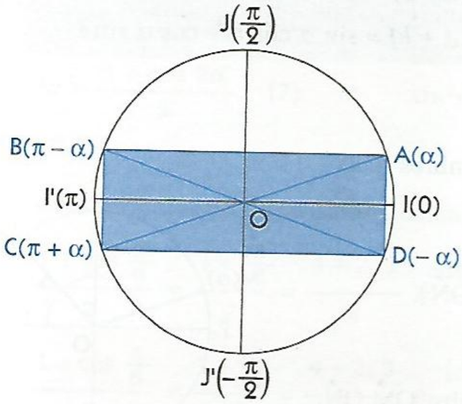
Le tableau ci-dessous indique les lignes trigonométriques remarquables à retenir.

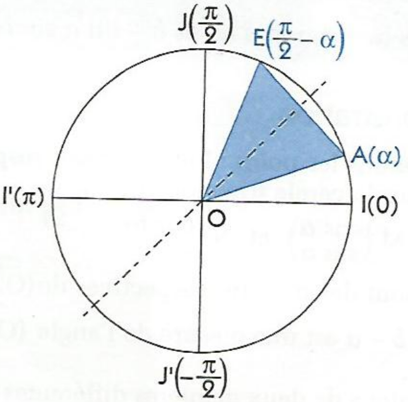
α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\tan\alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	



Lignes trigonométriques d'angles associés

Soit $\widehat{\alpha}$ un angle orienté de mesure α. Les angles orientés de mesures $-\alpha$, $\pi-\alpha$, $\pi+\alpha$, $\frac{\pi}{2}-\alpha$ ou $\frac{\pi}{2}+\alpha$ sont habituellement appelés angles associés à $\widehat{\alpha}$.





Les deux configurations géométriques ci-dessus, ainsi que les définitions des fonctions sinus, cosinus et tangente, justifient les propriétés suivantes.

Propriétés

Pour tout nombre réel α, on a :

$\cos(-\alpha)=\cos\alpha$; $\cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha$; $\cos(\pi+\alpha)=-\cos\alpha$; $\cos(\frac{\pi}{2}-\alpha)=\sin\alpha$;

$\sin(-\alpha)=-\sin\alpha$; $\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha$; $\sin(\pi+\alpha)=-\sin\alpha$; $\sin(\frac{\pi}{2}-\alpha)=\cos\alpha$.

Remarques

- *$\frac{\pi}{2}+\alpha=\pi-\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$, donc on a également les relations suivantes :*

  $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\sin\alpha$;

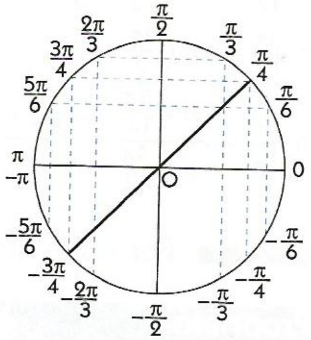
  $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\cos\alpha$.

- *Les tangentes des angles associés se déduisent des formules précédentes ;*

  ainsi : $\tan(\pi-\alpha)=\dfrac{\sin(\pi-\alpha)}{\cos(\pi-\alpha)}=\dfrac{\sin\alpha}{-\cos\alpha}=-\tan\alpha$.

Exemples

Les lignes trigonométriques des angles remarquables et les formules relatives aux angles associés permettent de calculer les lignes trigonométriques des nombres réels de l'intervalle $]-\pi\,;\pi]$ représentés sur la figure ci-contre. On a ainsi :



$\cos\frac{5\pi}{6}=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)=-\cos\frac{\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$;

$\sin\frac{5\pi}{6}=\sin\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)=\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$;

$\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right)=\cos\frac{2\pi}{3}=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)=-\cos\frac{\pi}{3}=-\frac{1}{2}$;

$\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)=-\sin\frac{2\pi}{3}=-\sin\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)=-\sin\frac{\pi}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

3.2. Formules de trigonométrie

Formules d'addition

Les formules d'addition permettent de calculer les lignes trigonométriques de la somme (ou de la différence) de deux nombres réels, connaissant les lignes trigonométriques de ces deux nombres.

Propriétés

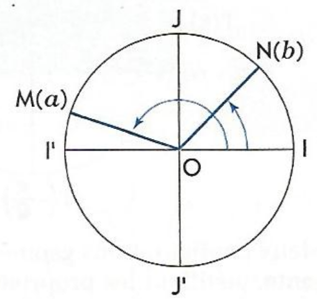
Pour tous nombres réels a et b on a :

(1) $\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$; **(2)** $\sin(a - b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$;

(3) $\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$; **(4)** $\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$.

Démonstration

Considérons les point M et N, images respectives des nombres réels a et b sur le cercle trigonométrique.



On a : $M\begin{pmatrix}\cos a \\ \sin a\end{pmatrix}$ et $N\begin{pmatrix}\cos b \\ \sin b\end{pmatrix}$.

a et b sont des mesures respectives de $(\widehat{\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM}})$ et $(\widehat{\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{ON}})$.

Donc : $b - a$ est une mesure de l'angle $(\widehat{\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}})$.

• Calculons de deux manières différentes le produit scalaire $\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{ON}$.

$\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{ON} = \|\overrightarrow{OM}\| \, \|\overrightarrow{ON}\| \cos(\widehat{\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}}) = \cos(b - a) = \cos(a - b)$;

$\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{ON} = x_M x_N + y_M y_N = \cos a \cos b + \sin a \sin b$.

D'où : $\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$ (1).

• En remplaçant b par $-b$ dans la formule (1), on obtient la formule (2).

• Établissons maintenant la formule (3) :

$\sin(a - b) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - (a - b)\right) = \cos\left(\left(\frac{\pi}{2} + b\right) - a\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + b\right) \cos a + \sin\left(\frac{\pi}{2} + b\right) \sin a$.

Or : $\cos\left(\frac{\pi}{2} + b\right) = -\sin b$ et $\sin\left(\frac{\pi}{2} + b\right) = \cos b$.

D'où : $\sin(a - b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$ (3).

• En remplaçant b par $-b$ dans la formule (3), on obtient la formule (4).

Exemples

En remarquant que $\frac{5\pi}{12} = \frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$, on calcule $\cos\frac{5\pi}{12}$, $\sin\frac{5\pi}{12}$ et $\tan\frac{5\pi}{12}$:

$\cos\frac{5\pi}{12} = \cos\left(\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{2\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{2\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4} = -\frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3} - 1)$;

$\sin\frac{5\pi}{12} = \sin\left(\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\frac{2\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4} - \cos\frac{2\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right) \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3} + 1)$;

$$\tan\frac{5\pi}{12} = \frac{\sin\frac{5\pi}{12}}{\cos\frac{5\pi}{12}} = \frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3} - 1} = 2 + \sqrt{3}.$$

Formules de duplication et de linéarisation

Propriétés

Pour tout nombre réel a, on a :

formules de duplication

(5) $\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a$; **(6)** $\sin 2a = 2 \sin a \cos a$.

formules de linéarisation

(7) $\cos^2 a = \frac{1 + \cos 2a}{2}$; **(8)** $\sin^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{2}$.

Démonstration

• En prenant $b = a$ dans les formules (2) et (4), on obtient :

$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a$ (5) ; $\sin 2a = 2\sin a \cos a$ (6).

• En utilisant la relation $\cos^2 a + \sin^2 a = 1$, on en déduit :

$\cos 2a = 2\cos^2 a - 1$ et $\cos 2a = 1 - 2\sin^2 a$.

D'où : $\cos^2 a = \dfrac{1 + \cos 2a}{2}$ (7) et $\sin^2 a = \dfrac{1 - \cos 2a}{2}$ (8).

Exemples

En utilisant les formules de linéarisation, calculons $\cos \frac{\pi}{12}$ et $\sin \frac{\pi}{12}$:

$$\cos^2 \frac{\pi}{12} = \frac{1 + \cos \frac{\pi}{6}}{2} = \frac{1 + \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{4 + 2\sqrt{3}}{8} = \frac{(\sqrt{3} + 1)^2}{8} ;$$

$$\sin^2 \frac{\pi}{12} = \frac{1 - \cos \frac{\pi}{6}}{2} = \frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{4 - 2\sqrt{3}}{8} = \frac{(\sqrt{3} - 1)^2}{8} ;$$

De plus, l'image de $\frac{\pi}{12}$ sur (C) nous indique que $\cos \frac{\pi}{12}$ et $\sin \frac{\pi}{12}$ sont des nombres réels positifs.

Donc : $\cos \frac{\pi}{12} = \dfrac{\sqrt{3} + 1}{2\sqrt{2}}$ et $\sin \frac{\pi}{12} = \dfrac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{2}}$.

Expressions de cos α, sin α et tan α en fonction de tan $\frac{\alpha}{2}$

Propriétés

Pour tout nombre réel α tel que tan $\frac{\alpha}{2}$ soit défini, en posant $t = \tan \frac{\alpha}{2}$, on a :

(9) $\cos \alpha = \dfrac{1 - t^2}{1 + t^2}$; (10) $\sin \alpha = \dfrac{2t}{1 + t^2}$;

si, de plus, tan α est défini : (11) $\tan \alpha = \dfrac{2t}{1 - t^2}$.

Démonstration

On sait que : $\cos^2 \frac{\alpha}{2} = \dfrac{1}{1 + \tan^2 \frac{\alpha}{2}} = \dfrac{1}{1 + t^2}$.

On en déduit que :

$$\cos \alpha = \cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2} = \cos^2 \frac{\alpha}{2}\left(1 - \frac{\sin^2 \frac{\alpha}{2}}{\cos^2 \frac{\alpha}{2}}\right) = \frac{1 - t^2}{1 + t^2} ;$$

$$\sin \alpha = 2\cos \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\alpha}{2} = \cos^2 \frac{\alpha}{2}\left(2\,\frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}}\right) = \frac{2t}{1 + t^2} ;$$

si, de plus, tan α est défini, $\tan \alpha = \dfrac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \dfrac{2t}{1 - t^2}$.

3.3. Travaux dirigés

1°) Démontrer que pour tous nombres réels a et b ; on a : $2 \sin a \cos b = \sin (a + b) + \sin (a - b)$.

2°) En déduire que : $2 \sin \frac{\pi}{7}\left(\cos \frac{\pi}{7} + \cos \frac{3\pi}{7} + \cos \frac{5\pi}{7}\right) = \sin \frac{6\pi}{7}$.

3°) Démontrer que : $\cos \frac{\pi}{7} - \cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{3\pi}{7} = \frac{1}{2}$.

Solution

1°) D'après les formules d'addition on a :

$$\sin(a+b)+\sin(a-b) = \sin a\cos b + \sin b\cos a + \sin a\cos b - \sin b\cos a$$
$$= 2\sin a\cos b.$$

2°) Posons : $A = 2\sin\frac{\pi}{7}\left(\cos\frac{\pi}{7}+\cos\frac{3\pi}{7}+\cos\frac{5\pi}{7}\right)$.

$A = 2\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{\pi}{7} + 2\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{3\pi}{7} + 2\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{5\pi}{7}$.

En appliquant le résultat précédent, on obtient :

$A = \sin\frac{2\pi}{7} + \sin 0 + \sin\frac{4\pi}{7} - \sin\frac{2\pi}{7} + \sin\frac{6\pi}{7} - \sin\frac{4\pi}{7} = \sin\frac{6\pi}{7}$.

3°) On a : $\sin\frac{6\pi}{7} = \sin\left(\pi - \frac{6\pi}{7}\right) = \sin\frac{\pi}{7}$.

Donc : $\cos\frac{\pi}{7}+\cos\frac{3\pi}{7}+\cos\frac{5\pi}{7} = \frac{1}{2}$.

Or : $\cos\frac{5\pi}{7} = -\cos\left(\pi-\frac{5\pi}{7}\right) = -\cos\frac{2\pi}{7}$.

D'où : $\cos\frac{\pi}{7} - \cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{3\pi}{7} = \frac{1}{2}$.

Exercices

3.a Calculer le sinus, le cosinus et la tangente de chacun des nombres réels suivants :

$-\frac{5\pi}{3}$; $-\frac{121\pi}{6}$; $-\frac{1999\pi}{6}$; $\frac{29\pi}{4}$.

3.b Démontrer que, pour tout nombre réel α, on a :

a) $\cos\alpha + \cos\left(\alpha+\frac{2\pi}{3}\right) + \cos\left(\alpha+\frac{4\pi}{3}\right) = 0$;

b) $\sin\alpha + \sin\left(\alpha+\frac{2\pi}{3}\right) + \sin\left(\alpha+\frac{4\pi}{3}\right) = 0$.

3.c On considère un nombre réel α tel que :

$\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ et $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \frac{2}{3}$.

Calculer $\cos\alpha$, $\cos 2\alpha$, $\tan 2\alpha$.

3.d x et y sont deux nombres réels de $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$ tels que : $\cos x = \frac{3}{5}$ et $\cos y = \frac{1}{3}$.

Calculer $\sin(2x-y)$.

3.e x est un nombre réel non multiple entier de $\frac{\pi}{2}$.

1. Démontrer que : $\frac{\sin 3x}{\sin x} - \frac{\cos 3x}{\cos x} = 2$.

2. Exprimer en fonction de $\cos 2x$:

a) $\frac{\sin 3x}{\sin x} + \frac{\cos 3x}{\cos x}$;

b) $\frac{\sin 5x}{\sin x} - \frac{\cos 5x}{\cos x}$.

3.f x est un nombre réel. Démontrer que :

$\cos^4 x = \frac{1}{8}\cos 4x + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{3}{8}$;

$\sin^4 x = \frac{1}{8}\cos 4x - \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{3}{8}$.

3.g x est un nombre réel tel que : $\cos x \neq 0$.

1. Démontrer que : $1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$.

2. Calculer $\sin x$ et $\cos x$ dans chacun des cas suivants :

a) $\tan x = \frac{1}{3}$ et $x \in \left]0\,;\frac{\pi}{2}\right[$;

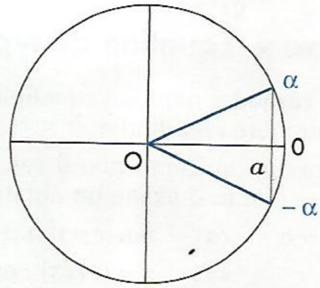
b) $\tan x = \frac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}$ et $x \in \left]-\frac{\pi}{2}\,;0\right[$.

4 Équations trigonométriques

La résolution d'équations trigonométriques se ramène le plus souvent à la résolution d'équations de types : $\cos x = a$, $\sin x = a$, $\tan x = a$.

4.1. Équations de types : $\cos x = a$, $\sin x = a$, $\tan x = a$

Équation du type : $\cos x = a$



Soit à résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $\cos x = a$, où x est l'inconnue et a un nombre réel donné.

- Si $a < -1$ ou $a > 1$, cette équation n'a pas de solution puisque, pour tout nombre réel x, on a : $-1 \le \cos x \le 1$.
- Si $a \in [-1\,;\,1]$, il existe un nombre réel α tel que $\cos \alpha = a$.

$\cos x = a \quad \Leftrightarrow \quad \cos x = \cos \alpha$

$\quad\Leftrightarrow \quad x \equiv \alpha\ [2\pi]$ ou $x \equiv -\alpha\ [2\pi]$.

Les solutions de l'équation dans $\mathbb{R}$ sont les nombres réels x de la forme :

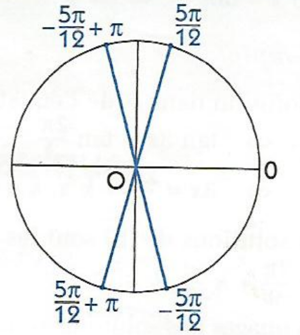
$x = \alpha + k\,2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ ou $x = -\alpha + k\,2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

Propriété

Pour tous nombres réels x et α, on a :

$\cos x = \cos \alpha \Leftrightarrow x = \alpha + k\,2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ ou $x = -\alpha + k\,2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

Exemple



Résolution dans $\mathbb{R}$ de l'équation (E) : $\cos 2x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

(E) $\Leftrightarrow \cos 2x = \cos \frac{5\pi}{6}$

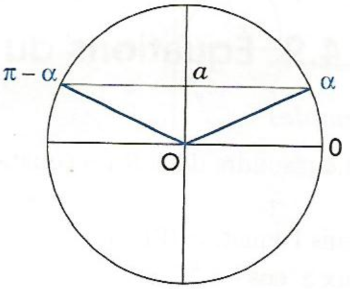
$\Leftrightarrow 2x = \frac{5\pi}{6} + k\,2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ ou $2x = -\frac{5\pi}{6} + k\,2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

Les solutions de (E) sont les nombres réels x de la forme :

$x = \frac{5\pi}{12} + k\,\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ ou $x = -\frac{5\pi}{12} + k\,\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

Les images des solutions sont les sommets d'un rectangle inscrit dans le cercle trigonométrique.

Équation du type : $\sin x = a$



Soit à résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $\sin x = a$, où x est l'inconnue et a un nombre réel donné.

- Si $a < -1$ ou $a > 1$, cette équation n'a pas de solution puisque, pour tout nombre réel x, $-1 \le \sin x \le 1$.
- Si $a \in [-1\,;\,1]$, il existe un nombre réel α tel que : $\sin \alpha = a$.

$\sin x = a \quad \Leftrightarrow \quad \sin x = \sin \alpha$

$\quad\Leftrightarrow \quad x \equiv \alpha\ [2\pi]$ ou $x \equiv \pi - \alpha\ [2\pi]$.

Les solutions de l'équation dans $\mathbb{R}$ sont les nombres réels x de la forme :

$x = \alpha + k\,2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ ou $x = \pi - \alpha + k\,2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

Propriété

Pour tous nombres réels x et α, on a :

$\sin x = \sin \alpha \Leftrightarrow x = \alpha + k\,2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ ou $x = \pi - \alpha + k\,2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

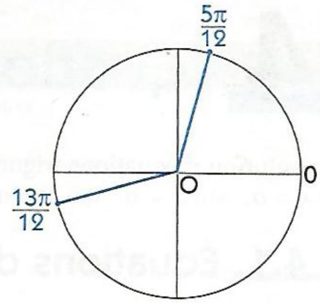
Exemple

Résolution dans $\mathbb{R}$ de l'équation (E) : $\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$.

(E) $\Leftrightarrow \quad \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\frac{\pi}{6}$

$\Leftrightarrow \quad x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{6} + k\,2\pi, k \in \mathbb{Z}$ ou $x - \frac{\pi}{4} = \pi - \frac{\pi}{6} + k\,2\pi, k \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow \quad x = \frac{5\pi}{12} + k\,2\pi, k \in \mathbb{Z}$ ou $x = \frac{13\pi}{12} + k\,2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

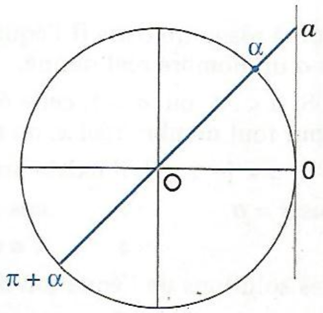


Les solutions de (E) sont les nombres réels x de la forme :
$x = \frac{5\pi}{12} + k\,2\pi, k \in \mathbb{Z}$ ou $x = \frac{13\pi}{12} + k\,2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Équation du type : $\tan x = a$

Soit à résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $\tan x = a$, où x est l'inconnue et a un nombre réel donné.

La fonction tangente prend ses valeurs dans $\mathbb{R}$; donc, pour tout nombre réel a, il existe un nombre réel α tel que $\tan\alpha = a$.



$\tan x = a \quad \Leftrightarrow \quad \tan x = \tan\alpha$

$\Leftrightarrow \quad x \equiv \alpha\ [2\pi]$ ou $x \equiv \pi + \alpha\ [2\pi]$.

Les solutions de l'équation dans $\mathbb{R}$ sont les nombres réels x de la forme :
$x = \alpha + k\,2\pi, k \in \mathbb{Z}$ ou $x = \pi + \alpha + k\,2\pi, k \in \mathbb{Z}$,
c'est-à-dire : $x = \alpha + k\,\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Propriété

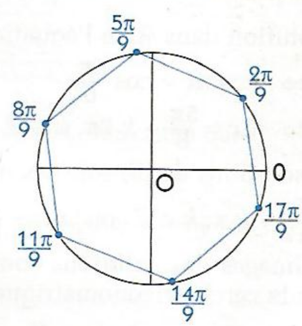
Pour tous nombres réels x et α tels que $\tan x$ et $\tan\alpha$ sont définis, on a :
$\tan x = \tan\alpha \quad \Leftrightarrow \quad x = \alpha + k\,\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Exemple

Résolution dans $\mathbb{R}$ de l'équation (E) : $\tan 3x = -\sqrt{3}$.

(E) $\Leftrightarrow \quad \tan 3x = \tan\frac{2\pi}{3}$

$\Leftrightarrow \quad 3x = \frac{2\pi}{3} + k\,\pi, k \in \mathbb{Z}$.



Les solutions de (E) sont les nombres réels x de la forme :
$x = \frac{2\pi}{9} + k\,\frac{\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$.

Les images des solutions sont les sommets d'un hexagone régulier inscrit dans le cercle trigonométrique.

4.2. Équations du type : $a\cos x + b\sin x + c = 0$

Exemples

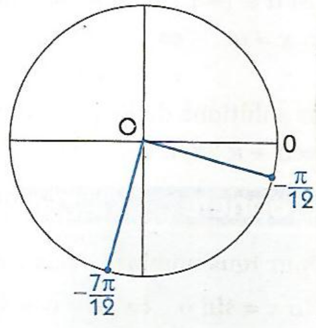
Soit à résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations (E) : $\frac{1}{2}\cos x - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et (H) : $\sqrt{2}\,(\cos x + \sin x) = -1$.

- Dans l'équation (E), on remarque que $\frac{1}{2}$ et $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ sont respectivement égaux à $\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)$ et $\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$.

Donc : (E) $\Leftrightarrow \quad \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)\cos x + \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\Leftrightarrow \quad \cos\left(-\frac{\pi}{3} - x\right) = \cos\frac{\pi}{4}$

$\Leftrightarrow \quad x \equiv -\frac{7\pi}{12}\ [2\pi]$ ou $x \equiv -\frac{\pi}{12}\ [2\pi]$.



Les solutions de (E) sont les nombres réels x de la forme :
$x = -\frac{7\pi}{12} + k\,2\pi, k \in \mathbb{Z}$ ou $x = -\frac{\pi}{12} + k\,2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

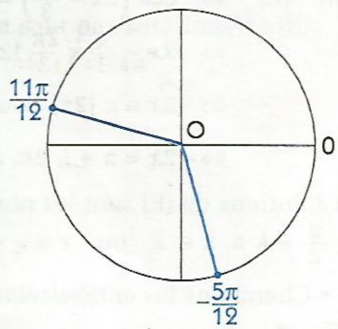
• Pour résoudre de façon analogue l'équation (H), il suffit de diviser les deux membres de l'équation par 2.

On a : (H) $\Leftrightarrow \quad \frac{\sqrt{2}}{2}\cos x + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin x = -\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \quad \cos\frac{\pi}{4}\cos x + \sin\frac{\pi}{4}\sin x = \cos\frac{2\pi}{3}$

$\Leftrightarrow \quad \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \cos\frac{2\pi}{3}$

$\Leftrightarrow \quad x \equiv -\frac{5\pi}{12}\,[2\pi] \quad \text{ou} \quad x \equiv \frac{11\pi}{12}\,[2\pi].$



Les solutions de (H) sont les nombres réels x de la forme :
$x = -\frac{5\pi}{12} + k\,2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ ou $x = \frac{11\pi}{12} + k\,2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

M

Soit à résoudre dans $\mathbb{R}$ une équation du type : $a\cos x + b\sin x + c = 0$.

• Si $a = 0$ ou $b = 0$, on se ramène à une équation du type : $\cos x = a$ ou $\sin x = a$.

• Si $a \neq 0$ et $b \neq 0$, alors $a^2 + b^2 \neq 0$ et on a :

$$a\cos x + b\sin x = \sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x\right);$$

or $\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 = 1$, donc il existe un nombre réel ϕ tel que :

$$\cos\phi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \quad \text{et} \quad \sin\phi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}};$$

on en déduit que : $\quad a\cos x + b\sin x = \sqrt{a^2+b^2}\left(\cos\phi\cos x + \sin\phi\sin x\right)$

$$= \sqrt{a^2+b^2}\cos(x-\phi);$$

on est ainsi ramené à résoudre l'équation : $\cos(x-\phi) = \frac{-c}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

4.3. Autres exemples d'équations trigonométriques

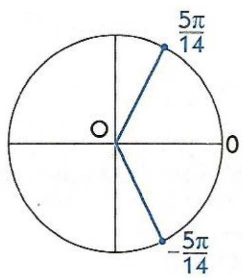
1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation (E) : $\cos x = \sin\frac{\pi}{7}$.

Solution

On sait que : $\sin\frac{\pi}{7} = \cos\frac{5\pi}{14}$, car $\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{5\pi}{14}$.

On a donc : (E) $\Leftrightarrow \quad \cos x = \cos\frac{5\pi}{14}$

$\Leftrightarrow \quad x \equiv \frac{5\pi}{14}\ [2\pi] \quad \text{ou} \quad x \equiv -\frac{5\pi}{14}\ [2\pi].$



Les solutions de (E) sont les nombres réels x de la forme :
$x = \frac{5\pi}{14} + k\,2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ ou $x = -\frac{5\pi}{14} + k\,2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

2. 1°) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation (E) : $\cos 2x + \sqrt{3}\sin 2x = -1$.

Représenter ses solutions sur le cercle trigonométrique.

2°) Donner les solutions de (E) appartenant à l'intervalle $\left]-\frac{3\pi}{2}\,;\,2\pi\right]$.

Solution

1) $\cos 2x + \sqrt{3}\sin 2x = \sqrt{1+3}\left(\frac{1}{2}\cos 2x + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x\right)$

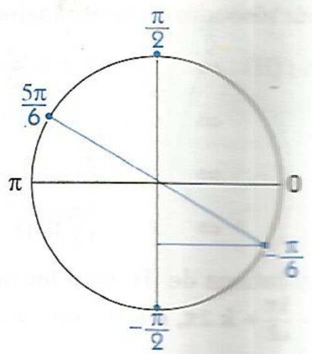
$= 2\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right).$

Donc : (E) $\Leftrightarrow$ $\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow$ $2x-\frac{\pi}{3}\equiv\frac{2\pi}{3}\ [2\pi]$ ou $2x-\frac{\pi}{3}\equiv-\frac{2\pi}{3}\ [2\pi]$

$\Leftrightarrow$ $2x\equiv\pi\ [2\pi]$ ou $2x\equiv-\frac{\pi}{3}\ [2\pi]$

$\Leftrightarrow$ $2x=\pi+k\,2\pi,\ k\in\mathbb{Z}$ ou $2x=-\frac{\pi}{3}+k\,2\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$



Les solutions de (E) sont les nombres réels x de la forme :
$x=\frac{\pi}{2}+k\,\pi,\ k\in\mathbb{Z}$ ou $x=-\frac{\pi}{6}+k\,\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$

2°) • Cherchons les entiers relatifs k tels que : $-\frac{3\pi}{2}<\frac{\pi}{2}+k\,\pi\leq 2\pi$:
$-\frac{3\pi}{2}<\frac{\pi}{2}+k\,\pi\leq 2\pi \Leftrightarrow -2<k\leq\frac{3}{2}$. Trois valeurs de k conviennent -1 ; 0 ; 1 ; il leur correspond les trois solutions suivantes : $-\frac{\pi}{2}$; $\frac{\pi}{2}$; $\frac{3\pi}{2}$.

• Cherchons les entiers relatifs k tels que : $-\frac{3\pi}{2}<-\frac{\pi}{6}+k\,\pi\leq 2\pi$;
$-\frac{3\pi}{2}<-\frac{\pi}{6}+k\,\pi\leq 2\pi \Leftrightarrow -\frac{4}{3}<k\leq\frac{13}{6}$. Quatre valeurs de k conviennent : -1 ; 0 ; 1 ; 2 ; Il leur correspond les quatre solutions suivantes : $-\frac{7\pi}{6}$; $-\frac{\pi}{6}$; $\frac{5\pi}{6}$; $\frac{11\pi}{6}$.

• Les solutions de l'équation (E) appartenant à l'intervalle $\left]-\frac{3\pi}{2}\ ;\ 2\pi\right]$ sont donc :
$-\frac{7\pi}{6}$; $-\frac{\pi}{2}$; $-\frac{\pi}{6}$; $\frac{\pi}{2}$; $\frac{5\pi}{6}$; $\frac{3\pi}{2}$; $\frac{11\pi}{6}$.

3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation (E) : $\tan 2x+\tan\left(x-\frac{3\pi}{4}\right)=0$.

Solution

• *Détermination des contraintes sur l'inconnue*

$2x\neq\frac{\pi}{2}+k\,\pi$ et $x-\frac{3\pi}{4}\neq\frac{\pi}{2}+k\,\pi$ $\Leftrightarrow$ $x\neq\frac{\pi}{4}+k\,\frac{\pi}{2}$ et $x\neq\frac{5\pi}{4}+k\,\pi$

$\Leftrightarrow$ $x\neq\frac{\pi}{4}+k\,\frac{\pi}{2}.$

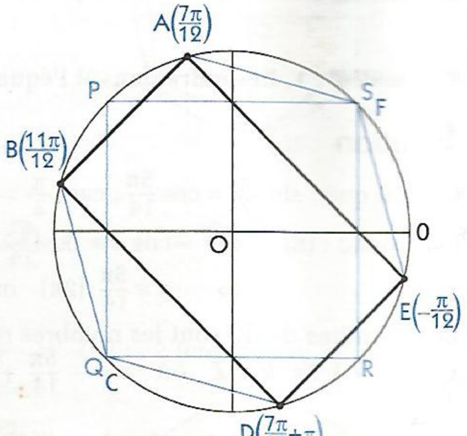
Les images de ces nombres sur le cercle trigonométrique sont les sommets d'un carré PQRS, dont les côtés sont parallèles aux axes du repère (O, I, J).

• *Résolution de (E)*

(E) $\Rightarrow$ $\tan 2x=-\tan\left(x-\frac{3\pi}{4}\right)$

$\Rightarrow$ $\tan 2x=\tan\left(\frac{3\pi}{4}-x\right).$

Donc : $2x=\frac{3\pi}{4}-x+k\,\pi,\ k\in\mathbb{Z}$;
c'est-à-dire : $x=\frac{\pi}{4}+k\,\frac{\pi}{3},\ k\in\mathbb{Z}.$
Les images sur le cercle trigonométrique des nombres réels ainsi trouvés sont les sommets d'un hexagone régulier ABCDEF, dont deux des sommets (C et F) sont sur la première bissectrice du repère (O, I, J).



• *Vérification des contraintes*

Les nombres réels solutions de (E) sont ceux dont les images sur (C) sont les points A, B, D et E, sommets de l'hexagone sans être sommets du carré.

Les solutions de (E) sont donc les nombres réels x de la forme :
$x=\frac{7\pi}{12}+k\,\pi,\ k\in\mathbb{Z}$ ou $x=-\frac{\pi}{12}+k\,\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$

Les images des solutions sont les sommets d'un rectangle inscrit dans le cercle trigonométrique.

4. On considère l'équation (E) : $2\cos x - 3\sin x + 1 = 0$.

1°) Vérifier que les nombres réels x de la forme : $x = \pi + k\,2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ ne sont pas solutions de (E).
2°) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation (E), en utilisant le changement d'inconnue : $t = \tan \frac{x}{2}$.
On donnera les solutions à 10^{-2} près.

Solution

1°) Soit x un nombre réel de la forme : $x = \pi + k\,2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
On a : $\cos x = -1$ et $\sin x = 0$; donc : $2\cos x - 3\sin x + 1 \neq 0$.
2°) Pour toute solution x de (E), d'après la question précédente, $\tan \frac{x}{2}$ est défini.

On a : $\cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$ et $\sin x = \dfrac{2t}{1+t^2}$.

Donc : (E) $\Leftrightarrow 2\left(\dfrac{1-t^2}{1+t^2}\right) - 3\left(\dfrac{2t}{1+t^2}\right) + 1 = 0$

$\Leftrightarrow -t^2 - 6t + 3 = 0$.

Les solutions de cette dernière équation sont : $t_1 = -3 + 2\sqrt{3}$ et $t_2 = -3 - 2\sqrt{3}$.
En utilisant une calculatrice, on trouve que les solutions de (E) sont les nombres réels x de la forme :
$\frac{x}{2} \approx 0{,}43 + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ ou $\frac{x}{2} \approx -1{,}42 + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$,
c'est-à-dire : $x \approx 0{,}86 + k\,2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ ou $x \approx -2{,}84 + k\,2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Exercices

4.a Résoudre, dans l'ensemble indiqué, les équations suivantes :
(dans chaque cas, on représentera les images des solutions sur le cercle trigonométrique)
1. $x \in [-2\pi\,;\,2\pi]$, $2\cos x = \sqrt{2}$;
2. $x \in \mathbb{R}$, $\cos 3x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$;
3. $x \in \mathbb{R}$, $\cos 2x = \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$.

4.b Résoudre, dans l'ensemble indiqué, les équations suivantes :
(dans chaque cas, on représentera les images des solutions sur le cercle trigonométrique)
1. $x \in [-\pi\,;\,3\pi]$, $\sin x = \frac{1}{2}$;
2. $x \in \mathbb{R}$, $\sin 2x = \frac{\sqrt{2}}{2}$;
3. $x \in \mathbb{R}$, $\sin\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right) = \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$.

4.c Résoudre l'équation : $x \in \mathbb{R}$, $\tan 2x = -\sqrt{3}$.

4.d Résoudre l'équation : $x \in \mathbb{R}$, $\cos x + \sqrt{3}\sin x = \sqrt{2}$.

5 Inéquations trigonométriques

Les résolutions d'inéquations seront traitées sous forme d'exercices.
On se limitera aux inéquations simples de type : $\cos x \leq b$ ou $\cos ax \leq b$ (ou sin ou tan).

1. Résoudre l'inéquation (I) : $\sin x > -\frac{1}{2}$
sur les intervalles suivants : ***a)*** **$]-\pi\,;\,\pi]$,** ***b)*** **$[0\,;\,2\pi[$,** ***c)*** **$\mathbb{R}$.**

Solution

Considérons les points M et M' du cercle trigonométrique ayant pour ordonnée $-\frac{1}{2}$.
Les points du cercle trigonométrique ayant une ordonnée strictement supérieure à $-\frac{1}{2}$ sont les points de l'arc $\overset{\frown}{MM'}$, M et M' étant exclus.

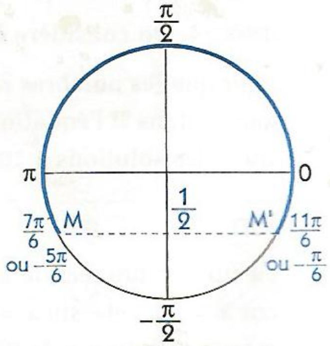
a) Dans $]-\pi\,;\pi]$, M et M' sont les images respectives de $-\frac{5\pi}{6}$ et $-\frac{\pi}{6}$, donc l'ensemble des solutions de (I) est :

$$\left]-\pi\,;-\frac{5\pi}{6}\right[\ \cup\ \left]-\frac{\pi}{6}\,;\pi\right].$$

b) Dans $[0\,;2\pi[$, M et M' sont les images respectives de $\frac{7\pi}{6}$ et $\frac{11\pi}{6}$, donc l'ensemble des solutions de (I) est :

$$\left[0\,;\frac{7\pi}{6}\right[\ \cup\ \left]\frac{11\pi}{6}\,;2\pi\right[.$$

c) Dans $\mathbb{R}$, l'ensemble des solutions de (I) est la réunion des intervalles de la forme : $\left]-\frac{\pi}{6}+k\,2\pi\,;\frac{7\pi}{6}+k\,2\pi\right[$, $k\in\mathbb{Z}$.



2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation (I) : $\cos 2x \geq \frac{1}{2}$. On représentera l'ensemble des solutions appartenant à l'intervalle $]-\pi\,;\pi]$ sur le cercle trigonométrique.

Solution

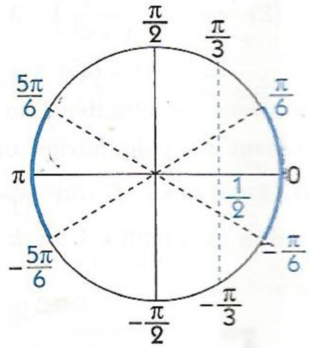
Posons : $X = 2x$. L'inéquation $\cos X \geq \frac{1}{2}$ admet comme ensemble de solutions dans $\mathbb{R}$ la réunion des intervalles de la forme :

$$\left[-\frac{\pi}{3}+2k\pi\,;\frac{\pi}{3}+2k\pi\right],\ k\in\mathbb{Z}.$$

On a donc : $-\frac{\pi}{3}+2k\pi \leq 2x \leq \frac{\pi}{3}+2k\pi$.

D'où : $-\frac{\pi}{6}+k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{6}+k\pi$.

L'ensemble des solutions de (I) est donc la réunion des intervalles de la forme : $\left[-\frac{\pi}{6}+k\pi\,;\frac{\pi}{6}+k\pi\right]$, $k\in\mathbb{Z}$.



3. Résoudre dans $]-\pi\,;\pi]$ l'inéquation (I) : $\tan x < 1$.
On représentera l'ensemble des solutions sur le cercle trigonométrique.

Solution

Contraintes sur l'inconnue : $x \neq -\frac{\pi}{2}$ et $x \neq \frac{\pi}{2}$.

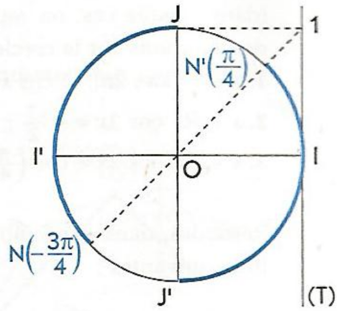
Dans $]-\pi\,;\pi]$, $\tan x = 1 \iff x = -\frac{3\pi}{4}$ ou $x = \frac{\pi}{4}$.

Désignons par N et N' les images respectives sur (C) de $-\frac{3\pi}{4}$ et $\frac{\pi}{4}$.

Les points M du cercle trigonométrique tels que (OM) coupe (T) en un point d'abscisse strictement inférieure à 1 sont les points des arcs $\widehat{JN}$ et $\widehat{J'N'}$, J, N, J' et N' étant exclus.

Dans $]-\pi\,;\pi]$, l'ensemble des solutions de (I) est donc :

$$\left]-\pi\,;-\frac{3\pi}{4}\right[\ \cup\ \left]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{4}\right[\ \cup\ \left]\frac{\pi}{2}\,;\pi\right].$$



Exercices

5.a Résoudre, dans $\mathbb{R}$, l'inéquation :
$2\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+\sqrt{3}<0$.
(On représentera l'ensemble des solutions sur le cercle trigonométrique.)

5.b Résoudre, dans $]-\pi\,;\pi]$, l'inéquation :
$2\sin^2 x-\sqrt{3}\sin x \geq 0$.
(On représentera l'ensemble des solutions sur le cercle trigonométrique.)

5.c Résoudre, dans $\mathbb{R}$, l'inéquation :
$\sqrt{3}\tan x+1<0$.
(On représentera l'ensemble des solutions sur le cercle trigonométrique.)

5.d Résoudre, dans $\mathbb{R}$, l'inéquation :
$\tan(3x)+1 \leq 0$.
(On représentera l'ensemble des solutions sur le cercle trigonométrique.)

Exercices

APPRENTISSAGE

Angles orientés

1 A et B sont deux points distincts du plan. Représenter l'ensemble des points M du plan dans chacun des cas suivants :

a) $\frac{13\pi}{6}$ est une mesure de $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM})$;

b) $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM})$ a pour mesure principale $-\frac{\pi}{3}$;

c) $(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB})$ est l'angle nul ;

d) $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})$ est l'angle plat.

2 A, B, C sont des points tels que : $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ et $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC})$ ont respectivement pour mesures principales $\frac{\pi}{5}$ et $-\frac{\pi}{6}$.
Déterminer une mesure des angles :
$(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{AC})$; $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})$; $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{CA})$.

3 PQR est un triangle tel que les angles $(\overrightarrow{QR}, \overrightarrow{QP})$ et $(\overrightarrow{PR}, \overrightarrow{QP})$ ont respectivement pour mesures $-\frac{9\pi}{5}$ et $\frac{22\pi}{5}$.
Démontrer que le triangle PQR est isocèle.

4 ABC est un triangle équilatéral de centre S tel que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ ait pour mesure principale $\frac{\pi}{3}$.
Déterminer, en radian et en degré, les mesures principales des angles orientés :
$(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA})$; $(\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{SB})$; $(\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{BC})$; $(\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{CA})$; $(\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{AB})$.

5 ABCDE est un pentagone régulier de sens direct et de centre S. Déterminer, en radian et en degré, les mesures principales des angles orientés :
$(\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{SB})$; $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AE})$; $(\overrightarrow{BE}, \overrightarrow{BA})$; $(\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{BA})$; $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{DA})$.

6 ABC est un triangle non rectangle inscrit dans un cercle (Γ). D est le point d'intersection des tangentes à (Γ) en B et C. Soit α une mesure de l'angle $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.
Déterminer, en fonction de α, une mesure de l'angle $(\overrightarrow{DB}, \overrightarrow{DC})$.

7 Le plan est muni du repère orthonormé direct (O, I, J). Déterminer les coordonnées des points A et B tels que :
- OA = 3 et OB = 5 ;
- $\frac{\pi}{6}$ et $-\frac{\pi}{4}$ soient respectivement des mesures en radian des angles $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OA})$ et $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OB})$.

Trigonométrie

8 **1.** Calculer $\cos x$ et $\tan x$, sachant que : $\sin x = \frac{\sqrt{5}}{5}$ et $x \in \left]\frac{\pi}{2} ; \pi\right[$.
2. Calculer $\cos x$, $\sin x$ et $\tan x$, sachant que : $\cos(5\pi - x) = \frac{4}{5}$ et $x \in]0 ; \pi[$;
3. Calculer $\sin x$, $\cos x$ et $\tan x$, sachant que : $\sin(-x) = \frac{2}{\sqrt{13}}$ et $x \in \left]-\frac{\pi}{2} ; \pi\right[$.

9 Démontrer que pour tout nombre réel x, on a :
- $(\cos x + \sin x)^2 - (\cos x - \sin x)^2 = 4 \cos x \sin x$;
- $(1 + \cos x + \sin x)^2 = 2(1 + \sin x)(1 + \cos x)$;
- $\sin^4 x + \cos^4 x = 1 - 2\sin^2 x \cos^2 x$;
- $\sin^6 x + \cos^6 x = 1 - 3\sin^2 x \cos^2 x$.

(On pourra remarquer que, pour tous nombres réels a et b : $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.)

10 **1.** Pour tout nombre réel x, démontrer que : $(\cos x + \sin x)^2 + (\cos x - \sin x)^2 = 2$.
2. Calculer $\cos x$ et $\sin x$, dans chacun des cas suivants :
a) $\cos x - \sin x = -1$;
b) $\cos x - \sin x = \frac{1}{2}$.

Angles associés

11 Calculer, en fonction de $\cos x$ et $\sin x$, les expressions suivantes :
$A = \cos(\pi + x) + \cos(\pi - x) + \cos(-x)$;
$B = \sin(\pi + x) + \sin(\pi - x) + \sin(-x)$;
$C = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) + \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \cos\left(x - \frac{3\pi}{2}\right)$;
$D = \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + 2\sin\left(x + \frac{3\pi}{2}\right) + \sin\left(x + \frac{5\pi}{2}\right)$.

12 Démontrer que, pour tout nombre réel x :
$\sin x = \sin\left(\frac{\pi}{3} + x\right) - \sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right)$;
$\cos x = \cos\left(\frac{\pi}{3} + x\right) + \cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right)$.

Formules de trigonométrie

13 En remarquant que $\frac{\pi}{4} = 2 \times \frac{\pi}{8}$, démontrer que :
$\cos\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}$ et $\sin\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}$.
En remarquant que $\frac{3\pi}{8} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8}$, calculer $\cos\frac{3\pi}{8}$ et $\sin\frac{3\pi}{8}$.

14 **1.** Écrire $\cos 3x$ en fonction de $\cos x$, $\sin 3x$ en fonction de $\sin x$.
2. En déduire que : $\tan 3x = \tan x \; \frac{3 - \tan^2 x}{1 - 3\tan^2 x}$.

15 **1.** Calculer :
$A = \cos\frac{\pi}{12}\cos\frac{5\pi}{12} + \sin\frac{\pi}{12}\sin\frac{5\pi}{12}$;
$B = \cos\frac{\pi}{12}\cos\frac{5\pi}{12} - \sin\frac{\pi}{12}\sin\frac{5\pi}{12}$.
2. En déduire que : $\sin\frac{\pi}{12}\sin\frac{5\pi}{12} = \cos\frac{\pi}{12}\cos\frac{5\pi}{12} = \frac{1}{4}$.

16 Démontrer que pour tout élément x de $[0 ; \frac{\pi}{2}]$, on a : $\sqrt{1 + \sin 4x} = |\sin 2x + \cos 2x|$.

17 Calculer $\cos x$ et $\sin x$ dans chacun des cas :

a) $\cos 2x = -\frac{1}{2}$ et $x \in [0 ; \frac{\pi}{2}]$;

b) $\cos 2x = \frac{7}{25}$ et $x \in [\frac{\pi}{2} ; \pi]$;

c) $\cos 2x = -\frac{7}{9}$ et $x \in [-\pi ; -\frac{\pi}{2}]$;

d) $\cos 2x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $x \in [-\frac{\pi}{2} ; 0]$.

18 Calculer $\sin 2x$ et $\cos 2x$ dans chacun des cas :

a) $\sin x = \frac{1}{3}$ et $x \in [-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}]$;

b) $\cos x = -\frac{3}{5}$ et $x \in [\pi ; \frac{3\pi}{2}]$;

c) $\tan x = -3$ et $x \in [-\frac{\pi}{2} ; 0]$.

19 Calculer :

$A = \cos^2 \frac{\pi}{8} + \cos^2 \frac{3\pi}{8} + \cos^2 \frac{5\pi}{8} + \cos^2 \frac{7\pi}{8}$;

$B = \sin^2 \frac{\pi}{8} + \sin^2 \frac{3\pi}{8} + \sin^2 \frac{5\pi}{8} + \sin^2 \frac{7\pi}{8}$.

(On pourra d'abord calculer A + B et A – B.)

20 Démontrer que : $16 \sin \frac{\pi}{24} \sin \frac{5\pi}{24} \sin \frac{7\pi}{24} \sin \frac{11\pi}{24} = 1$.

Équations trigonométriques

21 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes et représenter les images de leurs solutions sur le cercle trigonométrique :

a) $\sin\left(3x + \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{2\pi}{3} - x\right)$;

b) $\sin 3x = \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$;

c) $\sin\left(-x + \frac{3\pi}{2}\right) + \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = 0$;

d) $\cos\left(-x + \frac{\pi}{3}\right) + \cos 3x = 0$.

22 Résoudre dans $\mathbb{R}$, à l'aide d'un changement d'inconnue, les équations suivantes et représenter les images de leurs solutions sur le cercle trigonométrique :

a) $-2\cos^2 x + \cos x + 6 = 0$;

b) $\sin^2 2x - \sqrt{3} \sin 2x + \frac{3}{4} = 0$.

23 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes et représenter les images de leurs solutions sur le cercle trigonométrique :

a) $\cos^2\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) - \cos^2\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 0$;

b) $4\cos^2 x + 3\sin^2 2x = 0$;

c) $2\cos 2x + 4\cos x - 1 = 0$;

d) $\sin 2x - 2\sin x \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 0$.

24 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes et représenter les images de leurs solutions sur le cercle trigonométrique :

a) $3\cos x - \sqrt{3}\sin x + \sqrt{6} = 0$;

b) $\cos 2x - \sin 2x = -1$.

25 Résoudre dans D les équations suivantes :

a) $\tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - \tan\left(2x + \frac{\pi}{8}\right) = 0$, $D = \mathbb{R}$;

b) $3\tan^2 x - 1 = 0$, $D =]-\pi ; \pi[$;

c) $\tan^2 x + (1 + \sqrt{3}) \tan x + \sqrt{3} = 0$, $D = [0 ; 2\pi[$.

Inéquations trigonométriques

26 Résoudre dans D les inéquations suivantes et représenter les images de leurs solutions sur le cercle trigonométrique :

a) $\cos x < -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $D = \mathbb{R}$;

b) $\sqrt{2}\sin\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) - 1 \leq 0$, $D = [0 ; 2\pi[$;

c) $\sin x - \cos x \leq 0$, $D = \mathbb{R}$.

27 Résoudre dans D les systèmes d'inéquations suivants et représenter les images de leurs solutions sur le cercle trigonométrique :

a) $\begin{cases} \sin x \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 2\sin x + 1 \geq 0 \end{cases}$, $D = [0 ; 2\pi[$;

b) $\begin{cases} \sin x < \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \cos x \geq -\frac{1}{2} \end{cases}$, $D = \mathbb{R}$;

c) $\begin{cases} \sin 2x < \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \cos 2x \geq -\frac{1}{2} \end{cases}$, $D = \mathbb{R}$.

28 Résoudre dans D les inéquations suivantes et représenter les images de leurs solutions sur le cercle trigonométrique :

a) $\frac{1 - 2\cos x}{2\sin x - \sqrt{3}} \geq 0$, $D =]-\pi ; \pi]$;

b) $\frac{2\cos 2x - 1}{1 + 2\cos 2x} < 0$, $D = [0 ; 2\pi[$.

29 Résoudre dans D les inéquations suivantes et représenter les images de leurs solutions sur le cercle trigonométrique :

a) $\sin^2 x - \frac{1}{2} \leq 0$, $D =]-\pi ; \pi]$;

b) $\cos x\,(2\sin x - 1) \leq 0$, $D =]-\pi ; \pi]$;

c) $2\cos^2 x + \sqrt{3}\cos x \geq 0$, $D = [0 ; 2\pi[$;

d) $4\sin^2 x + 2(\sqrt{2} - 1)\sin x - \sqrt{2} \leq 0$, $D = [0 ; 2\pi[$.

30 Résoudre dans D les inéquations suivantes et représenter les images de leurs solutions sur le cercle trigonométrique :

a) $\tan\left(x - \frac{\pi}{6}\right) \geq 0$, $D = \mathbb{R}$;

b) $|\tan x| \geq 1$, $D = \mathbb{R}$.

APPROFONDISSEMENT

31 On considère deux parallélogrammes ABCD et AECF. Démontrer que : $(\overrightarrow{EA}, \overrightarrow{EB}) = (\overrightarrow{FC}, \overrightarrow{FD})$.

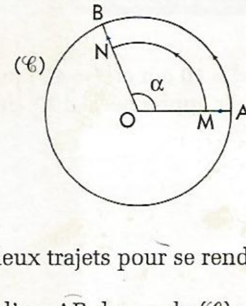
32 **1.** A, B, C, D et E sont des points tels que :
AB = AC = 1, AD = 2, AE = 3 ;
$\frac{25\pi}{12}$, $\frac{119\pi}{4}$, $-\frac{85\pi}{6}$ sont des mesures respectives des angles $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$, $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$, $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AE})$.
Démontrer que les points A, D, E sont alignés ; calculer DE.
2. a, b, c sont trois nombres réels et A, B, C, D, E des points tels que :
AB = AC = 1, AD = 2, AE = 3 ;
a, b, c sont des mesures respectives des angles $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$, $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$, $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AE})$.
Déterminer une relation entre a, b et c pour que les points A, D et E soient alignés.
Calculer DE. *(On distinguera deux cas.)*

33 Soit [AB] et [CD] deux cordes à supports parallèles d'un cercle $(\mathscr{C})$ de centre O.
1. Démontrer que :
$(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}) = (\overrightarrow{OD}, \overrightarrow{OB})$ et $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OD}) = (\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OB})$.
2. On suppose que le triangle OAC est équilatéral. Préciser la nature du triangle OBD.

34 ABC est un triangle tel que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ a pour mesure principale $\frac{2\pi}{3}$.
Déterminer les points D tels que :
$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 4\,(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$ et AB = AD.

35 ABC est un triangle équilatéral de sens direct inscrit dans un cercle $(\mathscr{C})$ de centre O.
P, Q, R sont trois points distincts de $(\mathscr{C})$.
Démontrer que le triangle PQR est équilatéral de sens direct si et seulement si :
$(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OP}) = (\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OQ}) = (\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OR})$.

36 **Propriétés d'un angle de mesure 2 radians**
Soit $(\mathscr{C})$ un cercle de centre O et de rayon R.
1. Déterminer la mesure en radian, de l'angle au centre d'un secteur de $(\mathscr{C})$ dont l'aire est égale à celle d'un carré de côté R.
2. Soit A et B deux points de $(\mathscr{C})$. On considère le secteur de $(\mathscr{C})$, dont l'angle au centre AOB a pour mesure α, en radian.
M et N sont deux points tels que :
M ∈ [OA], N ∈ [OB] et OM = ON.

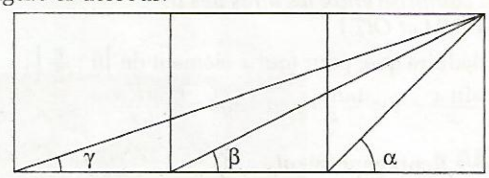


On considère deux trajets pour se rendre du point A au point B :
T_1 : en suivant l'arc AB du cercle $(\mathscr{C})$;
T_2 : en passant par M et N et en suivant l'arc $\overset{\frown}{MN}$ du cercle de centre O et de rayon OM.
Déterminer α pour que ces deux trajets aient même longueur, quels que soient les positions des points M et N sur les segments [OA] et [OB].

37 **1.** En remarquant que $\sin 5x = \sin(4x + x)$, démontrer que : $\sin 5x = 16\sin^5 x - 20\sin^3 x + 5\sin x$.
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $\sin 5x = 0$; vérifier que $\frac{\pi}{5}$ et $\frac{2\pi}{5}$ sont des solutions de cette équation.
3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $16X^5 - 20X^3 + 5X = 0$.
4. Déduire des questions précédentes les valeurs de $\sin\frac{\pi}{5}$ et $\sin\frac{2\pi}{5}$.

38 **1.** x étant un nombre réel, démontrer que :
$\cos 5x = \cos x\,(16\cos^4 x - 20\cos^2 x + 5)$;
$(1 - \cos x)(4\cos^2 x + 2\cos x - 1)^2 = 1 - \cos 5x$.
2. *a)* Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $\cos 5x = 1$.
b) Déduire des questions précédentes les valeurs de $\cos\frac{2\pi}{5}$, $\cos\frac{4\pi}{5}$ et $\cos\frac{\pi}{5}$.

39 On considère trois carrés disposés comme dans la figure ci-dessous.



Calculer $\cos(\beta + \gamma)$; en déduire que : $\alpha = \beta + \gamma$.

40 a et b sont deux nombres réels donnés non tous nuls et t un nombre réel variable.
1. Justifier l'existence de deux nombres réels r et φ, tels que : $a = r\cos\varphi$ et $b = r\sin\varphi$.
2. *a)* Résoudre le système d'équations :

$$(x\,;\,y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R},\ \begin{cases} x\cos t + y\sin t = a \\ -x\sin t + y\cos t = b \end{cases}$$

b) Démontrer que les solutions du système sont :

$$\begin{cases} x = r\cos(t + \varphi) \\ y = r\sin(t + \varphi). \end{cases}$$

c) Soit $(x\,;\,y)$ une solution de l'équation précédente et M le point de coordonnées $\binom{x}{y}$ dans un repère orthonormé.
Démontrer que lorsque t décrit $\mathbb{R}$, le lieu du point M est inclus dans un cercle que l'on déterminera. Préciser ce cercle pour $a^2 + b^2 = 4$.

41 x et y étant deux nombres réels de l'intervalle $[0\,;\,\pi]$, on considère le système d'équations (S) :

$$\begin{cases} \cos x\cos y = \frac{\sqrt{3}+1}{4} \\ \sin x\sin y = \frac{\sqrt{3}-1}{4}. \end{cases}$$

1. Démontrer que le système (S) est équivalent au système suivant :

$$\begin{cases} \cos(x + y) = \frac{1}{2} \\ \cos(x - y) = \frac{\sqrt{3}}{2}. \end{cases}$$

2. Résoudre (S).

42 **1.** *a)* Vérifier que : $\sqrt{3 + 2\sqrt{2}} = 1 + \sqrt{2}$.
b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :

$2X^2 + (1 - \sqrt{2})X - \frac{\sqrt{2}}{2} = 0.$

c) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation :

$2X^2 + (1 - \sqrt{2})X - \frac{\sqrt{2}}{2} > 0.$

2. Déduire de la question 1.b la résolution dans $\mathbb{R}$ de l'équation : $2\cos^2 x + (1 - \sqrt{2})\cos x - \frac{\sqrt{2}}{2} = 0.$

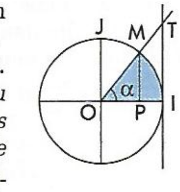
Représenter sur le cercle trigonométrique les images des solutions de cette équation.

3. Déduire de la question 1-c) la résolution dans l'intervalle $]-\pi\,;\,\pi]$ de l'inéquation :

$2\cos^2 x + (1 - \sqrt{2})\cos x - \frac{\sqrt{2}}{2} > 0.$

Représenter sur le cercle trigonométrique les images des solutions de cette inéquation.

43 α est un nombre réel appartenant à l'intervalle $\left]0\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$ et M son image sur le cercle trigonométrique.

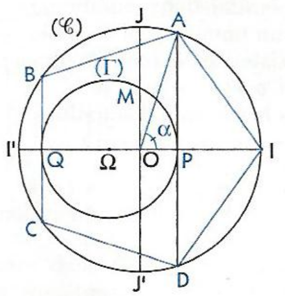


1. Démontrer que : $\sin\alpha \leq \alpha \leq \tan\alpha$.
(On pourra remarquer que l'aire du secteur circulaire délimité par les segments [OI], [OM] et l'arc de cercle $\widehat{IM}$ est comprise entre les aires des triangles OIM et OIT.)

2. En déduire que, pour tout x élément de $\left]0\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$,
on a : $\frac{\sin x}{x} < 1 < \frac{\tan x}{x}$ et $\cos x < \frac{\sin x}{x}$.

44 Pentagone régulier

Voici un programme de construction du pentagone régulier.



• (𝒞) est le cercle trigonométrique ; on considère les points $\Omega\begin{pmatrix}-\frac{1}{4}\\0\end{pmatrix}$ et $M\begin{pmatrix}0\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}$.

• Le cercle (Γ) de centre Ω et passant par M coupe le segment [I'I] en P et Q.

• Les tangentes à (Γ) en P et Q coupent (𝒞) en A, D et B, C.

On se propose de démontrer que IABCD est un pentagone régulier.

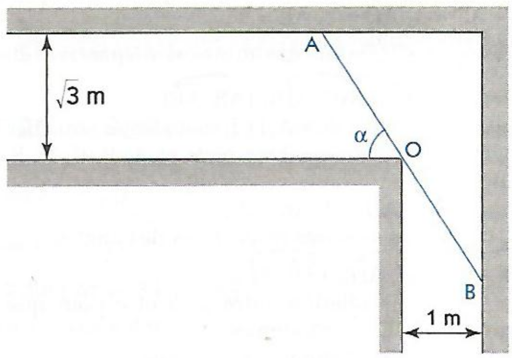
1. Soit α une mesure de l'angle $(\widehat{\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OA}})$.
Calculer $\cos\alpha$, puis $\cos 2\alpha$.

2. Soit β une mesure de l'angle $(\widehat{\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OB}})$.
Calculer $\cos\beta$ et en déduire que $\widehat{\beta} = 2\,\widehat{\alpha}$.

3. Soit γ une mesure de l'angle $(\widehat{\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OQ}})$.
Calculer $\cos\gamma$, puis $\cos 2\gamma$.

En déduire que $(\widehat{\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}}) = (\widehat{\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OA}})$.
Conclure.

45 Un couloir, de largeur $\sqrt{3}$ mètres, tourne à angle droit et sa largeur n'est plus alors que de 1 mètre.



Sur la figure, une droite passe par O, fait avec l'un des murs un angle α et coupe deux autres murs en A et B.

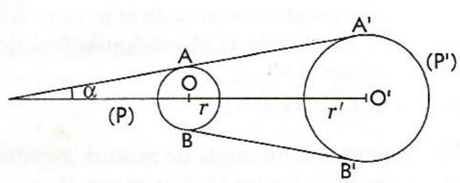
1. Exprimer, en fonction de α, les longueurs OA, OB et AB.

2. On pose : $AB = f(\alpha)$.

Démontrer que : $f(\alpha) = \dfrac{4\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right)}{\sin 2\alpha}$.

3. *a)* Déterminer α pour que : AB = 4.
b) Déterminer α pour que : OA = OB.

46 Une chaîne de vélo s'enroule autour d'un pignon (P) de centre O et de rayon r et d'un pédalier (P') de centre O' et de rayon r'. On pose : $OO' = d$.
Soit α la mesure en radian de l'angle que fait (OO') avec (AA'), tangente commune extérieure à (P) et (P').



1. Calculer $\sin\alpha$, puis $\cos 2\alpha$, en fonction de d, r et r'.

2. On se propose de calculer la longueur L de la chaîne.
Soit A et B (respectivement A' et B') les points de contact de la chaîne avec (P) (respectivement (P')).
a) Calculer AA' en fonction de d et α.
b) Calculer, en fonction de α, r et r', la longueur des arcs $\widehat{AB}$ et $\widehat{A'B'}$ où la chaîne est en contact avec (P) ou (P').
c) En déduire, en fonction de α, d, r et r', la longueur L de la chaîne.

3. ***Application***

On a : $r = 5$ cm, $r' = 10$ cm et $d = 45$ cm.
Calculer une valeur approchée à 10^{-2} près de α et de L.

3 Géométrie analytique du plan

Introduction

Dans les classes précédentes, nous avons étudié les équations cartésiennes de droites du plan et de cercles. L'objectif de ce chapitre est de compléter ces notions à l'aide de l'orthogonalité, du produit scalaire et de la trigonométrie. Nous étudierons en particulier les équations normales d'une droite, la distance d'un point à une droite, les représentations paramétriques d'un cercle et les tangentes à un cercle.

Photo Hachette

René Descartes (1596 - 1650), mathématicien, physicien et philosophe français
(Peinture de Frans Hals.)

SOMMAIRE

Dans tout ce chapitre, le plan est muni du repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1 Orthogonalité et droites du plan

1.1. Droite définie par un point et un vecteur normal

On sait que, pour tout point A et tout vecteur non nul $\vec{n}$, il existe une et une seule droite passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$.

Cette droite est l'ensemble des points M du plan tels que : $\overrightarrow{AM} \perp \vec{n}$.

Équation cartésienne d'une droite

Propriétés

Soit a et b deux nombres réels tels que $(a,b) \neq (0,0)$.

• Pour tout nombre réel c, la droite d'équation cartésienne $ax + by + c = 0$ admet $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ pour vecteur normal.

• Réciproquement, toute droite de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ admet une équation cartésienne de la forme : $ax + by + c = 0$, où $c \in \mathbb{R}$.

Démonstration

• La droite d'équation $ax + by + c = 0$ admet $\vec{u}\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ pour vecteur directeur.

On a : $\vec{u}.\vec{n} = 0$. Donc $\vec{n}$ est un vecteur normal à cette droite.

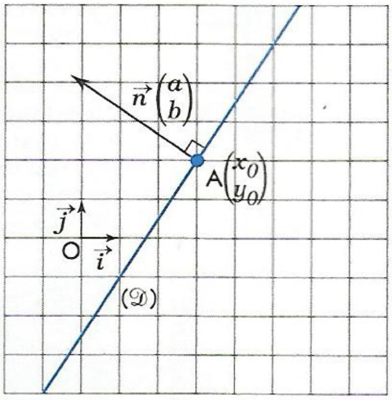
• Soit $M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ un point du plan et $(\mathscr{D})$ une droite de vecteur normal $\vec{n}$.

On désigne par $(x_0 ; y_0)$ les coordonnées d'un point A de $(\mathscr{D})$.

On a : $M \in (\mathscr{D}) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\vec{n} = 0$

$\Leftrightarrow a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$.

$(\mathscr{D})$ admet donc une équation cartésienne de la forme : $ax + by + c = 0$, où $c = -(ax_0 + by_0)$.



Exemples

• La droite d'équation $y = mx + p$ admet $\vec{n}\begin{pmatrix} m \\ -1 \end{pmatrix}$ pour vecteur normal.

• Soit $(\mathscr{D})$ la droite d'équation cartésienne $2x - 3y + 4 = 0$. On se propose de déterminer une équation cartésienne de la droite (Δ) perpendiculaire à $(\mathscr{D})$ et passant par le point $A\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

$\vec{u}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, vecteur directeur de $(\mathscr{D})$, est un vecteur normal à la droite (Δ).

Soit $M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. On a : $M \in (\Delta) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\vec{u} = 0$

$\Leftrightarrow 3(x + 1) + 2(y - 2) = 0$

$\Leftrightarrow 3x + 2y - 1 = 0$.

• On considère les points $A\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. On se propose de déterminer une équation cartésienne de la médiatrice du segment [AB].

La médiatrice de [AB] est une droite de vecteur normal $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$; elle admet donc une équation de la forme : $4x - 2y + c = 0$. Elle passe par $I\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$, milieu de [AB] ; donc : $4 \times (-1) - 2 \times 3 + c = 0$.

Une équation cartésienne de cette droite est : $4x - 2y + 10 = 0$.

Parallélisme et orthogonalité de droites

Propriétés

Soit $(\mathscr{D})$ et $(\mathscr{D}')$ deux droites d'équations cartésiennes respectives $ax + by + c = 0$ et $a'x + b'y + c' = 0$.

(1) $(\mathscr{D}) /\!/ (\mathscr{D}') \Leftrightarrow ab' - a'b = 0$; (2) $(\mathscr{D}) \perp (\mathscr{D}') \Leftrightarrow aa' + bb' = 0$.

Démonstration

Les droites $(\mathscr{D})$ et $(\mathscr{D}')$ admettent $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ et $\vec{n}'\begin{pmatrix}a'\\b'\end{pmatrix}$ pour vecteurs normaux respectifs.

(1) $(\mathscr{D}) /\!/ (\mathscr{D}') \Leftrightarrow \vec{n}$ et $\vec{n}'$ colinéaires
$\Leftrightarrow \det(\vec{n}, \vec{n}') = 0$
$\Leftrightarrow ab' - a'b = 0.$

(2) $(\mathscr{D}) \perp (\mathscr{D}') \Leftrightarrow \vec{n} \perp \vec{n}'$
$\Leftrightarrow \vec{n}.\vec{n}' = 0$
$\Leftrightarrow aa' + bb' = 0.$

Remarques

- *Les propriétés (1) et (2) peuvent s'établir à l'aide des vecteurs directeurs respectifs $\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$ et $\vec{u}'\begin{pmatrix}-b'\\a'\end{pmatrix}$ de $(\mathscr{D})$ et $(\mathscr{D}')$.*
- *La propriété (1) est vraie dans un repère quelconque.*

Par contre, la propriété (2) n'est vraie que dans un repère orthonormé.

1.2. Équation normale d'une droite

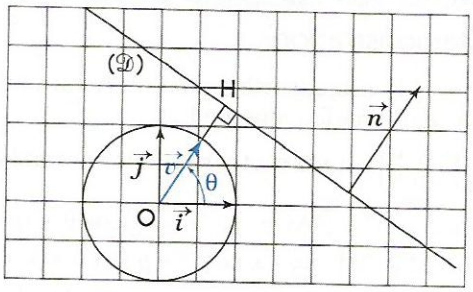
Introduction

Soit $(\mathscr{D})$ une droite, $\vec{n}$ un vecteur normal à $(\mathscr{D})$ et θ une mesure de l'angle orienté $(\widehat{\vec{i}, \vec{n}})$.

On considère le vecteur $\vec{v}$ tel que : $\vec{v} = \dfrac{\vec{n}}{\|\vec{n}\|}$.

$\vec{v}$ est un vecteur unitaire colinéaire à $\vec{n}$, donc $\vec{v}\begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{pmatrix}$.

$\vec{v}$ est un vecteur normal à $(\mathscr{D})$, donc $(\mathscr{D})$ admet une équation de la forme : $x\cos\theta + y\sin\theta + k = 0$.



Propriété

Soit $(\mathscr{D})$ une droite, $\vec{n}$ un vecteur normal à $(\mathscr{D})$ et θ une mesure de l'angle orienté $(\widehat{\vec{i}, \vec{n}})$.
$(\mathscr{D})$ admet une équation cartésienne de la forme : $x\cos\theta + y\sin\theta + k = 0$.

Cette équation est appelée équation normale de $(\mathscr{D})$.

Remarque

Toute droite $(\mathscr{D})$ admet deux équations normales. En effet, il existe deux vecteurs unitaires opposés, normaux à $(\mathscr{D})$, qui font avec $\vec{i}$ des angles de mesures respectives θ et $\theta + \pi$.
Les équations normales correspondantes à ces deux valeurs sont :
$x\cos\theta + y\sin\theta + k = 0$ et $x\cos(\theta + \pi) + y\sin(\theta + \pi) - k = 0$.

Exemples

- Soit $(\mathscr{D})$ la droite passant par le point $A\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\ \sqrt{3}\end{pmatrix}$.

$\vec{v}\begin{pmatrix}-\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{1}{2}\end{pmatrix}$ est un vecteur unitaire normal à cette droite.

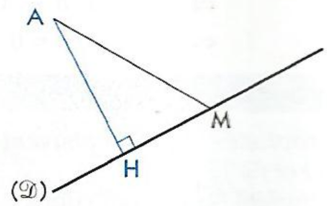
$(\mathscr{D})$ admet pour équation normale : $-\frac{\sqrt{3}}{2}(x+2)+\frac{1}{2}(y-3)=0 \Leftrightarrow -\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{1}{2}y-\frac{2\sqrt{3}+3}{2}=0.$

• Soit $(\mathscr{D}')$ la droite d'équation $3x-4y+10=0$.

Les équations normales de $(\mathscr{D}')$ sont : $\frac{3}{5}x-\frac{4}{5}y+2=0$ et $-\frac{3}{5}x+\frac{4}{5}y-2=0$.

M Pour obtenir une équation normale d'une droite ayant pour équation cartésienne $ax+by+c=0$, il suffit de diviser les deux membres de cette équation par la norme du vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$.
On obtient : $\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}x+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}y+\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}=0.$

Distance d'un point à une droite



Soit $(\mathscr{D})$ une droite, A un point du plan et H le projeté orthogonal de A sur $(\mathscr{D})$.

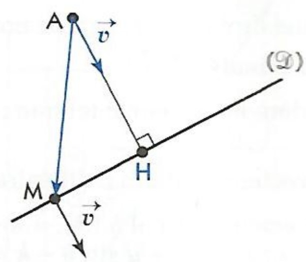
Pour tout point M de $(\mathscr{D})$, on a : $AH \leq AM$.

AH est appelée distance de A à $(\mathscr{D})$ et notée $d(A,\mathscr{D})$.

Propriété 1

Soit $A\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}$ un point du plan et $(\mathscr{D})$ une droite d'équation normale $x\cos\theta+y\sin\theta+k=0$.
On a : $d(A,\mathscr{D})=|x_0\cos\theta+y_0\sin\theta+k|$.

Démonstration



Soit H le projeté orthogonal de A sur la droite $(\mathscr{D})$ et $M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ un point quelconque de $(\mathscr{D})$.
$\vec{v}\begin{pmatrix}\cos\theta\\\sin\theta\end{pmatrix}$ est un vecteur unitaire normal à $(\mathscr{D})$;

donc : $AH=|\overrightarrow{AM}.\vec{v}|=|(x-x_0)\cos\theta+(y-y_0)\sin\theta|$.
Or : $M\in(\mathscr{D}) \Leftrightarrow x\cos\theta+y\sin\theta+k=0$.
Donc : $d(A,\mathscr{D})=|x_0\cos\theta+y_0\sin\theta+k|$.

Remarque

Cette propriété permet de donner une interprétation géométrique du nombre réel k : $|k|=d(O,\mathscr{D})$.

Propriété 2

Soit $A\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}$ un point du plan et $(\mathscr{D})$ une droite d'équation cartésienne $ax+by+c=0$.
On a : $d(A,\mathscr{D})=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

Démonstration

La droite $(\mathscr{D})$ admet pour équation normale : $\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}x+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}y+\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}=0.$

En appliquant le résultat de la propriété précédente, on a : $d(A,\mathscr{D})=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

Exemple

On considère les points $A\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}-\frac{3}{2}\\-\frac{3}{2}\end{pmatrix}$ et $C\begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}$.

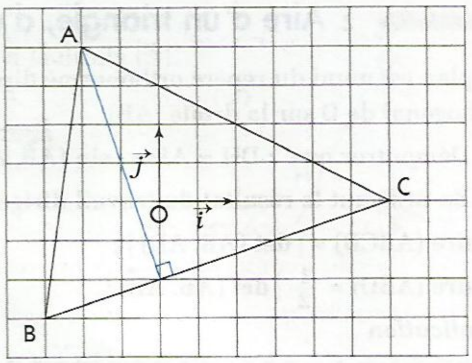
On se propose de calculer la distance du point A à la droite (BC).

La droite (BC) a pour vecteur directeur $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}\frac{9}{2}\\\frac{3}{2}\end{pmatrix}$.

Une équation cartésienne de (BC) est donc :

$\frac{3}{2}(x-3) - \frac{9}{2}y = 0 \iff x - 3y - 3 = 0.$

Donc : $d(A,(BC)) = \frac{10}{\sqrt{10}} = \sqrt{10}.$



1.3. Travaux dirigés

1. Expression trigonométrique du déterminant de deux vecteurs

Le plan est muni du repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On se propose de démontrer que, pour tout couple $(\vec{u}, \vec{v})$ de vecteurs non nuls, on a : $\det(\vec{u}, \vec{v}) = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \sin(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$.

Soit $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ deux vecteurs non nuls et θ une mesure de l'angle $(\widehat{\vec{i}, \vec{u}})$.

1°) Exprimer les coordonnées de $\vec{u}$ en fonction de θ et de $\|\vec{u}\|$.

2°) Soit $\vec{u}'$ le vecteur défini par : $\|\vec{u}'\| = \|\vec{u}\|$ et $(\widehat{\vec{u}, \vec{u}'})$ est l'angle droit direct.
Exprimer les coordonnées de $\vec{u}'$ en fonction de θ et de $\|\vec{u}\|$, puis en fonction de x et y.

3°) Vérifier que : $\det(\vec{u}, \vec{v}) = \vec{u}'.\vec{v}$.

4°) Démontrer que : $\vec{u}'.\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \sin(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$. Conclure.

Solution

1°) $(\vec{i}, \vec{j})$ est une base orthonormée, par conséquent :

$x = \vec{i}.\vec{u} = \|\vec{i}\| \times \|\vec{u}\| \times \cos(\widehat{\vec{i}, \vec{u}}) = \|\vec{u}\| \times \cos\theta$;

$y = \vec{j}.\vec{u} = \|\vec{j}\| \times \|\vec{u}\| \times \cos(\widehat{\vec{j}, \vec{u}}) = \|\vec{u}\| \times \cos\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) = \|\vec{u}\| \times \sin\theta.$

2°) Les coordonnées de $\vec{u}'$ sont : $\left(\|\vec{u}\| \times \cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right), \|\vec{u}\| \times \sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)\right)$,

ou encore : $\left(-\|\vec{u}\| \times \sin\theta, \|\vec{u}\| \times \cos\theta\right)$.

On en déduit que : $\vec{u}'\begin{pmatrix}-y\\x\end{pmatrix}$.

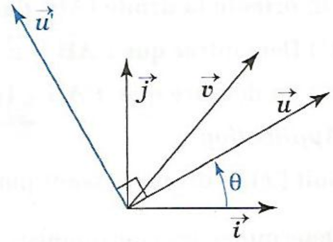
3°) $\vec{u}'.\vec{v} = -yx' + xy' = xy' - yx' = \det(\vec{u}, \vec{v})$.

4°) D'après la relation de Chasles, on a : $(\widehat{\vec{v}, \vec{u}'}) = (\widehat{\vec{u}, \vec{u}'}) - (\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$.

On en déduit que : $\cos(\widehat{\vec{v}, \vec{u}'}) = \sin(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$.

Ainsi : $\vec{u}'.\vec{v} = \|\vec{u}'\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\widehat{\vec{v}, \vec{u}'}) = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \sin(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$.

Par conséquent : $\det(\vec{u}, \vec{v}) = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \sin(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$.



Remarques

- *Cette expression du déterminant de deux vecteurs établit qu'il est indépendant de la base orthonormée dans laquelle il est exprimé.*
- *On sait que :* $\cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \frac{\vec{u}.\vec{v}}{\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|}$. *L'étude précédente permet d'écrire :* $\sin(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \frac{\det(\vec{u}, \vec{v})}{\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|}$.

2. Aire d'un triangle, d'un parallélogramme et déterminant

Le plan est muni du repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Soit ABCD un parallélogramme et H le projeté orthogonal de D sur la droite (AB).

1°) Démontrer que : $DH = AD \times |\sin(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}})|$.

2°) En utilisant le résultat du travail dirigé précédent, en déduire que :

***a)* aire (ABCD) = $|\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})|$;**

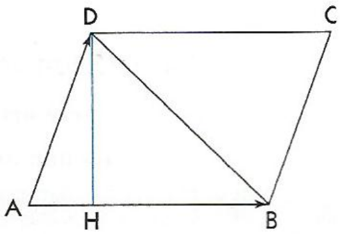
***b)* aire (ABD) = $\frac{1}{2}|\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})|$.**

Application

On considère les points $A\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$, $C\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}$ et le point E tel que ABEC soit un parallélogramme.

Calculer les aires du parallélogramme ABEC et du triangle ABC.

Solution



1°) On a : $DH = AD \sin \widehat{DAB}$. De plus, $\sin \widehat{DAB} = |\sin(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}})|$.

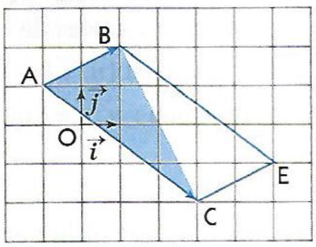
On en déduit que : $DH = AD\,|\sin(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}})|$.

2°) *a)*
$$\begin{aligned}\text{aire (ABCD)} &= AB \times DH\\ &= AB \times AD \times |\sin(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}})|\\ &= |AB \times AD \times \sin(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}})|.\end{aligned}$$

Or, d'après le travail dirigé précédent : $\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) = AB \times AD \times \sin(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}})$;

donc : aire (ABCD) = $|\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})|$.

b) aire (ABD) = $\frac{1}{2} AB \times DH = \frac{1}{2}|\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})|$.



Application

On a : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}4\\-3\end{pmatrix}$.

Donc : aire (ABEC) = $|\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})| = 10$ et aire (ABC) = 5.

3. Coordonnées du projeté orthogonal d'un point sur une droite

Soit $(\mathscr{D})$ une droite, B un point de $(\mathscr{D})$ et $\vec{v}$ un vecteur unitaire normal à $(\mathscr{D})$.

On considère un point A et on désigne par H son projeté orthogonal sur $(\mathscr{D})$.

On oriente la droite (AH) dans le sens de $\vec{v}$.

1°) Démontrer que : $\overline{AH} = \vec{v}.\overrightarrow{AB}$.

2°) En déduire que : $\overrightarrow{AH} = (\vec{v}.\overrightarrow{AB})\,\vec{v}$.

Application

Soit $(\mathscr{D})$ la droite passant par le point $B\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}$ et de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$.

Déterminer les coordonnées du point H, projeté orthogonal de $A\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}$ sur $(\mathscr{D})$.

Solution

1°) Soit A' l'image de A par la translation de vecteur $\vec{v}$.

On a :
$$\begin{aligned}\vec{v}.\overrightarrow{AB} &= \overline{AA'} \times \overline{AH}\\ &= \overline{AH}.\end{aligned}$$

2°) Par définition de la mesure algébrique : $\overrightarrow{AH} = \overline{AH}\,\vec{v}$;

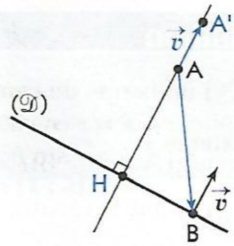
on en déduit que : $\overrightarrow{AH} = (\vec{v}.\overrightarrow{AB})\vec{v}$.

Application

Le vecteur $\vec{v}$ de coordonnées $\left(\frac{3}{5}\ ;\ \frac{4}{5}\right)$ est unitaire et normal à la droite $(\mathscr{D})$.

Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $(1\ ;-7)$; donc : $\vec{v}.\overrightarrow{AB} = -5$.

Le vecteur $\overrightarrow{AH}$ a donc pour coordonnées $(-3\ ;-4)$; donc : $H\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$.



Exercices

1.a Soit $(\mathscr{D})$ la droite d'équation $2x - 3y + 4 = 0$. Citer trois vecteurs normaux et trois vecteurs directeurs de $(\mathscr{D})$.

1.b Déterminer une équation cartésienne de la droite $(\mathscr{D})$ passant par $A\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$ et admettant $\vec{v}\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$ pour vecteur normal.

1.c Soit $(\mathscr{D})$ et $(\mathscr{D}')$ les droites d'équations respectives $4x + 6y + 2 = 0$ et $9x - 6y + 2 = 0$.
1. Ces droites sont-elles parallèles, perpendiculaires, ou ni parallèles ni perpendiculaires ?
2. Déterminer les deux équations normales de chacune de ces droites.

1.d On considère les points $A\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}7\\2\end{pmatrix}$ et $C\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$. Déterminer des équations des trois hauteurs du triangle ABC et en déduire les coordonnées de l'orthocentre de ce triangle.

1.e On considère le point $A\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$ et la droite $(\mathscr{D})$ d'équation $7x - y + 6 = 0$.
Déterminer la distance du point A à la droite $(\mathscr{D})$.

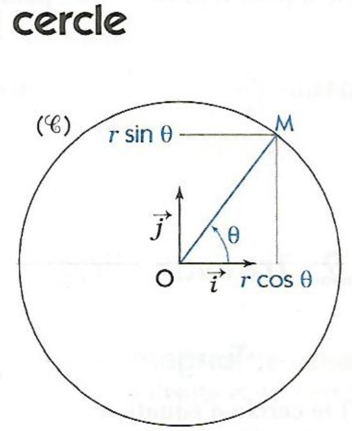
1.f **1.** Détermioner une équation normale de la droite $(\mathscr{D})$ passant par le point $A\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ et de vecteur directeur $\vec{v}\begin{pmatrix}12\\-5\end{pmatrix}$.
2. Déterminer la distance du point $B\begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix}$ à la droite $(\mathscr{D})$.

2 Cercles

Nous avons vu dans les classes précédentes que l'équation cartésienne $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ caractérise le cercle de centre $\Omega\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ et de rayon r. Nous allons découvrir une autre caractérisation d'un cercle dans un repère orthonormé : la représentation paramétrique.

2.1. Représentation paramétrique d'un cercle

Cercle centré à l'origine



Soit $(\mathscr{C})$ un cercle de centre O et de rayon r.

Pour tout point $M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$, on a :

$$\begin{aligned} M \in (\mathscr{C}) &\Leftrightarrow OM = r \\ &\Leftrightarrow x^2 + y^2 = r^2 \\ &\Leftrightarrow \left(\frac{x}{r}\right)^2 + \left(\frac{y}{r}\right)^2 = 1 \\ &\Leftrightarrow \exists\, \theta \in \mathbb{R},\ \frac{x}{r} = \cos\theta \text{ et } \frac{y}{r} = \sin\theta \\ &\Leftrightarrow \exists\, \theta \in \mathbb{R},\ x = r\cos\theta \text{ et } y = r\sin\theta. \end{aligned}$$

Définition

Soit $(\mathscr{C})$ un cercle de centre O et de rayon r.
Le système $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$ $(\theta \in \mathbb{R})$ est appelé représentation paramétrique de $(\mathscr{C})$ dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Exemples

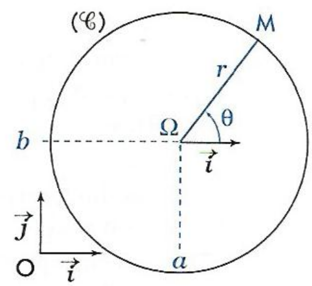
- Le cercle trigonométrique (C) a pour représentation paramétrique : $\begin{cases} x = \cos\theta \\ y = \sin\theta \end{cases}$ $(\theta \in \mathbb{R})$.
- L'ensemble des points $M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ tels que $x^2 + y^2 = 8$ est le cercle de centre O et de rayon $2\sqrt{2}$.

Une représentation paramétrique de ce cercle est : $\begin{cases} x = 2\sqrt{2}\cos\theta \\ y = 2\sqrt{2}\sin\theta \end{cases}$ $(\theta \in \mathbb{R})$.

Cercle de centre quelconque

Soit $(\mathscr{C})$ un cercle de centre $\Omega\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ et de rayon r.
Pour tout point $M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, on a :

$$\begin{aligned} M \in (\mathscr{C}) &\Leftrightarrow \Omega M = r \\ &\Leftrightarrow (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2 \\ &\Leftrightarrow \left(\frac{x-a}{r}\right)^2 + \left(\frac{y-b}{r}\right)^2 = 1 \\ &\Leftrightarrow \exists\,\theta \in \mathbb{R},\ \frac{x-a}{r} = \cos\theta \text{ et } \frac{y-b}{r} = \sin\theta \\ &\Leftrightarrow \exists\,\theta \in \mathbb{R},\ x = a + r\cos\theta \text{ et } y = b + r\sin\theta. \end{aligned}$$



Définition

Soit $(\mathscr{C})$ un cercle de centre $\Omega\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ et de rayon r.
Le système $\begin{cases} x = a + r\cos\theta \\ y = b + r\sin\theta \end{cases}$ $(\theta \in \mathbb{R})$ est appelé représentation paramétrique de $(\mathscr{C})$ dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Exemples

- Le cercle de centre $A\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$ et de rayon 2 a pour représentation paramétrique :
$\begin{cases} x = -3 + 2\cos\theta \\ y = 4 + 2\sin\theta \end{cases}$ $(\theta \in \mathbb{R})$.
- Soit (E) l'ensemble des points dont les coordonnées $(x\,;\,y)$ vérifient l'équation : $x^2 + y^2 - 2x + y - 1 = 0$.

Cette équation peut s'écrire : $(x-1)^2 + (y + \frac{1}{2})^2 = \frac{9}{4}$. Donc (E) est le cercle de centre $A\begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ et de rayon $\frac{3}{2}$.

Ce cercle a pour représentation paramétrique : $\begin{cases} x = 1 + \frac{3}{2}\cos\theta \\ y = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\sin\theta \end{cases}$ $(\theta \in \mathbb{R})$.

- Le système $\begin{cases} x = 3\cos\theta \\ y = -1 + 3\sin\theta \end{cases}$ $(\theta \in \mathbb{R})$ est une représentation paramétrique du cercle de centre $A\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ et de rayon 3.

2.2. Travaux dirigés

1. Tangente en un point d'un cercle

Soit $(\mathscr{C})$ le cercle d'équation $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$ et $A\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ un point de $(\mathscr{C})$.

1°) Déterminer une équation cartésienne de la tangente à (𝒞) en A.

2°) Démontrer que cette équation peut se mettre sous la forme :

$xx_0 + yy_0 - a(x + x_0) - b(y + y_0) + c = 0.$

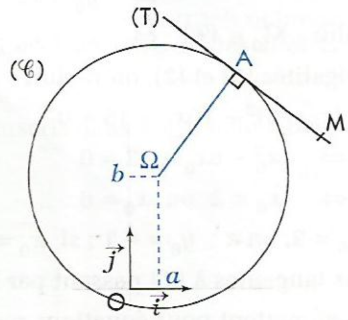
Application

Soit (𝒞) le cercle d'équation $x^2 + y^2 - 3y - 1 = 0$ et A le point de coordonnées (1 ; 3).

Vérifier que A appartient à (𝒞).

Déterminer une équation cartésienne de la tangente à (𝒞) en A.

Solution



1°) On désigne par Ω le centre de (𝒞). Soit (T) la tangente à (𝒞) en A et $M\binom{x}{y}$ un point du plan.

On a : $M \in (T) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{\Omega A} = 0$

$\Leftrightarrow (x - x_0)(x_0 - a) + (y - y_0)(y_0 - b) = 0$ (1).

(1) est une équation cartésienne de (T).

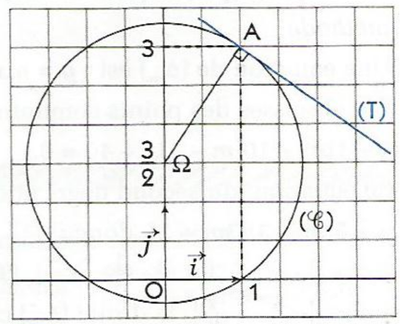
2°) On a : (1) $\Leftrightarrow xx_0 + yy_0 - ax - by - (x_0^2 + y_0^2 - ax_0 - by_0) = 0.$

Or : A ∈ (𝒞) $\Leftrightarrow x_0^2 + y_0^2 - 2ax_0 - 2by_0 + c = 0$

$\Leftrightarrow x_0^2 + y_0^2 - ax_0 - by_0 = ax_0 + by_0 - c.$

Donc : (1) $\Leftrightarrow xx_0 + yy_0 - ax - by - ax_0 - by_0 + c = 0$

$\Leftrightarrow xx_0 + yy_0 - a(x + x_0) - b(y + y_0) + c = 0.$



Application

Les coordonnées du point A vérifient l'équation de (𝒞), donc A appartient à (𝒞).

En utilisant le résultat de la question 2°), on obtient :

$x + 3y - \frac{3}{2}(y + 3) - 1 = 0$;

c'est-à-dire : $2x + 3y - 11 = 0$.

Remarque

Soit (𝒞) un cercle d'équation $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$ et $A\binom{x_0}{y_0}$ un point de (𝒞).

On obtient une équation de la tangente à (𝒞) en A en remplaçant dans l'équation de (𝒞) :

x^2 et y^2 respectivement par xx_0 et yy_0 ;

$2ax$ et $2by$ respectivement par $a(x + x_0)$ et $b(y + y_0)$.

2. Tangentes à un cercle passant par un point donné extérieur à ce cercle

Soit (𝒞) le cercle d'équation $x^2 + y^2 - 10x + 15 = 0$ et P le point de coordonnées (0 ; 5).

On se propose de déterminer une équation cartésienne des tangentes au cercle (𝒞) passant par le point P.

1re méthode

Soit $M_0\binom{x_0}{y_0}$ un point de (𝒞).

a) **Écrire une équation de la tangente à (𝒞) en M_0.**

b) **Déterminer x_0 et y_0 pour que cette tangente passe par P.**

c) **En déduire une équation des tangentes à (𝒞) passant par le point P.**

2e méthode

a) **Écrire une équation cartésienne de la droite (Δ_m) passant par P et de coefficient directeur m ($m \in \mathbb{R}$).**

b) **Déterminer, suivant les valeurs de m, le nombre de points communs à cette droite et au cercle (𝒞).**

c) **En déduire une équation des tangentes à (𝒞) passant par le point P.**

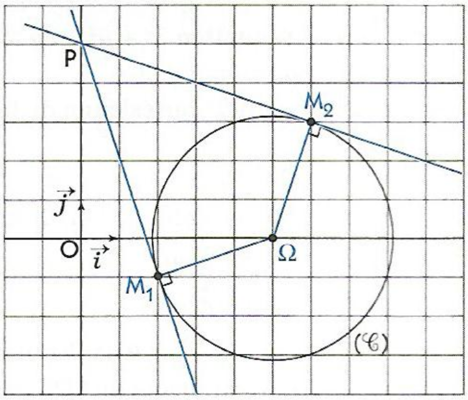
Solution

1^re^ méthode

a) D'après le travail dirigé précédent, une équation de la tangente (T_0) à $(\mathscr{C})$ en M_0 est :

$xx_0 + yy_0 - 5(x + x_0) + 15 = 0$.

b) On a : $P\begin{pmatrix}0\\5\end{pmatrix}$.



Donc : $P \in (T_0) \iff 5y_0 - 5x_0 + 15 = 0$

$\iff y_0 = x_0 - 3$ (1).

De plus : $M_0 \in (\mathscr{C}) \iff x_0^2 + y_0^2 - 10x_0 + 15 = 0$ (2).

Des égalités (1) et (2), on déduit :

$x_0^2 + (x_0 - 3)^2 - 10x_0 + 15 = 0$ (3).

(3) $\iff x_0^2 - 8x_0 + 12 = 0$

$\iff x_0 = 2$ ou $x_0 = 6$.

Si $x_0 = 2$, on a : $y_0 = -1$; si $x_0 = 6$, on a : $y_0 = 3$.

c) Les tangentes à $(\mathscr{C})$ passant par P sont donc les tangentes à $(\mathscr{C})$ aux points $M_1\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$ et $M_2\begin{pmatrix}6\\3\end{pmatrix}$.

Elles admettent pour équations respectives $3x + y - 5 = 0$ et $x + 3y - 15 = 0$.

2^e^ méthode

a) Une équation de (Δ_m) est : $y = mx + 5$.

b) Les abscisses des points communs à $(\mathscr{C})$ et à (Δ_m) vérifient l'équation :

$(m^2 + 1)x^2 + 10(m - 1)x + 40 = 0$.

Cette équation, du second degré et d'inconnue x, a pour discriminant réduit :

$\Delta' = -5(m + 3)(3m + 1)$, donc :

- si $m \in]-\infty\,;-3[\cup]-\frac{1}{3}\,;+\infty[$, $(\mathscr{C})$ et (Δ_m) n'ont aucun point commun ;
- si $m \in]-3\,;-\frac{1}{3}[$, la droite (Δ_m) coupe $(\mathscr{C})$ en deux points distincts ;
- si $m = -3$ ou $m = -\frac{1}{3}$, la droite (Δ_m) est tangente à $(\mathscr{C})$.

c) Les tangentes à $(\mathscr{C})$ passant par P admettent donc pour équations respectives :

$3x + y - 5 = 0$ et $x + 3y - 15 = 0$.

3. Équation du cercle inscrit dans un triangle

On considère les points $A\begin{pmatrix}4\\7\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}-12\\-5\end{pmatrix}$ et $C\begin{pmatrix}13\\-5\end{pmatrix}$.

1°) Déterminer une équation des droites (AB), (AC) et (BC).

2°) Déterminer une équation des bissectrices intérieures du triangle ABC.

3°) Vérifier que ces trois droites sont concourantes et en déduire une équation du cercle inscrit dans le triangle ABC.

Solution

1°) Les droites (AB), (AC) et (BC) ont pour équations respectives :

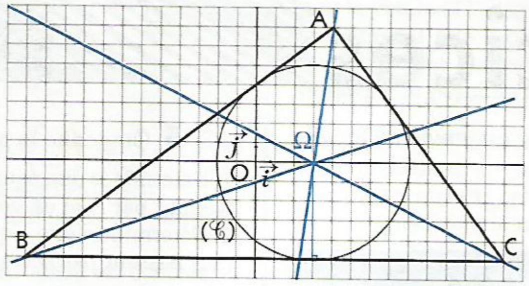
$3x - 4y + 16 = 0$, $4x + 3y - 37 = 0$ et $y + 5 = 0$.

2°) Soit $M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ un point de la bissectrice de l'angle $\widehat{A}$.

On a : $d(M, (AB)) = d(M, (AC)) \iff \dfrac{|3x - 4y + 16|}{5} = \dfrac{|4x + 3y - 37|}{5}$

$\iff 7x - y - 21 = 0$ (1) ou $x + 7y - 53 = 0$ (2).

On vérifie graphiquement que l'équation (1) est celle de la bissectrice cherchée, l'équation (2) étant celle de la bissectrice extérieure (cf. exercice n° 28 - chapitre 1).



Par une méthode analogue, on trouve des équations respectives des bissectrices des angles $\widehat{B}$ et $\widehat{C}$:
$x - 3y - 3 = 0$ et $x + 2y - 3 = 0$.

3°) Ces trois bissectrices concourent au point $\Omega\begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}$, centre du cercle inscrit dans le triangle ABC.

Le rayon r de ce cercle est tel que : $r = d(\Omega, (BC)) = 5$.

Donc, une équation du cercle est : $(x - 3)^2 + y^2 = 25$;

c'est-à-dire : $x^2 + y^2 - 6x - 16 = 0$.

Exercices

2.a Préciser la nature et les éléments caractéristiques de l'ensemble de représentation paramétrique :
$\begin{cases} x = 3 + 5\cos\alpha \\ y = 2 + 5\sin\alpha \end{cases}$ $(\alpha \in \mathbb{R})$.

2.b Préciser la nature et les éléments caractéristiques de l'ensemble de représentation paramétrique :
$\begin{cases} x = 2 - 5\sin\alpha \\ y = 5\cos\alpha \end{cases}$ $(\alpha \in \mathbb{R})$.
(On pourra poser $\theta = \alpha + \frac{\pi}{2}$.)

2.c On considère le cercle (𝒞) de représentation paramérique $\begin{cases} x = 2\cos\theta \\ y = 2\sin\theta \end{cases}$ $(\theta \in \mathbb{R})$.
Déterminer une équation cartésienne de (𝒞).

2.d On considère le cercle (𝒞) d'équation cartésienne $x^2 + y^2 - 5 = 0$.
Déterminer une représentation paramérique de (𝒞).

2.e On considère le cercle (𝒞) de représentation paramérique $\begin{cases} x = -2 + 3\cos\theta \\ y = 1 + 3\sin\theta \end{cases}$ $(\theta \in \mathbb{R})$.
Déterminer une équation cartésienne de (𝒞).

2.f On considère le cercle (𝒞) d'équation cartésienne $2x^2 + 2y^2 - x + 3y = 0$.
Déterminer une représentation paramérique de (𝒞).

2.g On considère les points $A\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$.
Déterminer une représentation paramérique du cercle de centre A et passant par B.

2.h On considère les points $A\begin{pmatrix}-1\\-2\end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix}0\\\frac{7}{2}\end{pmatrix}$.
Déterminer une représentation paramérique du cercle de diamètre [AB].

Exercices

Dans tous les exercices, le plan est muni du repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

APPRENTISSAGE

Orthogonalité et droites

1 Dans chacun des cas suivants, déterminer une équation cartésienne de la droite passant par le point A et admettant $\vec{n}$ pour vecteur normal :

a) $A\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}$ et $\vec{n}\begin{pmatrix}\sqrt{2}\\\sqrt{3}\end{pmatrix}$;

b) $A\begin{pmatrix}4\\-1\end{pmatrix}$ et $\vec{n} = 3\vec{i}$;

c) $A\begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix}$ et $\vec{n} = \sqrt{2}\,\vec{j}$.

2 Déterminer un vecteur normal à la droite (Δ) dans chacun des cas suivants :

a) $(\Delta) : 7x - 5y + 2 = 0$;

b) $(\Delta) : x = 2$;

c) $(\Delta) : y = -\frac{3}{2}x + 7$;

d) $(\Delta) : y = -4$;

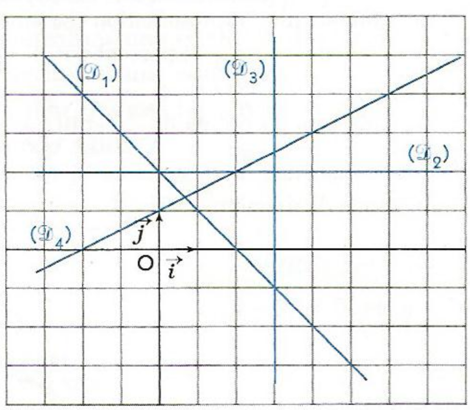
e) $(\Delta) : -5x + 3y - 1 = 0$;

f) $(\Delta) : 7x = 3$;

g) (Δ) est la droite passant par le point O et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}$;

h) (Δ) est la droite passant par le point $A\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$.

3 Pour chacune des droites $(\mathscr{D}_1)$, $(\mathscr{D}_2)$, $(\mathscr{D}_3)$ et $(\mathscr{D}_4)$, déterminer un vecteur normal.



4 Déterminer une équation cartésienne de la droite $(\mathscr{D})$ passant par le point $A\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}$ et perpendiculaire à la droite (Δ) d'équation $x - y + 3 = 0$.

5 On donne le point $A\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}$ et le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\-5\end{pmatrix}$.

1. Déterminer une équation cartésienne de la droite $(\mathscr{D}_1)$ passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$.

2. Déterminer une équation cartésienne de la droite $(\mathscr{D}_2)$ passant par A et perpendiculaire à $(\mathscr{D}_1)$.

6 Soit $(\mathscr{D})$ la droite d'équation $2x + 6y + 1 = 0$. Déterminer les vecteurs normaux à $(\mathscr{D})$ de norme égale à 4.

7 Soit $(\mathscr{D})$ la droite d'équation $3x - 4y + 7 = 0$.

1. Déterminer les vecteurs unitaires normaux à $(\mathscr{D})$.

2. Déterminer les équations normales de $(\mathscr{D})$.

8 Dans chacun des cas suivants, calculer la distance du point A à la droite (Δ) :

a) $A\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$, $(\Delta) : 2x + y - 3 = 0$;

b) $A\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$, $(\Delta) : 2x = 5$;

c) $A\begin{pmatrix}\sqrt{2}\\\sqrt{2}\end{pmatrix}$, $(\Delta) : y = 2x + 3$.

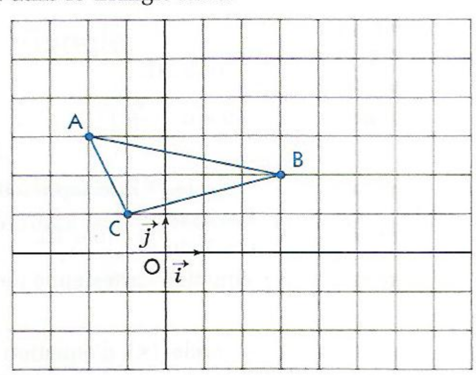
9 Dans chacun des cas suivants, calculer la distance du point A à la droite $(\mathscr{D})$ et les coordonnées du point A', projeté orthogonal de A sur $(\mathscr{D})$:

a) $A\begin{pmatrix}2\\6\end{pmatrix}$, $(\mathscr{D}) : 3x + 5y - 2 = 0$;

b) $A\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}$, $(\mathscr{D}) : x = 1$;

c) $A\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}$, $(\mathscr{D}) : y = \frac{13}{3}$.

10 Avec les données de la figure, déterminer une équation de la médiatrice de [BC] et de la hauteur issue de A dans le triangle ABC.



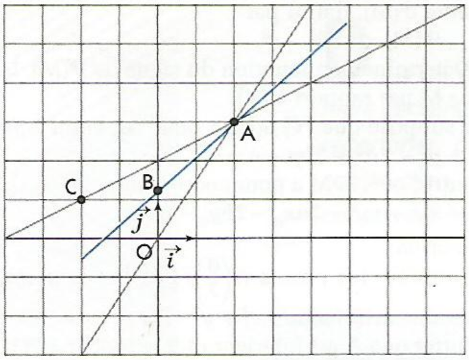
11 On donne les droites $(\mathscr{D})$ et $(\mathscr{D}')$ d'équations respectives $y = 3x$ et $y = -3x$.
Déterminer et construire l'ensemble (Γ) des points $M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ tels que : $d(M, \mathscr{D}) + d(M, \mathscr{D}') = 4$.

12 On donne les points $A\begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}$ et $C\begin{pmatrix}-2\\-1\end{pmatrix}$.
Vérifier que A, B et C ne sont pas alignés.
Déterminer les coordonnées de l'orthocentre de ABC.

13 On donne les points $A\begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}$ et $C\begin{pmatrix}-2\\-1\end{pmatrix}$.
Vérifier que A, B et C ne sont pas alignés.
Déterminer les coordonnées du centre du cercle circonscrit au triangle ABC.

14 On considère les points $A\begin{pmatrix}-4\\0\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}4\\0\end{pmatrix}$ et $C\begin{pmatrix}0\\5\end{pmatrix}$.
Soit λ l'abscisse d'un point M du segment [AB].
Exprimer, en fonction de λ, les distances du point M aux droites (AC) et (BC).
Démontrer que la somme de ces distances est constante.

15 Le point B a pour ordonnée $\frac{5}{4}$.



La droite (AB) est-elle bissectrice de l'angle $\widehat{OAC}$?

16 On donne les points $A\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}-1\\5\end{pmatrix}$ et $C\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}$.
Calculer l'aire du triangle ABC.

17 On considère les points $A\begin{pmatrix}-2\\-2\end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$.
Déterminer et tracer le lieu des points M du plan tels que : $|\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM})| = 8$.

Cercles

18 On considère les points $A\begin{pmatrix}-3\\2\end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$.
Déterminer une représentation paramétrique du cercle de diamètre [AB] et une équation de chacune des tangentes à ce cercle en A et en B.

19 On considère le point $A\begin{pmatrix}6\\-1\end{pmatrix}$ et la droite $(\mathscr{D})$ d'équation $x - 2y - 2 = 0$.
Déterminer une représentation paramétrique du cercle de centre A, tangent à la droite $(\mathscr{D})$.

20 On considère le point $A\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ et la droite $(\mathscr{D})$ d'équation $2x - y + 3 = 0$.
1. Déterminer une équation cartésienne du cercle $(\mathscr{C})$ de centre A, tangent à la droite $(\mathscr{D})$.
2. Calculer les coordonnées du point de contact entre $(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{D})$.

21 Démontrer que la droite $(\mathscr{D})$ d'équation $x - y + 1 = 0$ est tangente au cercle $(\mathscr{C})$ d'équation $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 3 = 0$.
Calculer les coordonnées de leur point de contact.

22 Déterminer les valeurs du nombre réel m telles que le cercle $(\mathscr{C})$ d'équation $x^2 + y^2 + 2x - 6y - \frac{5}{2} = 0$ soit tangent à la droite $(\mathscr{D})$ d'équation $x - y + m = 0$.
Pour chacune des valeurs obtenues, calculer les coordonnées du point de contact entre $(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{D})$.

23 m est un nombre réel. On considère la droite (Δ_m) d'équation $x - my + \sqrt{1 + m^2} = 0$.
Démontrer que (Δ_m) est tangente à un cercle de centre O dont on précisera le rayon.

APPROFONDISSEMENT

24 Soit $(\mathscr{D})$ la droite d'équation $3x + y + 2 = 0$ et A le point de $(\mathscr{D})$ d'abscisse -1.
Déterminer une équation cartésienne du cercle passant par l'origine et tangent à la droite $(\mathscr{D})$ en A.

25 Soit $(\mathscr{C})$ le cercle de centre $\Omega\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ et de rayon 3.
1. Déterminer les points de ce cercle où la tangente admet pour vecteur normal $\vec{v}\begin{pmatrix}\sqrt{3}\\1\end{pmatrix}$.
2. Écrire une équation de chacune de ces tangentes.

26 Soit $(\mathscr{D})$ et $(\mathscr{D}')$ les droites d'équations respectives : $3x - 4y + 6 = 0$ et $-6x + 8y + 9 = 0$.
1. Démontrer que ces droites sont parallèles.
2. Déterminer une représentation paramétrique du cercle tangent à ces deux droites et dont le centre a une ordonnée nulle.

27 Soit $(\mathscr{C})$ le cercle de centre $\Omega\begin{pmatrix}4\\0\end{pmatrix}$ et de rayon 2, m un nombre réel, $(\mathscr{D}_m)$ la droite passant par O et de pente m.
1. Déterminer une représentation paramétrique de $(\mathscr{C})$.
2. Démontrer qu'il existe deux valeurs de m pour lesquelles $(\mathscr{D}_m)$ est tangente à $(\mathscr{C})$.

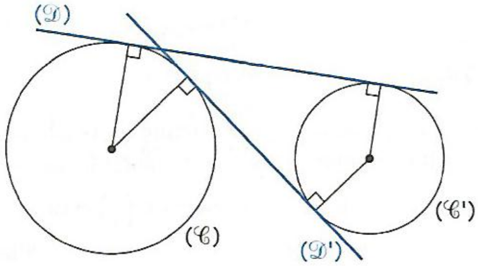
28 On considère les points $A\begin{pmatrix}0\\4\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}-3\\0\end{pmatrix}$ et $C\begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}$.
Déterminer une représentation paramétrique du cercle inscrit dans le triangle ABC.

29 On considère les points $A\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$, $C\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$ et $D\begin{pmatrix}0\\-3\end{pmatrix}$. Utiliser les résultats établis au §1.3. pour calculer l'aire des triangles ABC, ABD, ACD et BCD.

30 On considère les points $A\begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}-4\\0\end{pmatrix}$ et $C\begin{pmatrix}0\\-2\end{pmatrix}$.
1. Déterminer les points I et J de l'axe des abscisses, équidistants des droites (AB) et (AC).
2. Écrire une équation cartésienne du cercle de diamètre [IJ] et vérifier que ce cercle passe par A.
3. Déterminer une équation de la tangente à ce cercle en A.

31 Soit $(\mathscr{C})$ le cercle de centre O et de rayon $\sqrt{3}$, $(\mathscr{C}')$ le cercle de centre $O'\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}$ et de rayon 1.
1. Démontrer que les deux cercles sont sécants en deux points, dont on déterminera les coordonnées.
2. Démontrer qu'en ces deux points, les tangentes à $(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{C}')$ sont perpendiculaires.
3. Déterminer une équation normale, de chacune des tangentes communes à $(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{C}')$.

32 Soit r, r' et d trois nombres réels strictement positifs tels que : $r + r' < d$.
On considère le cercle $(\mathscr{C})$ de centre O et de rayon r et le cercle $(\mathscr{C}')$ de centre $O'\begin{pmatrix} d \\ 0 \end{pmatrix}$ et de rayon r'.
On se propose de déterminer une équation cartésienne des tangentes communes extérieures et intérieures aux cercles $(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{C}')$.
Une droite $(\mathscr{D})$, tangente à deux cercles $(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{C}')$, est dite tangente « extérieure » à ces cercles si $(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{C}')$ sont dans le même demi-plan de frontière $(\mathscr{D})$; sinon, elle est dite tangente « intérieure ».



Dans la figure ci-dessus, $(\mathscr{D})$ est une tangente extérieure à $(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{C}')$, et $(\mathscr{D}')$ est une tangente intérieure à $(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{C}')$.
1. Déterminer une représentation paramétrique de chacun des cercles $(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{C}')$.
2. Soit α et β deux nombres réels. On considère le point M de $(\mathscr{C})$ et le point M' de $(\mathscr{C}')$ tels que :
$(\widehat{\vec{i}, \overrightarrow{OM}}) = \widehat{\alpha}$ et $(\widehat{\vec{i}, \overrightarrow{O'M'}}) = \widehat{\beta}$.
a) Déterminer, en fonction de r, r', d, α et β, une équation de la tangente à $(\mathscr{C})$ en M et une équation de la tangente à $(\mathscr{C}')$ en M'.
b) Démontrer que ces deux tangentes sont confondues si et seulement si : $\left(\widehat{\alpha} = \widehat{\beta}\text{ et }\cos\alpha = \dfrac{r - r'}{d}\right)$ ou $\left(\widehat{\alpha} = \widehat{\beta} + \widehat{\pi}\text{ et }\cos\alpha = \dfrac{r + r'}{d}\right)$.
c) En déduire qu'il existe quatre tangentes communes à $(\mathscr{C})$ et à $(\mathscr{C}')$. Déterminer, en fonction de r, r' et d, une équation de chacune d'elles.
Application numérique :
$r = 4$, $r' = 1$ et $d = 6$.

33 Soit A, B, C trois points de coordonnées respectives $(0 ; a)$, $(b ; 0)$, $(c ; 0)$ où a, b, c sont trois nombres réels non nuls tels que : $|b| \neq |c|$.
1. Démontrer que l'ensemble des points du plan équidistants des droites (AB) et (AC) est la réunion de deux droites perpendiculaires (Δ) et (Δ').
2. Soit I et J les points d'intersection respectifs de (Δ) et (Δ') avec la droite (BC).
Déduire de la question 1. une équation du second degré dont les solutions sont les abscisses des points I et J.
3. En utilisant l'équation trouvée à la question 2., mais sans résoudre cette équation, démontrer que :
$\dfrac{IB}{IC} = \dfrac{JB}{JC} = \dfrac{AB}{AC}$.

34 *On a vu dans le manuel de seconde (exercice n° 46 - page 96) une définition de la puissance d'un point par rapport à un cercle, lorsque ce point est extérieur au cercle.*
L'objectif de cet exercice est d'étendre cette notion à tous les points du plan et d'en donner un aspect analytique.
Soit M un point du plan et $(\mathscr{C})$ un cercle de centre Ω et de rayon r.
On appelle puissance de M par rapport à $(\mathscr{C})$ le nombre réel, noté $\mathscr{P}(M)$, défini par :
$\mathscr{P}(M) = M\Omega^2 - r^2$.
1. *a)* Déterminer, en fonction du signe de $\mathscr{P}(M)$, la position de M par rapport à $(\mathscr{C})$.
b) On suppose que $(\mathscr{C})$ admet pour équation cartésienne $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$.
Démontrer que, si M a pour coordonnées $(x_0 ; y_0)$, on a : $\mathscr{P}(M) = x_0{}^2 + y_0{}^2 - 2ax_0 - 2by_0 + c$.
Application
On considère les points $A\begin{pmatrix} 0 \\ 7 \end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ et le cercle $(\mathscr{C})$ d'équation cartésienne : $x^2 + y^2 + 5x - 7y - 12 = 0$.
Démontrer que A est intérieur et B extérieur à $(\mathscr{C})$.
2. *a)* Une droite passant par M coupe $(\mathscr{C})$ en deux points A et B. Démontrer que : $\mathscr{P}(M) = \overline{MA} \times \overline{MB}$.
b) En déduire que EFGH, quadrilatère tel que les droites (EF) et (GH) se coupent en un point P, est inscriptible si et seulement si : $\overline{PE} \times \overline{PF} = \overline{PG} \times \overline{PH}$.

35 Soit $(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{C}')$ les cercles d'équations respectives :
$x^2 + y^2 + x - 4y + 1 = 0$ et $x^2 + y^2 - 3x + 2y - 13 = 0$.
1. Démontrer que $(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{C}')$ sont sécants en deux points A et B dont on déterminera les coordonnées.
2. Pour tout nombre réel k, on désigne par (E_k) l'ensemble des points du plan dont les coordonnées (x, y) vérifient l'équation :
$x^2 + y^2 + x - 4y + 1 + k(x^2 + y^2 - 3x + 2y - 13) = 0$.
a) Démontrer que :
- si $k = -1$, (E_k) est la droite (AB) ;
- si $k \neq -1$, (E_k) est un cercle passant par A et B.

b) On suppose que : $k \neq -1$. Déterminer en fonction de k les coordonnées du centre du cercle (E_k).
Quel est l'ensemble des centres des cercles (E_k) quand k varie dans $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$?
3. *a)* Démontrer que tout cercle passant par A et B admet une équation cartésienne de la forme :
$\lambda(x^2 + y^2 + x - 4y + 1) + \mu(x^2 + y^2 - 3x + 2y - 13) = 0$, où λ et μ sont des nombres réels.
b) En déduire une équation cartésienne du cercle circonscrit au triangle OAB.

4 Isométries du plan

Introduction

Dans les classes précédentes, ont été définies et étudiées séparément certaines des isométries du plan. L'objectif de ce chapitre est de répertorier, composer et utiliser (lieux géométriques, problèmes de construction, démonstration de propriétés) ces transformations qui conservent les distances.

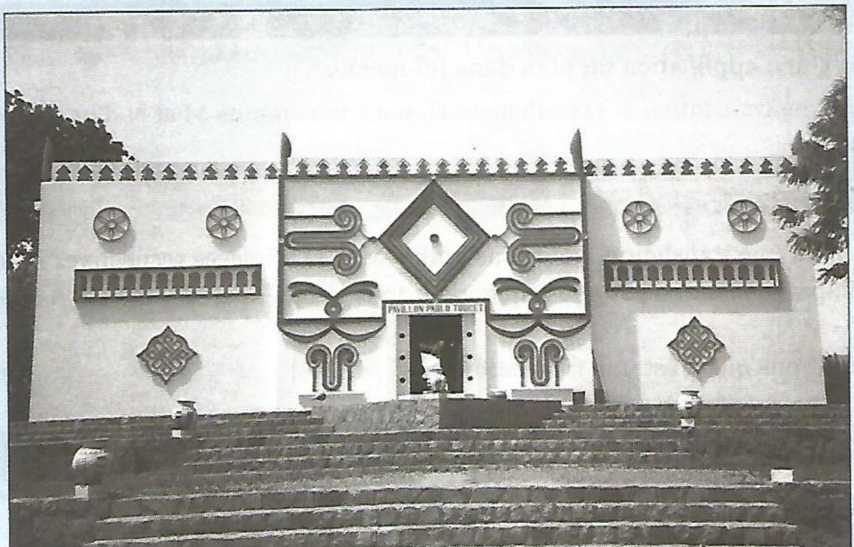


Photo Fredy Beghain

Façade du musée de Niamey (Niger).

SOMMAIRE

1 Translations et symétries orthogonales

1.1. Translations

Introduction

Dans les classes précédentes, on a vu que toute translation est définie par un vecteur. La translation de vecteur $\vec{u}$, notée $t_{\vec{u}}$, est l'application du plan dans lui-même qui à tout point M associe le point M' tel que : $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$.

On a également démontré ou admis les propriétés suivantes :

- si $\vec{u} = \vec{0}$, $t_{\vec{u}}$ est l'application identique ; tous les points du plan sont invariants ;
- si $\vec{u} \neq \vec{0}$, aucun point n'est invariant ;
- si A' et B' désignent les images respectives de A et B par une translation $t_{\vec{u}}$, alors : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}$.

Nous allons démontrer que cette dernière propriété est une propriété caractéristique de la translation.

Propriété caractéristique d'une translation

Propriété

Soit f une application du plan dans lui-même.

f est une translation si et seulement si, pour tous points M et N d'images respectives M' et N', on a : $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{M'N'}$.

Démonstration

- Si f est une translation, pour tous points M et N d'images respectives M' et N', on a : $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{M'N'}$.
- Réciproquement, on suppose que, pour tous points M et N d'images respectives M' et N', on a : $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{M'N'}$.

Démontrons que f est une translation.

Soit A un point et A' son image par f.

Pour tout point M du plan on a : $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{A'M'}$; donc : $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{AA'}$ et f est la translation de vecteur $\overrightarrow{AA'}$.

Composée de deux translations

Propriété

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs.

La composée $t_{\vec{u}} \circ t_{\vec{v}}$ des translations de vecteurs respectifs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est la translation de vecteur $\vec{u} + \vec{v}$.

On a : $t_{\vec{v}} \circ t_{\vec{u}} = t_{\vec{u}+\vec{v}}$

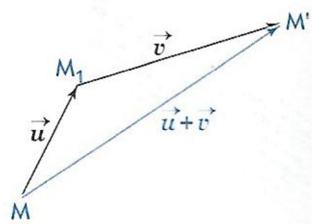
Démonstration

Soit M un point du plan, M_1 son image par $t_{\vec{u}}$ et M' l'image de M_1 par $t_{\vec{v}}$.

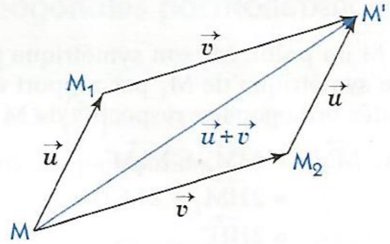
On a : $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MM_1} + \overrightarrow{M_1M'} = \vec{u} + \vec{v}$.

Ainsi, $t_{\vec{v}} \circ t_{\vec{u}}$ est l'application qui à tout point M associe le point M' tel que : $\overrightarrow{MM'} = \vec{u} + \vec{v}$.

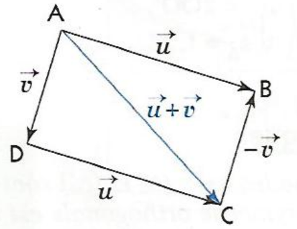
$t_{\vec{v}} \circ t_{\vec{u}}$ est donc la translation de vecteur $\vec{u} + \vec{v}$.



Remarques



- *Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, on a : $\vec{v} + \vec{u} = \vec{u} + \vec{v}$;*
donc : $t_{\vec{u}} \circ t_{\vec{v}} = t_{\vec{v}} \circ t_{\vec{u}}$.
On dit que la composition des translations est commutative.
- *Si $\vec{v} = -\vec{u}$, on obtient : $t_{\vec{u}} \circ t_{-\vec{u}} = t_{-\vec{u}} \circ t_{\vec{u}} = Id$.*
Cette relation caractérise les bijections réciproques.
- *Toute translation est une transformation du plan ;*
la transformation réciproque de $t_{\vec{u}}$ est $t_{-\vec{u}}$.



Exemples

Soit ABCD un parallélogramme. On a :

$t_{\overrightarrow{AB}} \circ t_{\overrightarrow{AD}} = t_{\overrightarrow{AC}}$;

$t_{\overrightarrow{BC}} \circ t_{\overrightarrow{AB}} = t_{\overrightarrow{DC}} \circ t_{\overrightarrow{AD}}$;

$(t_{\overrightarrow{AD}})^{-1} = t_{\overrightarrow{CB}}$.

Expression analytique d'une translation

Le plan est muni du repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Soit t une translation de vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, $M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ un point du plan et $M'\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ son image par t.

On se propose de déterminer l'expression analytique de t, c'est-à-dire d'exprimer x' et y' en fonction de x et y.

On a : $\overrightarrow{MM'} = \vec{u} \iff \begin{cases} x' - x = a \\ y' - y = b \end{cases}$.

L'expression analytique de la translation de vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ est : $\begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \end{cases}$.

1.2. Symétries orthogonales

Introduction

Dans les classes précédentes, on a vu que toute symétrie orthogonale est définie par une droite appelée axe de la symétrie orthogonale. La symétrie orthogonale d'axe (Δ), notée s_Δ, est l'application du plan dans lui-même qui à tout point M associe le point M' tel que :

- si $M \in (\Delta)$, alors $M' = M$;
- si $M \notin (\Delta)$, alors M' est le point tel que (Δ) est la médiatrice de [MM'].

On admettra les propriétés suivantes :

- l'ensemble des points invariants par une symétrie orthogonale d'axe (Δ) est la droite (Δ) ;
- soit O un point, $\vec{u}$ un vecteur non nul, (Δ) la droite passant par O et de vecteur directeur $\vec{u}$;

pour tous points M et M', distincts de O, on a : $s_\Delta(M) = M' \iff \begin{cases} OM = OM' \\ (\widehat{\overrightarrow{OM}, \vec{u}}) = (\widehat{\vec{u}, \overrightarrow{OM'}}) \end{cases}$.

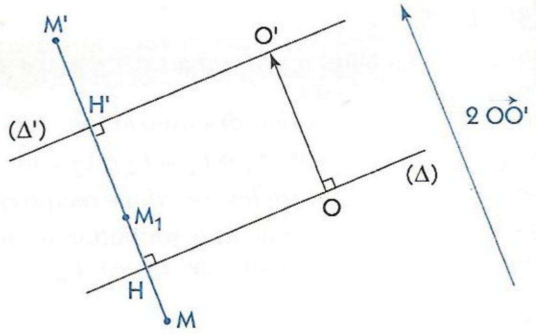
Composée de deux symétries orthogonales d'axes parallèles

Propriété

Soit (Δ) et (Δ') deux droites parallèles, O un point de (Δ) et O' son projeté orthogonal sur (Δ').

La composée $s_{\Delta'} \circ s_\Delta$ des symétries orthogonales d'axes respectifs (Δ) et (Δ') est la translation de vecteur $2\overrightarrow{OO'}$.

Démonstration



Soit M un point, M_1 son symétrique par rapport à (Δ), M' le symétrique de M_1 par rapport à (Δ'), H et H' les projetés orthogonaux respectifs de M sur (Δ) et (Δ').

On a : $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MM_1} + \overrightarrow{M_1M'}$
$= 2\overrightarrow{HM_1} + 2\overrightarrow{M_1H'}$
$= 2\overrightarrow{HH'}$
$= 2\overrightarrow{OO'}$.

Donc : $s_{\Delta'} \circ s_{\Delta} = t_{2\overrightarrow{OO'}}$.

Remarques

- *Lorsque les axes (Δ) et (Δ') sont confondus, on obtient :* $s_{\Delta} \circ s_{\Delta} = Id$.
- *Toute symétrie orthogonale est une transformation ; la transformation réciproque de* s_{Δ} *est* s_{Δ}.
- *On a :* $s_{\Delta} \circ s_{\Delta'} = t_{2\overrightarrow{O'O}}$ *; les transformations* $s_{\Delta} \circ s_{\Delta'}$ *et* $s_{\Delta'} \circ s_{\Delta}$ *sont donc réciproques l'une de l'autre.*

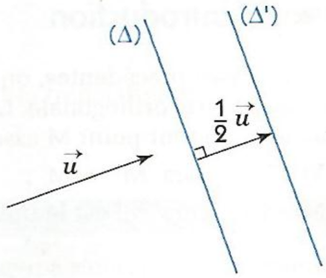
Décomposition d'une translation

D'après l'étude précédente, toute translation peut s'écrire d'une infinité de façons comme composée de deux symétries orthogonales d'axes parallèles.

Propriété

Soit $t_{\vec{u}}$ une translation de vecteur non nul $\vec{u}$.
Pour toute droite (Δ) de vecteur normal $\vec{u}$, il existe une droite (Δ') et une seule telle que : $s_{\Delta'} \circ s_{\Delta} = t_{\vec{u}}$.

Démonstration



Existence

Soit (Δ') l'image de (Δ) par la translation de vecteur $\frac{1}{2}\vec{u}$.

D'après l'étude précédente, la droite (Δ') vérifie : $s_{\Delta'} \circ s_{\Delta} = t_{\vec{u}}$.

Unicité

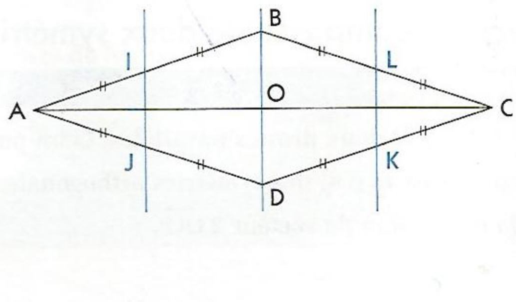
Soit (Δ") une droite telle que : $s_{\Delta''} \circ s_{\Delta} = t_{\vec{u}}$.

Démontrons que les droites (Δ') et (Δ") sont confondues.

On a : $s_{\Delta'} \circ s_{\Delta} = s_{\Delta''} \circ s_{\Delta} \Rightarrow (s_{\Delta'} \circ s_{\Delta}) \circ s_{\Delta} = (s_{\Delta''} \circ s_{\Delta}) \circ s_{\Delta}$
$\Rightarrow s_{\Delta'} \circ (s_{\Delta} \circ s_{\Delta}) = s_{\Delta''} \circ (s_{\Delta} \circ s_{\Delta})$
$\Rightarrow s_{\Delta'} = s_{\Delta''}$.

Les droites (Δ') et (Δ") sont donc confondues.

Exemples



Soit ABCD un losange de centre O et I, J, K, L les milieux respectifs de [AB], [AD], [CD], [CB]. On a :

$t_{\overrightarrow{AO}} = s_{(BD)} \circ s_{(IJ)}$;

$t_{\overrightarrow{AO}} = s_{(KL)} \circ s_{(BD)}$;

$t_{\overrightarrow{AC}} = s_{(KL)} \circ s_{(IJ)}$.

Expressions analytiques de symétries orthogonales particulières

Le plan est muni du repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Soit s une symétrie orthogonale d'axe (Δ), $M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ un point du plan et $M'\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ son image par s.

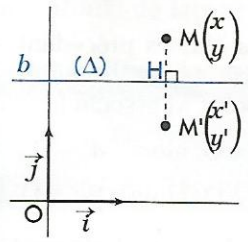
On se propose de déterminer l'expression analytique de s dans trois cas particuliers.

1. (Δ) est parallèle à l'axe des abscisses

Soit (Δ) la droite d'équation $y = b$ et H le point d'intersection des droites (MM') et (Δ).

Les points M et M' ont même abscisse et H est le milieu de [MM'].

Donc : $x' = x$ et $y + y' = 2b$.



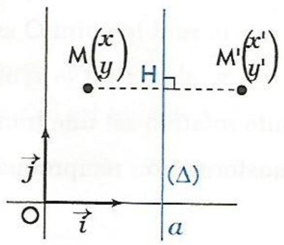
L'expression analytique de la symétrie orthogonale par rapport à la droite d'équation $y = b$ est : $\begin{cases} x' = x \\ y' = -y + 2b \end{cases}$.

2. (Δ) est parallèle à l'axe des ordonnées

Soit (Δ) la droite d'équation $x = a$ et H le point d'intersection des droites (MM') et (Δ).

Les points M et M' ont même ordonnée et H est le milieu de [MM'].

Donc : $x + x' = 2a$ et $y' = y$.



L'expression analytique de la symétrie orthogonale par rapport à la droite d'équation $x = a$ est : $\begin{cases} x' = -x + 2a \\ y' = y \end{cases}$.

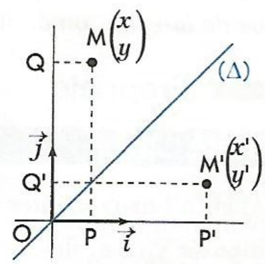
3. (Δ) est la première bissectrice du repère

(Δ) est la droite d'équation $y = x$.

Soit P, Q et P', Q' les projetés orthogonaux respectifs des points M et M' sur les axes du repère.

Les images respectives par s des points P et Q sont les points Q' et P'.

Donc : $x' = y$ et $y' = x$.



L'expression analytique de la symétrie orthogonale par rapport à la première bissectrice est : $\begin{cases} x' = y \\ y' = x \end{cases}$.

Exercices

1.a A, B et C sont trois points non alignés. Démontrer qu'il existe un et un seul point O tel que : $t_{\overrightarrow{OA}} \circ t_{\overrightarrow{OB}} \circ t_{\overrightarrow{OC}} = Id$.

1.b ABCD est un parallélogramme.
Démontrer que : $t_{\overrightarrow{AC}} \circ t_{\overrightarrow{BD}} = t_{\overrightarrow{AD}} \circ t_{\overrightarrow{BC}}$.

1.c Soit ABC un triangle et G son centre de gravité. Démontrer que :
$t_{\overrightarrow{GB}} \circ t_{\overrightarrow{GC}} (A) = t_{\overrightarrow{GC}} \circ t_{\overrightarrow{GA}} (B) = t_{\overrightarrow{GA}} \circ t_{\overrightarrow{GB}} (C) = G$.

1.d Soit ABC un triangle équilatéral et A', B', C' les milieux respectifs de [BC], [CA], [AB].

1. Quelle est la nature de la transformation $s_{(BC)} \circ s_{(B'C')}$?
2. Déterminer la droite (Δ) telle que : $s_{(AA')} \circ s_{\Delta} = t_{\overrightarrow{BC}}$.

1.e Le plan est muni du repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
Soit s la symétrie orthogonale d'axe (Δ) d'équation $x = -3$ et t la translation de vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$.
Déterminer les expressions analytiques des transformations s, t, puis $t \circ s$ et $s \circ t$.

1.f ABCD est un parallélogramme. Citer une translation transformant (AB) en (CD) et (AD) en (BC).

2 Rotations

2.1. Composée de symétries orthogonales d'axes sécants

Introduction

Dans les classes précédentes, on a vu que toute rotation est définie par un point appelé centre et un angle. La rotation de centre O et d'angle α est l'application du plan dans lui-même, notée $r(O, \alpha)$ ou r, qui à tout point M associe le point M' tel que :

- si $M = O$, alors $M' = O$;
- si $M \neq O$, alors $OM = OM'$ et $(\widehat{\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}}) = \widehat{\alpha}$.

On a également admis ou démontré les propriétés suivantes :

- si $\widehat{\alpha} = \widehat{0}$, alors r est l'application identique ; tous les points du plan sont invariants ;
- si $\widehat{\alpha} \neq \widehat{0}$, seul le point O est invariant ;
- si $\widehat{\alpha} = \widehat{\pi}$, alors r est la symétrie de centre O ;
- Toute rotation est une transformation du plan ;

la transformation réciproque de $r(O, \alpha)$ est la rotation $r(O, -\alpha)$.

Remarque

Par abus de langage, on écrit souvent « rotation d'angle α » au lieu de « rotation d'angle $\widehat{\alpha}$ ».

Propriété

Propriété

Soit (Δ) et (Δ') deux droites sécantes en un point O, de vecteurs directeurs respectifs $\vec{u}$ et $\vec{u}'$.
La composée $s_{\Delta'} \circ s_{\Delta}$ des symétries orthogonales d'axes respectifs (Δ) et (Δ') est la rotation de centre O et d'angle $2(\widehat{\vec{u}, \vec{u}'})$.

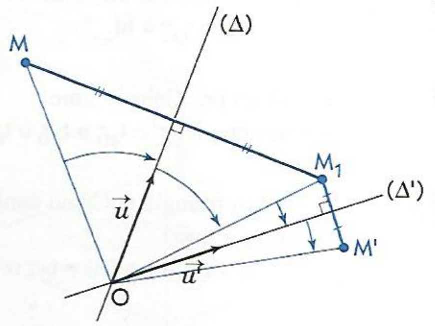
Démonstration

Le point O est invariant par $s_{\Delta'} \circ s_{\Delta}$. Soit M un point distinct de O, M_1 son symétrique par rapport à (Δ) et M' le symétrique de M_1 par rapport à (Δ').

Démontrons que : $\begin{cases} OM = OM' \\ (\widehat{\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}}) = 2(\widehat{\vec{u}, \vec{u}'}) \end{cases}$.

On a : $OM = OM_1$ et $OM_1 = OM'$; donc : $OM = OM'$;

$$\begin{aligned}(\widehat{\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}}) &= (\widehat{\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM_1}}) + (\widehat{\overrightarrow{OM_1}, \overrightarrow{OM'}}) \\ &= 2(\widehat{\vec{u}, \overrightarrow{OM_1}}) + 2(\widehat{\overrightarrow{OM_1}, \vec{u}'}) \\ &= 2(\widehat{\vec{u}, \vec{u}'}).\end{aligned}$$



Remarques

- *$s_\Delta \circ s_{\Delta'}$ est la rotation de centre O et d'angle $2(\widehat{\vec{u'}, \vec{u}})$; les transformations $s_\Delta \circ s_{\Delta'}$ et $s_{\Delta'} \circ s_\Delta$ sont donc réciproques l'une de l'autre.*
- *Si (Δ) et (Δ') sont perpendiculaires, alors $2(\widehat{\vec{u}, \vec{u'}}) = \pi$ et $s_{\Delta'} \circ s_\Delta$ est la symétrie de centre O.*

Décomposition d'une rotation

D'après l'étude précédente, toute rotation d'angle non nul peut s'écrire d'une infinité de façons comme composée de deux symétries orthogonales d'axes sécants.

Propriété

Soit $r(O, \alpha)$ une rotation de centre O et d'angle α.

Pour toute droite (Δ) passant par O, il existe une droite (Δ') et une seule telle que : $s_{\Delta'} \circ s_\Delta = r(O, \alpha)$.

Démonstration

Existence

Soit $\vec{u}$ un vecteur directeur de (Δ) et $\vec{u'}$ un vecteur tel que $(\widehat{\vec{u}, \vec{u'}})$ a pour mesure $\frac{\alpha}{2}$.

D'après l'étude précédente, la droite (Δ') passant par O et de vecteur directeur $\vec{u'}$ est telle que :

$s_{\Delta'} \circ s_\Delta = r(O, \alpha)$.

Unicité

Soit (Δ'') une droite telle que : $s_{\Delta''} \circ s_\Delta = r(O, \alpha)$.

Démontrons que les droites (Δ') et (Δ'') sont confondues.

On a : $s_{\Delta'} \circ s_\Delta = s_{\Delta''} \circ s_\Delta \Rightarrow (s_{\Delta'} \circ s_\Delta) \circ s_\Delta = (s_{\Delta''} \circ s_\Delta) \circ s_\Delta$

$\Rightarrow s_{\Delta'} \circ (s_\Delta \circ s_\Delta) = s_{\Delta''} \circ (s_\Delta \circ s_\Delta)$

$\Rightarrow s_{\Delta'} = s_{\Delta''}$.

Les droites (Δ') et (Δ'') sont donc confondues.

Remarque

On déduit du théorème précédent que les rotations conservent les distances et les angles orientés.

Exemples

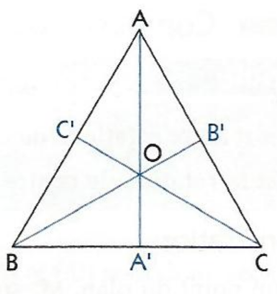
ABC est un triangle équilatéral de sens direct et de centre O.
Soit A', B', C' les milieux respectifs de [BC], [CA], [AB].

On a : $s_{(AB)} \circ s_{(AC)} = r(A, -\frac{2\pi}{3})$;

$s_{(CB)} \circ s_{(CC')} = r(C, \frac{\pi}{3})$;

$r(O, \frac{2\pi}{3}) = s_{(CC')} \circ s_{(AA')} = s_{(BB')} \circ s_{(CC')}$;

$r(B, -\frac{\pi}{3}) = s_{(BB')} \circ s_{(AB)} = s_{(BC)} \circ s_{(BB')}$.



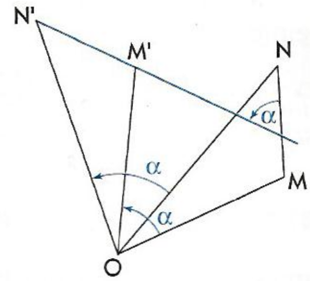
2.2. Propriété caractéristique

Propriété

Soit f une application du plan dans lui-même et $\widehat{\alpha}$ un angle non nul.

f est une rotation d'angle α si et seulement si, pour tous points M et N distincts d'images respectives M' et N', on a : MN = M'N' et $(\widehat{\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{M'N'}}) = \widehat{\alpha}$.

Démonstration guidée



On suppose que f est une rotation d'angle α.

Démontrons que pour tous points M et N distincts d'images respectives M' et N', on a : $\widehat{(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{M'N'})} = \widehat{\alpha}$.

- Soit O le centre de la rotation f.

Vérifier que : $\widehat{(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{M'N'})} = \widehat{(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{OM})} + \widehat{(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'})} + \widehat{(\overrightarrow{OM'}, \overrightarrow{M'N'})}$.

- Justifier que les angles $\widehat{(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{OM})}$ et $\widehat{(\overrightarrow{OM'}, \overrightarrow{M'N'})}$ sont opposés.

(On pourra utiliser la propriété de conservation des angles orientés par une rotation.)

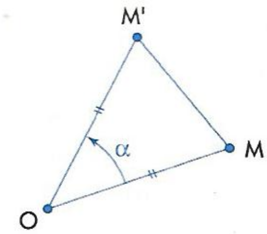
- Conclure.

Réciproquement, on suppose que f une application telle que, pour tous points M et N distincts, d'images respectives M' et N', on a : MN = M'N' et $\widehat{(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{M'N'})} = \widehat{\alpha}$.

Démontrons que f est une rotation d'angle α.

- Vérifier que si f admet un point invariant O, alors f est la rotation de centre O et d'angle α.

Démontrons maintenant que f admet un point invariant.



Soit M un point (non invariant), M' son image par f, O le point tel que le triangle OMM' soit isocèle en O et $\widehat{(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'})} = \widehat{\alpha}$.

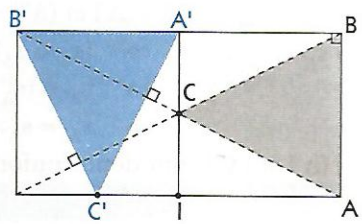
Soit O' l'image de O par f.

- Démontrer que : O'M' = OM' et $\widehat{(\overrightarrow{O'M'}, \overrightarrow{OM'})} = \widehat{0}$.

(On pourra introduire le vecteur $\overrightarrow{OM}$ à l'aide de la relation de Chasles sur les angles orientés.)

- Conclure.

Exemple



Sur la figure ci-contre, les images des points A, B et C par la rotation $r(I, \frac{\pi}{2})$ sont respectivement A', B' et C'.

Si $\widehat{\delta}$ est l'angle orienté de mesure $\frac{\pi}{2}$, on a donc :

$\widehat{(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'})} = \widehat{(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{B'C'})} = \widehat{(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{C'A'})} = \widehat{\delta}$.

2.3. Composée de rotations

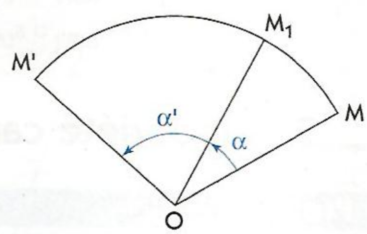
Composée de deux rotations de même centre

Propriété

Soit r et r' deux rotations de centre O et d'angles respectifs α et α'.

r' o r est la rotation de centre O et d'angle $\alpha + \alpha'$.

Démonstration



Soit M un point du plan, M_1 son image par r et M' l'image de M_1 par r'.

On a : $\begin{cases} OM = OM_1 \\ \widehat{(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM_1})} = \widehat{\alpha} \end{cases}$ et $\begin{cases} OM_1 = OM' \\ \widehat{(\overrightarrow{OM_1}, \overrightarrow{OM'})} = \widehat{\alpha'} \end{cases}$.

Donc : $\begin{cases} OM = OM' \\ \widehat{(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'})} = \widehat{\alpha} + \widehat{\alpha'}. \end{cases}$

Cas particuliers

- *Si $\widehat{\alpha} + \widehat{\alpha'} = \widehat{0}$, alors r' o r est l'application identique.*
- *Si $\widehat{\alpha} + \widehat{\alpha'} = \widehat{\pi}$, alors r' o r est la symétrie de centre O.*

Remarques

- *Pour tout couple (α, α') de nombres réels, on a : $\alpha' + \alpha = \alpha + \alpha'$; donc : $r \circ r' = r' \circ r$.*

On dit que la composition des rotations de même centre est commutative.

- *Si $\alpha' = -\alpha$, on obtient : $r(O, -\alpha) \circ r(O, \alpha) = r(O, \alpha) \circ r(O, -\alpha) = Id$.*

Nous retrouvons la relation caractérisant les bijections réciproques $r(O, -\alpha)$ et $r(O, \alpha)$.

Composée de deux rotations de centres distincts

Propriété

Soit r et r' deux rotations de centres distincts et d'angles respectifs α et α'.

- **si $\widehat{\alpha} + \widehat{\alpha'} \neq \widehat{0}$, alors $r' \circ r$ est une rotation d'angle $\alpha + \alpha'$;**
- **si $\widehat{\alpha} + \widehat{\alpha'} = \widehat{0}$, alors $r' \circ r$ est une translation.**

Démonstration

Soit M et N deux points distincts.

Posons $r(M) = M_1$, $r(N) = N_1$, $r'(M_1) = M'$, $r'(N_1) = N'$.

D'après la propriété caractéristique des rotations, on a : $(\widehat{\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{M_1N_1}}) = \widehat{\alpha}$ et $(\widehat{\overrightarrow{M_1N_1}, \overrightarrow{M'N'}}) = \widehat{\alpha'}$.

Ainsi : $(\widehat{\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{M'N'}}) = (\widehat{\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{M_1N_1}}) + (\widehat{\overrightarrow{M_1N_1}, \overrightarrow{M'N'}}) = \widehat{\alpha} + \widehat{\alpha'}$.

De plus : $M'N' = M_1N_1 = MN$.

Donc, d'après les propriétés caractéristiques des rotations et des translations :

- si $\widehat{\alpha} + \widehat{\alpha'} \neq \widehat{0}$, alors $r' \circ r$ est une rotation d'angle $\alpha + \alpha'$;
- si $\widehat{\alpha} + \widehat{\alpha'} = \widehat{0}$, alors $r' \circ r$ est une translation.

Cette démonstration ne donne aucune indication sur le centre de la rotation (ou le vecteur de la translation) $r' \circ r$.

Construction du centre de la rotation $r' \circ r$ $(\widehat{\alpha} + \widehat{\alpha'} \neq \widehat{0})$

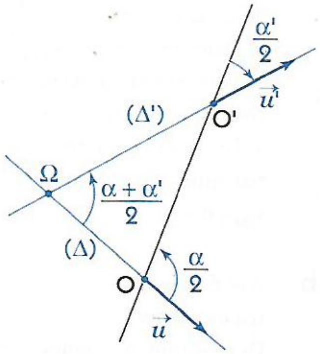
Soit O et O' les centres respectifs des rotations r et r'.

- Construire la droite (Δ') telle que : $r' = s_{\Delta'} \circ s_{(OO')}$.

(Δ') est la droite passant par O' et de vecteur directeur $\vec{u'}$ tel que $(\widehat{\overrightarrow{OO'}, \vec{u'}})$ a pour mesure $\frac{\alpha'}{2}$.

- Construire la droite (Δ) telle que : $r = s_{(OO')} \circ s_{\Delta}$.

(Δ) est la droite passant par O et de vecteur directeur $\vec{u}$ tel que $(\widehat{\vec{u}, \overrightarrow{OO'}})$ a pour mesure $\frac{\alpha}{2}$.



On a : $r' \circ r = (s_{\Delta'} \circ s_{(OO')}) \circ (s_{(OO')} \circ s_{\Delta}) = s_{\Delta'} \circ s_{\Delta}$.

De plus : $(\widehat{\vec{u}, \vec{u'}}) = (\widehat{\vec{u}, \overrightarrow{OO'}}) + (\widehat{\overrightarrow{OO'}, \vec{u'}})$;

donc, $(\widehat{\vec{u}, \vec{u'}})$ a pour mesure $\frac{\alpha + \alpha'}{2}$.

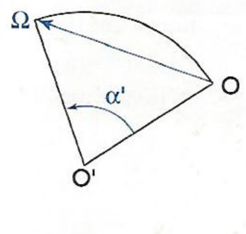
$\alpha + \alpha' \neq \widehat{0}$, donc l'angle orienté $(\widehat{\vec{u}, \vec{u'}})$ n'est ni nul, ni plat ; les droites (Δ) et (Δ') sont donc sécantes en un point Ω.

Ω est un point invariant par $r' \circ r$; $r' \circ r$ est donc la rotation de centre Ω et d'angle $\alpha + \alpha'$.

Construction du vecteur de la translation $r' \circ r$ $(\widehat{\alpha} + \widehat{\alpha'} = \widehat{0})$

Le vecteur de la translation $r' \circ r$ est le vecteur $\vec{u} = \overrightarrow{O\Omega}$, tel que :

$\Omega = r' \circ r(O) = r'(O)$.



Cas particulier

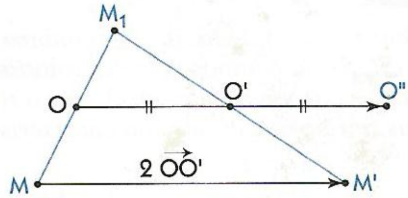
• *Si* $\widehat{\alpha} = \widehat{\alpha'} = \widehat{\pi}$, *alors* $r(O, \alpha) = s_O$ *et* $r'(O', \alpha') = s_{O'}$.

De plus : $\widehat{\alpha} + \widehat{\alpha'} = \widehat{0}$ *; donc, r' o r est une translation.*

Soit $O'' = s_{O'}(O)$ *; on a :* $s_{O'} \circ s_O(O) = O''$ *et* $\overrightarrow{OO''} = 2\,\overrightarrow{OO'}$.

Donc : $r' \circ r = t_{2\overrightarrow{OO'}}$.

La composée de deux symétries centrales est une translation.



Remarque

Dans le cas particulier précédent, on a : $r' \circ r = t_{2\overrightarrow{OO'}}$ *et* $r \circ r' = t_{2\overrightarrow{O'O}}$.
La composition de deux rotations de centres distincts n'est pas commutative.

Exemples

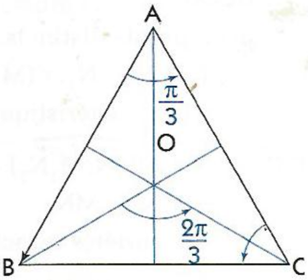
Soit ABC un triangle équilatéral de centre O et de sens direct.
On considère les rotations r et r' de centres respectifs A et C, d'angle $\frac{\pi}{3}$.

• r' o r est une rotation d'angle $\frac{2\pi}{3}$.

De plus : r' o r(A) = B et r' o r(B) = C ; donc, le centre de cette rotation est le point d'intersection des médiatrices des segments [AB] et [BC], c'est-à-dire le point O .

• $r' \circ r^{-1}$ est une translation.

De plus : $r' \circ r^{-1}(A) = B$; donc : $r' \circ r^{-1} = t_{\overrightarrow{AB}}$.



Exercices

2.a ABC est un triangle équilatéral de centre O et de sens direct.

1. Démontrer que : $s_{(OA)} \circ s_{(OB)} = s_{(OB)} \circ s_{(OC)}$.

2. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la transformation $s_{(OA)} \circ s_{(OB)} \circ s_{(OC)}$.

3. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques des transformations $s_{(AB)} \circ s_{(AC)}$ et $s_{(BC)} \circ s_{(OA)}$.

2.b ABCD est un carré. Soit (Δ) et (Δ') les médiatrices respectives de [AB] et [BC].
Déterminer les images des points A, B, C et D par la transformation $s_{\Delta'} \circ s_{\Delta}$.
Quelle est la nature de cette transformation ?

2.c ABCD est un rectangle direct tel que AB = 2 AD et O est le milieu du segment [CD].
Déterminer la nature et les éléments caractéristiques des transformations suivantes :

• $s_{(OA)} \circ s_{(OB)}$; • $s_{(OA)} \circ s_{(OD)}$;

• $s_{(OA)} \circ s_{(OB)} \circ s_{(OC)} \circ s_{(OD)}$.

2.d ABCD est un carré de centre O et de sens direct. On considère les rotations :
$r_1 = r\left(B, \frac{\pi}{2}\right)$; $r_2 = r\left(A, \frac{\pi}{2}\right)$; $r_3 = r\left(O, -\frac{\pi}{2}\right)$.

1. Déterminer l'image de C par $r_2 \circ r_1$; en déduire la nature et l'élément caractéristique de $r_2 \circ r_1$.

2. Déterminer l'image de C par $r_3 \circ r_1$; en déduire la nature et l'élément caractéristique de $r_3 \circ r_1$.

3. Déterminer la nature et l'élément caractéristique de $r_3 \circ r_2$.

2.e ABC est un triangle équilatéral de sens direct.
On pose : $f = r\left(A, \frac{\pi}{3}\right) \circ r\left(B, \frac{\pi}{3}\right) \circ r\left(C, \frac{\pi}{3}\right)$.
Déterminer la nature et l'élément caractéristique de f.

2.f ABCD est un carré de sens direct.
Démontrer que :
$r\left(A, \frac{\pi}{2}\right) \circ r\left(B, \frac{\pi}{2}\right) \circ r\left(C, \frac{\pi}{2}\right) \circ r\left(D, \frac{\pi}{2}\right) = \text{Id}$.

3 Isométries

3.1. Définition et propriétés fondamentales

Introduction

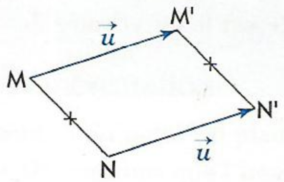
Définition

On appelle isométrie plane toute application du plan dans lui-même qui conserve la distance.

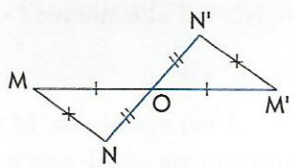
Pour tous points M et N du plan d'images respectives M' et N', on a : M'N' = MN.

Exemples

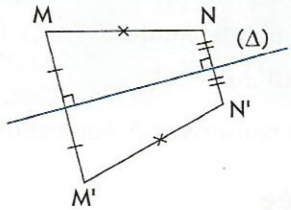
Les translations, les symétries centrales, les symétries orthogonales et les rotations sont des isométries.



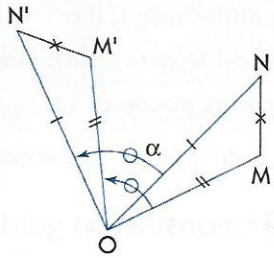
translation $t_{\vec{u}}$.



symétrie s_O.



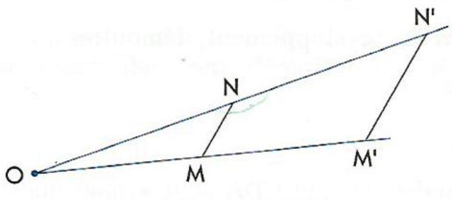
symétrie s_Δ.



rotation r(O,α).

Contre-exemple

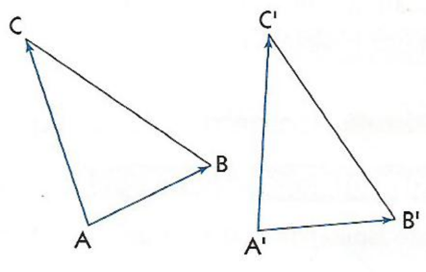
Une homothétie de rapport 2 n'est pas une isométrie, car elle ne conserve pas les distances.



M'N' = 2MN

Conservation du produit scalaire

Soit f une isométrie, A, B, C trois points et A', B', C' leurs images respectives par f.



• Exprimer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ en fonction de AB^2, AC^2 et BC^2.

(On pourra utiliser l'expression du produit scalaire :

$\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2)$.

• Exprimer $\overrightarrow{A'B'}.\overrightarrow{A'C'}$ en fonction de $A'B'^2$, $A'C'^2$ et $B'C'^2$.

En déduire que : $\overrightarrow{A'B'}.\overrightarrow{A'C'} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$.

Cette propriété se généralise de la façon suivante.

Propriété

Soit f une isométrie.

Pour tous points A, B, C, D d'images respectives A', B', C', D' par f, on a : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{A'B'}.\overrightarrow{C'D'}$.

On dit que les isométries conservent le produit scalaire.

Démonstration guidée

- Justifier que : $\overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{A'B'} \cdot (\overrightarrow{A'D'} - \overrightarrow{A'C'})$.
- Conclure.

Conservation du barycentre

ABC est un triangle. On désigne par I le milieu de [BC] et par G le centre de gravité de ABC. Soit A', B', C', I' et G' les images respectives des points A, B, C, I et G par une isométrie.

- Démontrer que I est le milieu de [BC].
- Démontrer que : $A'G' = \frac{2}{3}A'I'$. En déduire que G' est le centre de gravité de A'B'C'.

Cette propriété se généralise de la façon suivante.

Propriété

Soit f une isométrie, (A,a), (B,b), (C,c) des points pondérés et A', B', C' les images respectives des points A, B, C par f, G un point et G' son image par f.
G est le barycentre des points pondérés (A,a), (B,b), (C,c) si et seulement si G' est le barycentre des points pondérés (A',a), (B',b), (C',c).

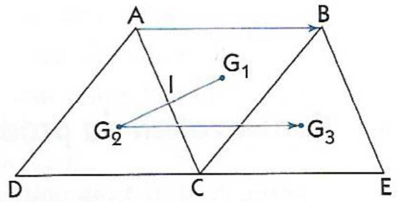
On dit que les isométries conservent le barycentre.

Démonstration guidée

- Vérifier que G est le barycentre des points pondérés (A,a), (B,b), (C,c) si et seulement si :
$(a\overrightarrow{GA} + b\,\overrightarrow{GB} + c\,\overrightarrow{GC})^2 = 0$.
- À l'aide d'un développement, démontrer que : $(a\overrightarrow{GA} + b\,\overrightarrow{GB} + c\,\overrightarrow{GC})^2 = (a\,\overrightarrow{G'A'} + b\,\overrightarrow{G'B'} + c\,\overrightarrow{G'C'})^2$.
- Conclure.

Exemples

- Les triangles ABC et CDA sont symétriques par rapport au point I, milieu de [AC], donc leurs barycentres G_1 et G_2 sont symétriques par rapport à I.
- Le triangle BCE est l'image du triangle ADC par la translation t de vecteur $\overrightarrow{AB}$, donc G_3, image de G_2 par t, est le barycentre du triangle BCE.



Isométries réciproques

Propriété

Toute isométrie plane est une transformation et sa réciproque est une isométrie plane.

Démonstration guidée

Soit f une isométrie plane.

- Démontrer que f est injective.

Démontrons que f est surjective.

Soit (O, I, J) un repère orthonormé et O', I', J' les images respectives des points O, I, J par f.

- Vérifier que (O', I', J') est un repère orthonormé.

Soit M' un point du plan et (x',y') ses coordonnées relativement au repère (O', I', J').

- Vérifier que M' est le barycentre des points pondérés (I', x'), (J', y') et $(O', 1 - x' - y')$.

Soit M le barycentre des points pondérés (I, x'), (J, y') et $(O, 1 - x' - y')$.

- Vérifier que M a pour image M' par f ; en conclure que f est surjective.
- Démontrer que f est une transformation.
- Démontrer que f^{-1} conserve les distances.

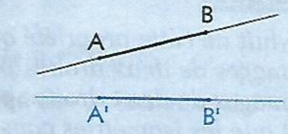
3.2. Isométries et configurations

Images de figures usuelles

Propriété 1

Soit f une isométrie, A et B deux points distincts, d'images respectives A' et B' par f.

- **L'image par f de la droite (AB) est la droite (A'B').**
- **L'image par f du segment [AB] est le segment [A'B'].**
- **L'image par f de la demi-droite [AB) est la demi-droite [A'B').**



Démonstration

Soit M un point du plan et M' son image par f.

- Démontrons que l'image d'une droite est une droite.

$$\begin{aligned} M \in (AB) &\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R}, \overrightarrow{AM} = k\,\overrightarrow{AB} \\ &\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R}, M = \mathrm{bar}\{(A\,;\,1-k), (B\,;\,k)\} \\ &\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R}, M' = \mathrm{bar}\{(A'\,;\,1-k), (B'\,;\,k)\} \\ &\Leftrightarrow M' \in (A'B'). \end{aligned}$$

- On démontre de même les deux autres résultats en remplaçant, dans cette démonstration, $\mathbb{R}$ par $[0\,;\,1]$ puis par $\mathbb{R}^+$.

Remarque

On déduit de la propriété 1 que l'image d'un ensemble de points alignés par une isométrie est un ensemble de points alignés.
On dit que les isométries conservent l'alignement.

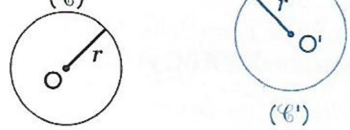
Propriété 2

Soit f une isométrie, $(\mathscr{C})$ un cercle de centre O et de rayon r et O' l'image de O par f.
L'image par f du cercle $(\mathscr{C})$ est le cercle de centre O' et de rayon r.

Démonstration

Soit $(\mathscr{C}')$ le cercle de centre O' et de rayon r, M un point du plan.

$$\begin{aligned} M \in (\mathscr{C}) &\Leftrightarrow OM = r \\ &\Leftrightarrow O'M' = r \\ &\Leftrightarrow M' \in (\mathscr{C}'). \end{aligned}$$



Vocabulaire

Une figure est dite globalement invariante par une transformation si elle est sa propre image par cette transformation. Ainsi, toute droite perpendiculaire à l'axe d'une symétrie orthogonale est globalement invariante par cette symétrie orthogonale.

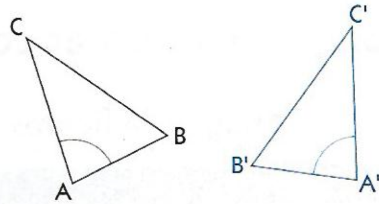
Conservation des mesures d'angles

Propriété

Soit f une isométrie, ABC un triangle et A',B', C' les images respectives des points A, B, C par f.
On a : $\widehat{BAC} = \widehat{B'A'C'}$.

On dit que les isométries conservent les angles non orientés.

Démonstration guidée



- Démontrer que : $\cos \widehat{BAC} = \cos \widehat{B'A'C'}$

(*on pourra remarquer que :* $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos\widehat{BAC}$).

- Conclure.

Remarques

On déduit de cette propriété que par une isométrie :
- *les images de deux droites perpendiculaires sont deux droites perpendiculaires ;*
- *les images de deux droites parallèles sont deux droites parallèles.*

On dit que les isométries conservent le parallélisme et l'orthogonalité.

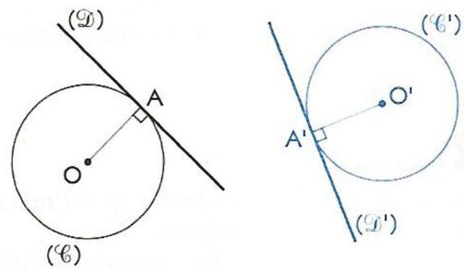
Conservation du contact

Propriété

Soit f une isométrie, $(\mathscr{D})$ une droite, A un point de $(\mathscr{D})$, $(\mathscr{C})$ un cercle tangent à $(\mathscr{D})$ en A et $(\mathscr{D}')$, A', $(\mathscr{C}')$ les images respectives de $(\mathscr{D})$, A, $(\mathscr{C})$ par f.
La droite $(\mathscr{D}')$ est tangente au cercle $(\mathscr{C}')$ en A'.

On dit que les isométries conservent le contact entre un cercle et une droite.

Démonstration



Le point A appartient au cercle $(\mathscr{C})$ et à la droite $(\mathscr{D})$, donc le point A' appartient au cercle $(\mathscr{C}')$et à la droite $(\mathscr{D}')$. Soit O le centre du cercle $(\mathscr{C})$ et O' son image par f. O' est le centre du cercle $(\mathscr{C}')$; les isométries conservent l'orthogonalité, donc : $(O'A') \perp (\mathscr{D}')$.

La droite $(\mathscr{D}')$ est donc tangente au cercle $(\mathscr{C}')$ en A'.

Remarque

On déduit de cette propriété que deux cercles tangents[1] ont pour images deux cercles tangents. On dit que les isométries conservent le contact entre deux cercles.
Plus généralement, on admettra que les isométries conservent le contact.

Conservation des aires

Propriété

Soit f une isométrie, ABC un triangle et A',B', C' les images respectives des points A, B, C par f.
Les triangles ABC et A'B'C' ont même aire.

On dit que les isométries conservent l'aire des triangles.

Démonstration

L'aire du triangle ABC est : $\frac{1}{2}(AB \times AC \times \sin\widehat{BAC})$.

Les isométries conservent les distances et les angles non orientés, elles conservent donc aussi l'aire des triangles.

[1]. *On dit que deux cercles sont tangents en un point A s'ils passent tous les deux par A et si leurs tangentes en ce point sont confondues.*

Remarque

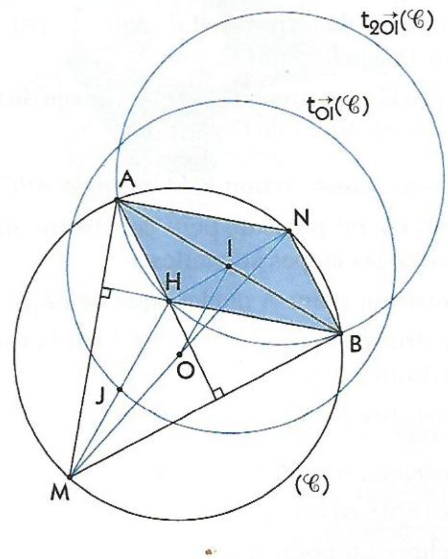
L'image d'un cercle étant un cercle de même rayon, les isométries conservent aussi l'aire des cercles. Plus généralement, on admettra que les isométries conservent les aires.

3.3. Utilisations des isométries

Isométries et recherche de lieux géométriques

Soit $(\mathscr{C})$ un cercle de centre O, A et B deux points de $(\mathscr{C})$, I le milieu du segment [AB].
M étant un point du cercle $(\mathscr{C})$, distinct de A et B, on désigne par N le point diamétralement opposé à M sur $(\mathscr{C})$, H l'orthocentre du triangle MAB.
1°) Quelle est la nature du quadrilatère AHBN ?
2°) Comparer les vecteurs $\overrightarrow{OI}$ et $\overrightarrow{MH}$.
3°) Quel est le lieu des points H lorsque M décrit $(\mathscr{C})$ privé des points A et B ?
4°) Quel est le lieu des points J, milieu de [MH], lorsque M décrit $(\mathscr{C})$ privé des points A et B ?

Solution



1°) Les droites (AH) et (BN) sont parallèles, car elles sont toutes deux perpendiculaires à (BM).

De même, les droites (AN) et (BH) sont parallèles.

Le quadrilatère AHBN est donc un parallélogramme.

2°) Ses diagonales [HN] et [AB] se coupent en leur milieu I. D'après la propriété de la droite des milieux appliquée au triangle MHN, on a : $\overrightarrow{MH} = 2\,\overrightarrow{OI}$.

3°) On désigne par $(\mathscr{E})$ le cercle $(\mathscr{C})$ privé des points A et B.

H est l'image de M par la translation $t_{2\overrightarrow{OI}}$, donc H décrit $t_{2\overrightarrow{OI}}(\mathscr{E})$.

On remarque que H peut également être défini comme le symétrique de N par rapport à I. Lorsque M décrit $(\mathscr{E})$, N décrit également $(\mathscr{E})$, donc H décrit $s_I(\mathscr{E})$.

Les deux ensembles trouvés sont égaux.

4°) J est milieu de [MH], donc : $\overrightarrow{MJ} = \overrightarrow{OI}$ et $J = t_{\overrightarrow{OI}}(M)$.

Par conséquent, J décrit $t_{\overrightarrow{OI}}(\mathscr{E})$.

M

Pour résoudre un problème de lieu géométrique à l'aide des transformations, on se ramène à la situation suivante : le point P', dont on cherche le lieu, est l'image par une transformation d'un point P, décrivant un ensemble connu.

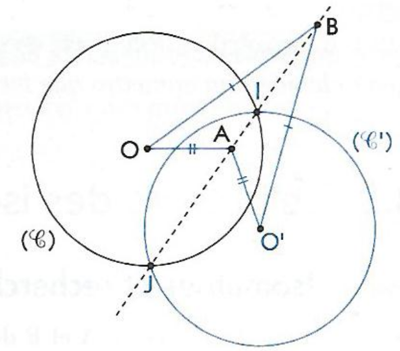
La résolution se fait en deux étapes :

- reconnaître une transformation f qui, au point P, associe le point P' ;
- déterminer l'image par f de l'ensemble $(\mathscr{E})$ décrit par le point P.

Isométries et problèmes de construction

1. Soit $(\mathscr{C})$ un cercle de centre O, A et B deux points tels que O n'appartienne pas à la droite (AB). Construire, au compas, les points d'intersection de la droite (AB) et du cercle $(\mathscr{C})$.

Solution



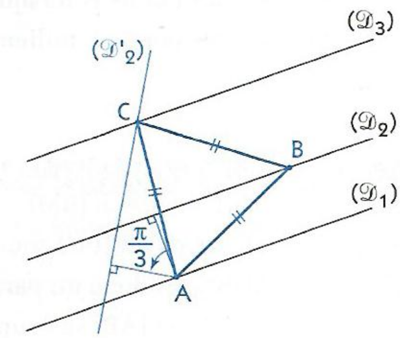
Si on considère le cercle (𝒞'), image de (𝒞) par la symétrie orthogonale d'axe (AB), les points communs aux cercles (𝒞) et (𝒞') appartiennent à la droite (AB).

D'où la construction suivante :

- construire le point O', image de O par la symétrie orthogonale d'axe (AB) ;
- tracer le cercle (𝒞') de centre O' et de même rayon que (𝒞) ;
- I et J, points d'intersection des cercles (𝒞) et (𝒞'), sont les points d'intersection de la droite (AB) et du cercle (𝒞).

2. Soit $(\mathscr{D}_1)$, $(\mathscr{D}_2)$ et $(\mathscr{D}_3)$ trois droites distinctes parallèles.
Construire un triangle équilatéral ABC tel que : $A \in (\mathscr{D}_1)$, $B \in (\mathscr{D}_2)$ et $C \in (\mathscr{D}_3)$.

Solution



Analyse d'une figure répondant à la question.

Soit ABC un triangle équilatéral, de sens direct, tel que :

$A \in (\mathscr{D}_1)$, $B \in (\mathscr{D}_2)$ et $C \in (\mathscr{D}_3)$.

La configuration « triangle équilatéral » conduit à considérer la rotation r de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$, par laquelle le point B a pour image le point C.

Le point C appartient à $(\mathscr{D}_3)$ et à l'image de $(\mathscr{D}_2)$ par r ; le point B est l'antécédent de C par r.

Synthèse : construction d'un triangle ABC.

D'après ce qui précède, pour construire un triangle ABC de sens direct répondant à la question, il suffit de suivre les étapes suivantes :

- choisir un point A quelconque de $(\mathscr{D}_1)$;
- construire l'image $(\mathscr{D}'_2)$ de $(\mathscr{D}_2)$ par la rotation r de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$; cette droite coupe la droite $(\mathscr{D}_3)$ en C ;
- construire le point B, antécédent de C par r.

Discussion : le problème a-t-il plusieurs solutions ?

Deux choix se sont présentés au cours de la construction :

- le choix du point A sur la droite $(\mathscr{D}_1)$;
- le choix du sens du triangle ABC, donc de l'angle de la rotation r.

Soit $\vec{u}$ un vecteur directeur des droites $(\mathscr{D}_1)$, $(\mathscr{D}_2)$ et $(\mathscr{D}_3)$, et (Δ) une droite orthogonale à ces trois droites. Connaissant un triangle ABC solution, les translations de vecteur $k\,\vec{u}$ $(k \neq 0)$ permettent de construire tous les triangles solutions de même sens et les symétries orthogonales s_Δ permettent de construire tous les triangles solutions de sens contraire.

M

Pour résoudre un problème de construction, on procède généralement en deux étapes : analyse et synthèse.

- L'analyse consiste à supposer le problème résolu et à étudier une figure répondant à la question pour en dégager les propriétés permettant sa construction.
- La synthèse consiste à construire la figure en utilisant les propriétés dégagées dans l'analyse, à justifier que la figure construite répond à la question et, éventuellement, à discuter le nombre de solutions au problème.

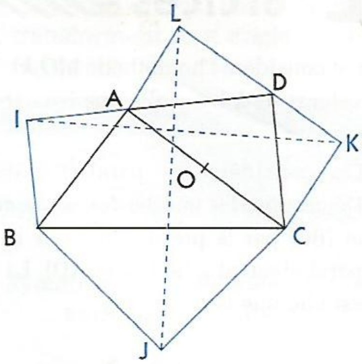
Isométries et démonstrations de propriétés

Soit ABCD un quadrilatère convexe de sens direct. On construit, à l'extérieur de ce quadrilatère, les triangles rectangles isocèles IAB, JBC, KCD, LDA de sommets respectifs I, J, K, L. On désigne par O le milieu de [AC].

1°) Soit r_I et r_J les quarts de tour directs de centres respectifs I et J. Étudier la transformation $r_I \circ r_J$. En déduire que le triangle OIJ est rectangle isocèle en O.

2°) Démontrer de même que le triangle OKL est rectangle isocèle en O.

3°) Démontrer que IK = JL et que les droites (IK) et (JL) sont perpendiculaires.



Solution

1°) La composée de deux quarts de tour est une symétrie centrale.

De plus, $r_I \circ r_J$ (C) = A. Donc, le centre de cette symétrie est le milieu O de [AC].

On a : $r_I \circ r_J$ (J) = s_O (J) = J', avec O milieu de [JJ'] ;

donc : r_I (J) = s_O (J) = J' ; le triangle JIJ' est rectangle isocèle en I et O est milieu de [JJ'].

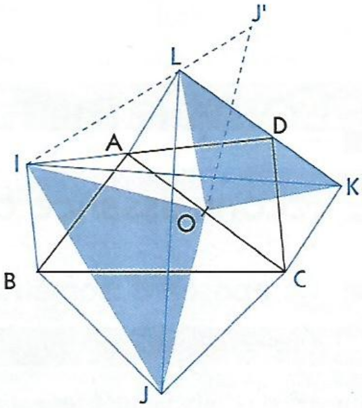
Donc, le triangle OIJ est rectangle isocèle en O.

2°) On démontrerait de même que, si r_K et r_L sont les quarts de tour directs de centres respectifs K et L, alors : $r_K \circ r_L = s_O$ et le triangle OKL est rectangle isocèle en O.

3°) Soit r le quart de tour direct de centre O.

L'image par r du segment [IK] est le segment [JL].

Donc, IK = JL et les droites (IK) et (JL) sont perpendiculaires.



M

Configurations géométriques et transformations

Pour résoudre un problème de géométrie (lieu, construction, démonstration d'une propriété, ...), une transformation peut s'avérer utile. Le choix de cette transformation est suggéré par la configuration géométrique existante ou à construire :

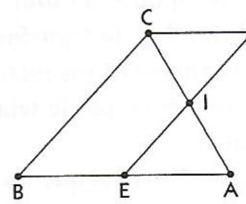
- points alignés, droites concourantes : toutes isométries et homothétie ;
- orthogonalité, parallélisme : toutes isométries et homothétie ;
- triangle isocèle : symétrie orthogonale ;
- triangle rectangle isocèle : symétrie orthogonale, quart de tour ;
- triangle équilatéral : symétrie orthogonale, rotations d'angle $\frac{\pi}{3}$ ou $\frac{2\pi}{3}$;
- parallélogramme : symétrie centrale, translation ;
- rectangle, losange : symétrie centrale, symétrie orthogonale ;
- carré : symétrie centrale, symétrie orthogonale, quart de tour ;
- configuration de Thalès : homothétie.

Exercices

3.a On considère l'homothétie h(O,k). Pour quelles valeurs de k h est-elle une isométrie ?

3.b On considère un parallélogramme ABCD. Déterminer les images des segments [AB], [AC] et [BC] par la projection p sur la droite (DC), parallèlement à la droite (AD). La projection p est-elle une isométrie ?

3.c BCDE est un parallélogramme, I est le milieu du segment [DE] et A est le point d'intersection des droites (CI) et (BE).
1. Démontrer que les triangles CID et AIE sont symétriques par rapport au point I.
2. Comparer l'aire du parallélogramme BCDE et celle du triangle ABC.



3.d Trouver les isométries laissant globalement invariants les polygones suivants :
a) un triangle isocèle, un triangle équilatéral ;
b) un parallélogramme, un rectangle, un losange.

4 Compléments sur les isométries

4.1. Reconnaissance des isométries

Composée d'isométries

Propriété

- **La composée de deux isométries est une isométrie.**
- **La réciproque d'une isométrie est une isométrie.**

Démonstration

Soit f et g deux isométries. On sait que f^{-1} est une isométrie ; démontrons que f o g est une isométrie.
f et g sont des transformations, f o g est donc une transformations.
De plus, f et g conservent les distances, il en est donc de même pour f o g.
Ainsi, f o g est une isométrie.

Vocabulaire

Un groupe de transformations du plan est un ensemble (E) de transformations tel que :
– la composée de deux éléments de (E) est un élément de (E) ;
– la réciproque d'un élément de (E) est un élément de (E).

Exemples

- La composée de deux translations est une translation et la réciproque d'une translation est une translation. L'ensemble des translations est un groupe de transformations du plan.
- De même, l'ensemble des rotations de centre O et l'ensemble des isométries planes sont des groupes de transformations du plan.

Contre-exemple

L'ensemble des symétries orthogonales n'est pas un groupe de transformations.
En effet la composée de deux symétries d'axes parallèles est une translation et non une symétrie.

Déplacements et antidéplacements

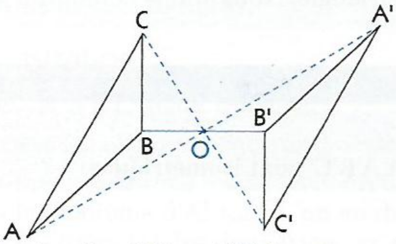
Parmi les isométries connues, on constate que certaines, comme les translations, conservent les angles orientés, alors que d'autres, comme les symétries orthogonales, transforment tout angle orienté en son opposé. Ces résultats conduisent à distinguer deux sortes d'isométries.

Définitions

- **Un déplacement est une isométrie qui conserve les angles orientés.**
- **Un antidéplacement est une isométrie qui transforme tout angle orienté en son opposé.**

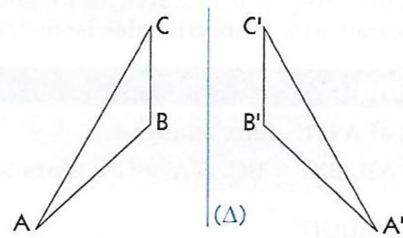
Exemples

Les translations, les symétries centrales, les rotations sont des déplacements.



Les triangles ABC et A'B'C' sont orientés dans le même sens.

Les symétries orthogonales sont des antidéplacements.



Les triangles ABC et A'B'C' sont orientés en sens contraire.

On en déduit les propriétés suivantes.

Propriétés

Soit f et g deux isométries planes.

- **Si f et g sont des déplacements, alors g o f est un déplacement.**
- **Si f et g sont des antidéplacements, alors g o f est un déplacement.**
- **Si f est un déplacement et g un antidéplacement, alors g o f et f o g sont des antidéplacements.**
- **Si f est un déplacement, alors f^{-1} est un déplacement.**
- **Si f est un antidéplacement, alors f^{-1} est un antidéplacement.**

Remarques

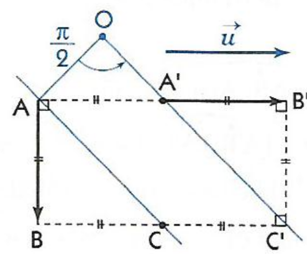
- *L'ensemble des déplacements est un groupe de transformations du plan.*
- *L'ensemble des antidéplacements n'est pas un groupe de transformations du plan car la composée de deux antidéplacements est un déplacement.*

Exemples

- Sur la figure ci-contre, les segments [AB] et [A'B'] sont isométriques ; le couple (A', B') est l'image du couple (A, B) par les isométries suivantes :

a) $t_{\vec{u}} \circ r(A, \frac{\pi}{2}) = r(A', \frac{\pi}{2}) \circ t_{\vec{u}} = r(O, \frac{\pi}{2})$ *(déplacement) ;*

b) $t_{\vec{u}} \circ s_{(AC)} = s_{(A'C')} \circ t_{\vec{u}}$ *(antidéplacement).*



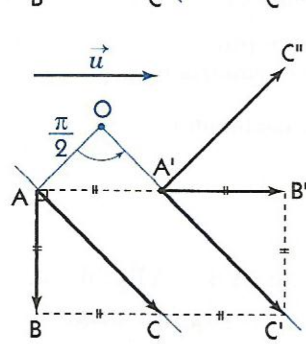
- Sur la figure ci-contre,

on a : AB = A'B', AC = A'C'' et $(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}) = (\widehat{\overrightarrow{A'B'},\overrightarrow{A'C''}})$, donc le triplet (A', B', C'') est l'image du triplet (A, B, C) par le déplacement :

$t_{\vec{u}} \circ r(A, \frac{\pi}{2}) = r(A', \frac{\pi}{2}) \circ t_{\vec{u}} = r(O, \frac{\pi}{2})$;

on a : AB = A'B', AC = A'C' et $(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}) = -(\widehat{\overrightarrow{A'B'},\overrightarrow{A'C'}})$, donc le triplet (A', B', C') est l'image du triplet (A, B, C) par l'antidéplacement :

$t_{\vec{u}} \circ s_{(AC)} = s_{(A'C')} \circ t_{\vec{u}}$.



4.2. Triangles isométriques

Définition et théorème

Définitions

- **On dit que des triangles ABC et A'B'C' sont isométriques, ou superposables, s'il existe une isométrie f telle que les points A, B et C ont respectivement pour images A', B' et C'.**
- **Si f est un déplacement, on dit que les triangles ABC et A'B'C' sont directement superposables.**
- **Si f est un antidéplacement, on dit que les triangles ABC et A'B'C' sont superposables après retournement.**

On sait qu'une isométrie conserve les longueurs des côtés d'un triangle. Nous allons démontrer que cette propriété caractérise deux triangles isométriques.

Théorème

Soit ABC et A'B'C' deux triangles.
Si A'B' = AB, B'C' = BC, C'A' = CA, alors les triangles ABC et A'B'C' sont isométriques.

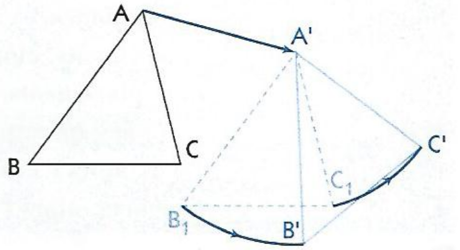
Démonstration

Supposons que : A'B' = AB, B'C' = BC, C'A' = CA.

Démontrons qu'il existe alors une isométrie f qui transforme le triangle ABC en A'B'C'.

Soit t la translation de vecteur $\overrightarrow{AA'}$, B_1 et C_1 les images respectives de B et C par t.

Le théorème d'Al Kashi nous permet de déduire des égalités précédentes que les angles des deux triangles sont égaux deux à deux.



- Si $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}) = (\widehat{\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'}})$, alors : $(\widehat{\overrightarrow{A'B_1}, \overrightarrow{A'C_1}}) = (\widehat{\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'}})$.

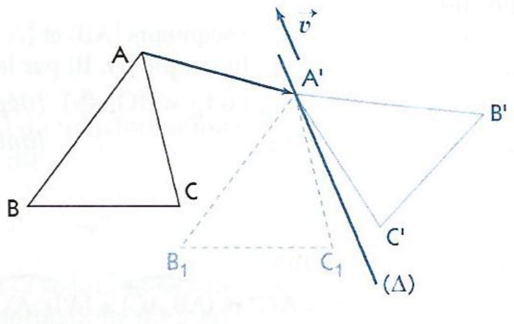
Donc : $(\widehat{\overrightarrow{A'B_1}, \overrightarrow{A'B'}}) = (\widehat{\overrightarrow{A'C_1}, \overrightarrow{A'C'}})$.

De plus, $A'B' = A'B_1$ et $A'C' = A'C_1$.

Donc, A'B'C' est l'image de $A'B_1C_1$ par la rotation r de centre A' et d'angle $(\widehat{\overrightarrow{A'B_1}, \overrightarrow{A'B'}})$.

Enfin, $A'B_1C_1$ est l'image de ABC par t.

Donc, le triangle A'B'C' est l'image du triangle ABC par le déplacement r o t.



- Si $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}) = -(\widehat{\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'}})$,

alors : $(\widehat{\overrightarrow{A'B_1}, \overrightarrow{A'C_1}}) = -(\widehat{\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'}})$.

Soit (Δ) la bissectrice de l'angle $\widehat{C_1A'C'}$ et $\vec{v}$ l'un de ses vecteurs directeurs ; on a : $(\widehat{\overrightarrow{A'C'}, \vec{v}}) = (\widehat{\vec{v}\,;\, \overrightarrow{A'C_1}})$

On a de plus : $A'C' = A'C_1$; donc, C' est l'image de C_1 par la symétrie orthogonale s_Δ.

On a également : $(\widehat{\overrightarrow{A'B'}, \vec{v}}) = (\widehat{\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'}}) + (\widehat{\overrightarrow{A'C'}, \vec{v}})$

$$= -(\widehat{\overrightarrow{A'B_1}, \overrightarrow{A'C_1}}) - (\widehat{\overrightarrow{A'C_1}, \vec{v}})$$

$$= -(\widehat{\overrightarrow{A'B_1}, \vec{v}}).$$

De plus, $A'B' = A'B_1$; donc, B' est l'image de B_1 par s_Δ et A'B'C' est l'image de $A'B_1C_1$ par s_Δ.

Enfin, $A'B_1C_1$ est l'image de ABC par t ; donc, A'B'C' est l'image de ABC par l'antidéplacement s_Δ o t.

Critères d'isométrie

On a vu dans le théorème précédent que si deux triangles ont leurs côtés égaux deux à deux, ils sont isométriques. Cette condition suffisante d'isométrie est appelée « critère » d'isométrie de deux triangles.

Nous allons établir ci-dessous deux autres critères d'isométrie.

Propriétés

Pour que deux triangles soient isométriques, il suffit que l'un des trois critères suivants soit vérifié.

(1) Les deux triangles ont leurs côtés deux à deux de mêmes longueurs.

(2) Les deux triangles ont un angle (non orienté) de même mesure, compris entre deux côtés deux à deux de mêmes longueurs.

(3) Les deux triangles ont un côté de même longueur, compris entre deux angles (non orientés) deux à deux de mêmes mesures.

Démonstration

Soit ABC et A'B'C' deux triangles.

- Le critère (1) n'est autre que le théorème précédent.
- On suppose que : AB = A'B', AC = A'C' et mes $\widehat{A}$ = mes $\widehat{A'}$.

D'après le théorème d'Al Kashi, on en déduit que : $BC^2 = B'C'^2$, c'est à dire BC = B'C'.
D'après le critère (1), les deux triangles sont isométriques.

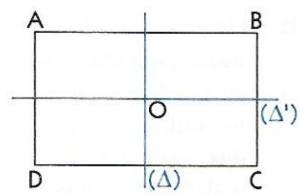
- On suppose que : BC = B'C', mes $\widehat{B}$ = mes $\widehat{B'}$ et mes $\widehat{C}$ = mes $\widehat{C'}$.

Les triangles ayant deux angles deux à deux de mêmes mesures, on en déduit que : mes $\widehat{A}$ = mes $\widehat{A'}$.
D'après le théorème des sinus, on a également : AB = A'B' et AC = A'C'.
D'après le critère (1), les deux triangles sont isométriques.

4.3. Travaux dirigés

1. Soit ABCD un rectangle non carré, (E) l'ensemble des isométries laissant globalement invariant ce rectangle, (Δ) et (Δ') les médiatrices respectives des segments [AB] et [BC], O le centre du rectangle.
1°) Vérifier que les transformations Id, s_O, s_Δ et $s_{\Delta'}$ appartiennent à l'ensemble (E).
On admet désormais que : (E) = {Id, s_O, s_Δ, $s_{\Delta'}$}.
2°) Dresser le tableau des composées des éléments de (E).
3°) Déduire de ce tableau que (E) est un groupe de transformations.

Solution



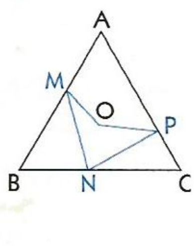
1°) Les images du quadruplet de points (A, B, C, D) par les transformations Id, s_O, s_Δ et $s_{\Delta'}$ sont respectivement (A, B, C, D), (C, D, A, B), (B, A, D, C) et (D, C, B, A).
Le rectangle ABCD est donc globalement invariant par ces isométries.
2°) On compose deux à deux ces isométries et on obtient le tableau ci-contre :

$\circ$	Id	s_O	s_Δ	$s_{\Delta'}$
Id	Id	s_O	s_Δ	$s_{\Delta'}$
s_O	s_O	Id	$s_{\Delta'}$	s_Δ
s_Δ	s_Δ	$s_{\Delta'}$	Id	s_O
$s_{\Delta'}$	$s_{\Delta'}$	s_Δ	s_O	Id

3°) On remarque dans ce tableau que :
– la composée de deux éléments de (E) est un élément de (E) ;
– la réciproque de tout élément de (E) est un élément de (E).
(E) est donc un groupe de transformations.

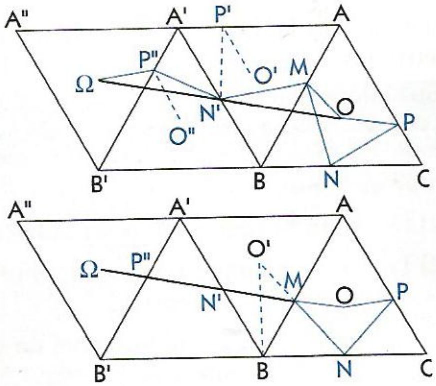
2. Application des isométries à un problème d'optimisation[1]

Soit ABC un triangle équilatéral de centre O.
Déterminer les points M, N, P situés respectivement sur les segments [AB], [BC], [CA] (à l'exclusion des extrémités) et tels que le quadrilatère OMNP ait un périmètre minimal.
Calculer, en fonction du côté a du triangle ABC, ce périmètre minimal.



[1]. *optimiser c'est rechercher la valeur minimale ou maximale.*

Solution



Par trois symétries orthogonales consécutives, on a :

MN = MN' ;

NP = N'P' = N'P" ;

PO = P'O' = P"O" = P"Ω. Donc :

OM + MN + NP + PO = OM + MN' + N'P" + P"Ω.

Le trajet OMN'P"Ω sera minimum quand il sera effectué en ligne droite.

Donc, pour déterminer le trajet minimum :

- tracer la droite (OΩ) qui coupe les droites (AB), (A'B), (A'B') respectivement en M, N', P" ;
- construire les points N et P, antécédents respectifs des points N' et P" par les symétries successives.

Par symétrie, on a :

- N' milieu de [A'B], donc N milieu de [BC] ;
- la droite (AO) est un axe de symétrie pour le quadrilatère OMNP.

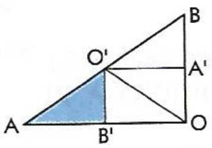
Soit p le périmètre minimal. On a : $p = 2(OM + MN) = 2O'N$.

$O'N^2 = O'B^2 + BN^2 = \frac{a^2}{3} + \frac{a^2}{4} = \frac{7a^2}{12}$; donc : $p = \frac{a\sqrt{7}}{\sqrt{3}}$.

Exercices

4.a ABC est un triangle équilatéral de sens direct et de centre O. t est la translation de vecteur $\overrightarrow{OC}$, r la rotation de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{3}$, s la symétrie d'axe (OA).
Reconnaître, parmi les transformations suivantes, les déplacements et les antidéplacements :
$r \circ s \circ r^{-1}$, $s \circ r \circ s$, $t \circ s \circ t^{-1}$, $s \circ t \circ s$.

4.b OAB est un triangle rectangle et non isocèle en O ; O', A', B' sont les milieux respectifs des segments [AB], [OB], [OA]. Citer tous les triangles isométriques au triangle AO'B' apparaissant sur la figure et, pour chacun d'eux (sauf pour le triangle OA'O'), préciser l'isométrie qui le transforme en AO'B'.



4.c ABCD est un rectangle de sens direct et de centre O, tel que : AD = 2 AB. Les points I, J, K, L sont les milieux respectifs des côtés [AB], [BC], [CD], [DA]. Déterminer les isométries telles que :
a) (A, I, O) a pour image (O, J, C) ;
b) (A, I, O) a pour image (D, K, O) ;
c) (A, I, O) a pour image (C, K, O).

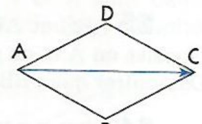
4.d ABC est un triangle équilatéral de sens direct et de centre O. Les points I, J, K sont les milieux respectifs des côtés [AB], [BC], [CA]. Déterminer les isométries telles que :
a) (A, O, K) a pour image (C, O, K) ;
b) (A, O, K) a pour image (B, O, I) ;
c) (A, O, K) a pour image (B, O, J).

Exercices

APPRENTISSAGE

Symétries orthogonales et translations

1 ABCD est un losange de sens direct tel que mes $\widehat{A} = \frac{\pi}{3}$.



1. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques des transformations suivantes :
$f = s_{(BC)} \circ s_{(AD)}$; $g = s_{(CD)} \circ s_{(AB)}$.
2. Démontrer que : $g \circ f = f \circ g = t_{\overrightarrow{AC}}$.

2 On considère une droite (Δ) de vecteur normal $\vec{u}$. Déterminer la nature et l'élément caractéristique de la transformation $t_{\vec{u}} \circ s_{\Delta}$.

3 Soit (Δ) et (Δ') deux droites perpendiculaires et O leur point d'intersection. On considère l'ensemble E de transformations du plan : $E = \{ Id, s_O, s_\Delta, s_{\Delta'} \}$.
Démontrer que la composée de deux éléments de E est un élément de E et que la réciproque d'un élément de E est un élément de E.

4 Le plan est muni du repère orthonormé (O, I, J). On considère le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ et la droite $(\mathscr{D})$ d'équation $2x - 3y + 4 = 0$.
1. Quelle est l'expression analytique de $t_{\vec{u}}$?
2. Soit $(\mathscr{D}')$ l'image de $(\mathscr{D})$ par $t_{\vec{u}}$. Déterminer une équation cartésienne de $(\mathscr{D}')$.

Rotations

5 On considère deux points distincts M et N.
1. Déterminer la nature et l'élément caractéristique de la transformation $s_M \circ s_N$.
2. En déduire que toute translation est la composée de deux symétries centrales dont l'une est arbitrairement choisie.
3. *Application*
ABC est un triangle, I et J sont les milieux respectifs de [AB] et [AC]. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques des transformations $t_{\overrightarrow{BC}} \circ s_I$ et $s_J \circ t_{\overrightarrow{BC}}$.

6 ABCO est un parallélogramme.
1. Démontrer que : $s_B \circ s_A = s_C \circ s_O$.
2. Déterminer la nature et l'élément caractéristique de la transformation $s_C \circ s_B \circ s_A$.
3. Construire l'image de ABCO par cette transformation.

7 Soit ABC un triangle équilatéral de sens direct et H le pied de la hauteur issue du sommet A.
Déterminer la nature et les éléments caractéristiques des transformations suivantes :
$s_{(AB)} \circ s_{(AH)}$; $s_{(BC)} \circ s_{(AH)}$; $t_{\overrightarrow{AH}} \circ s_A$.

8 Le plan est muni du repère orthonormé (O, I, J). (Δ) désigne la première bissectrice et r le quart de tour direct de centre O.
1. Quelles sont les expressions analytiques de $s_{(OI)}$ et s_Δ ?
2. En déduire l'expression analytique de r.

9 ABCD est un rectangle.
1. Déterminer la nature et l'élément caractéristique de la transformation $s_{(DA)} \circ s_{(CD)} \circ s_{(BC)} \circ s_{(AB)}$.
2. Construire l'image de ABCD par cette transformation.

10 ABCD est un parallélogramme tel que les droites (AB) et (BD) soient perpendiculaires.
1. Faire une figure.
2. Démontrer que : $s_{(AB)} \circ s_{(DC)} = s_B \circ s_D$.

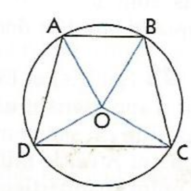
11 ABCD est un rectangle de sens direct.
Déterminer la nature et les éléments caractéristiques des transformations suivantes :
a) $s_{(AD)} \circ s_A \circ s_{(AB)}$;
b) $s_{(CD)} \circ s_A \circ s_{(AB)}$;
c) $s_{(AD)} \circ s_C \circ s_{(AB)}$.

12 ABCD est un parallélogramme de sens direct tel que les droites (CB) et (BD) sont perpendiculaires et AC = 2 BD.
1. Faire une figure.
2. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques des transformations suivantes :
$f = s_{(AC)} \circ s_{(AD)}$; $g = s_{(BD)} \circ s_{(AC)}$; $g \circ f$.

13 A et B sont deux points distincts.
1. Déterminer et construire la droite (Δ) telle que :
$r\left(A, -\frac{2\pi}{3}\right) = s_{(AB)} \circ s_{(\Delta)}$.
2. Déterminer et construire la droite (Δ') telle que :
$r'\left(B, -\frac{2\pi}{3}\right) = s_{(\Delta')} \circ s_{(AB)}$.
3. En déduire la nature et les éléments caractéristiques de la transformation $r' \circ r$.

14 A et B sont deux points distincts.
1. Déterminer et construire la droite (Δ) telle que :
$r\left(A, \frac{2\pi}{3}\right) = s_{(\Delta)} \circ s_{(AB)}$.
2. Déterminer et construire la droite (Δ') telle que :
$r'\left(B, \frac{\pi}{3}\right) = s_{(AB)} \circ s_{(\Delta')}$.
3. En déduire la nature et les éléments caractéristiques de la transformation $r \circ r'$.

15 ABCD est un trapèze isocèle de bases [AB] et [CD], inscrit dans un cercle de centre O et tel que :
mes $\widehat{COD} = 2$ mes $\widehat{AOB} = \frac{2\pi}{3}$.



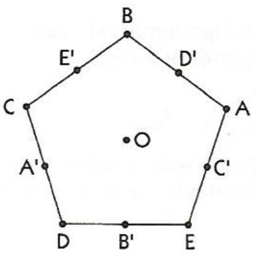
Démontrer que : $s_{(OA)} \circ s_{(OB)} \circ s_{(OC)} \circ s_{(OD)} = Id$.

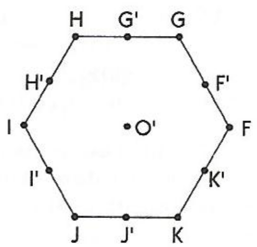
Isométries

16 Quelle est l'image par une isométrie d'un carré ? d'un rectangle ? d'un losange ? Justifier chaque réponse.

17 **1.** Déterminer les symétries orthogonales qui laissent globalement invariant un cercle $(\mathscr{C})$ de centre O.
2. Déterminer les rotations qui laissent globalement invariant un cercle $(\mathscr{C})$ de centre O.

18 ABCDE est un pentagone régulier de centre O et A', B', C', D', E' sont les milieux respectifs des segments [CD], [DE], [EA], [AB], [BC].
FGHIJK est un hexagone régulier de centre O' et F', G', H', I', J', K' sont les milieux respectifs des segments [FG], [GH], [HI], [IJ], [JK], [KF].



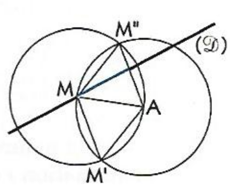


Trouver les isométries laissant globalement invariants les polygones suivants :
a) le pentagone régulier ABCDE ;
b) l'hexagone régulier FGHIJK.

19 On considère une droite (Δ) et un point M de cette droite. Soit A et B deux points distincts n'appartenant pas à (Δ).
1. Construire le point N tel que NABM soit un parallélogramme.
2. Quel est le lieu du point N lorsque le point M décrit la droite (Δ) ?

20 On considère un cercle (Γ) de centre O et un point M de ce cercle. Soit A et B deux points distincts tels que la droite (AB) n'ait aucun point commun avec (Γ).
1. Construire le point N tel que NBMA soit un parallélogramme.
2. Quel est le lieu du point N lorsque le point M décrit le cercle (Γ) ?

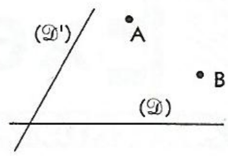
21 A est un point et $(\mathcal{D})$ est une droite ne passant pas par A. M étant un point de $(\mathcal{D})$, les cercles de centres A et M, de rayon AM, se coupent en M' et M" (les triangles AMM' et AM"M sont de sens direct).



Quels sont les lieux respectifs des points M' et M" lorsque le point M décrit la droite $(\mathcal{D})$?

22 Soit $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{D}')$ deux droites sécantes et A un point n'appartenant ni à $(\mathcal{D})$, ni à $(\mathcal{D}')$.
Construire un segment [BC] tel que :
- le point A est le milieu du segment [BC] ;
- le point B appartient à la droite $(\mathcal{D})$;
- le point C appartient à la droite $(\mathcal{D}')$.

23 Soit $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{D}')$ deux droites, A et B deux points distincts tels que la droite (AB) ne soit pas parallèle à un axe de symétrie des droites $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{D}')$. Construire le point M de $(\mathcal{D})$ et le point M' de $(\mathcal{D}')$ tels que : AM = AM' et BM = BM'.

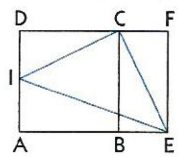


24 Soit $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{D}')$ deux droites, A et G deux points. Construire le point B de $(\mathcal{D})$ et le point C de $(\mathcal{D}')$ tels que G soit l'isobarycentre des points A, B et C.
(On pourra d'abord déterminer le milieu du segment [BC].)

25 ABC et AB'C' sont deux triangles rectangles isocèles en A et de sens direct.
Démontrer que : BB' = CC' et $(BB') \perp (CC')$.

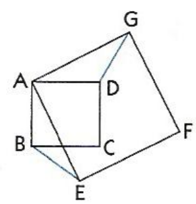
26 ABC et AB'C' sont deux triangles équilatéraux de sens direct.
Démontrer que BB' = CC' et déterminer une mesure de l'angle $(\widehat{\overrightarrow{BB'}, \overrightarrow{CC'}})$.

27 ABCD est un carré de sens direct, I est le milieu de [AD].
On construit le rectangle BEFC, extérieur au carré ABCD, tel que : AB = 2 BE.

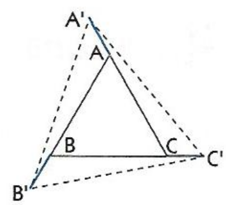


Quelle est la nature du triangle ICE ? Justifier.
(On pourra utiliser une rotation.)

28 ABCD et AEFG sont deux carrés de sens direct.
On note r le quart de tour direct de centre A.
Démontrer que BE = DG et déterminer une mesure de l'angle $(\widehat{\overrightarrow{BE}, \overrightarrow{DG}})$.

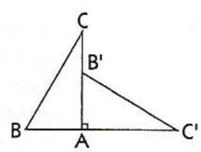


29 Sur la figure ci-contre, ABC est un triangle équilatéral de sens direct et AA' = BB' = CC'.
Démontrer que A'B'C' est un triangle équilatéral de sens direct.



30 AOB est un triangle de sens direct. Soit r le quart de tour direct de centre O.
On note C, D et A' les points tels que : $C = r^{-1}(A)$, $D = r(B)$ et $A' = r \circ r(A)$
Démontrer que : A'B = CD et $(A'B) \perp (CD)$.

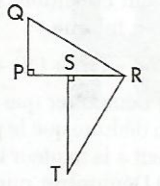
31 Sur la figure ci-contre, on a : AB = AB' et AC = AC'.
Démontrer que : BC = B'C' et $(BC) \perp (B'C')$.



32 Sur la figure ci-après, on a : PQ = SR et PR = ST.
1. Préciser l'angle de la rotation r qui transforme le

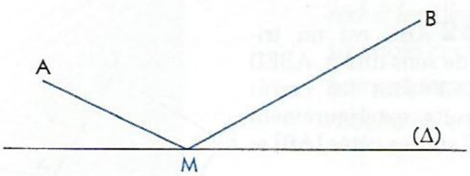
triangle SRT en PQR et construire son centre I.

2. Soit V l'image du point R par la symétrie de centre I. Quelle est l'image par r du triangle VSQ ?



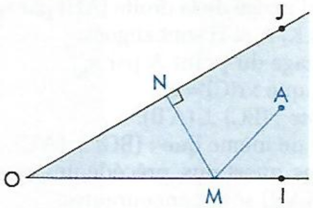
APPROFONDISSEMENT

33 Sur la figure ci-dessous, A et B sont deux points situés dans un même demi-plan ouvert délimité par (Δ).



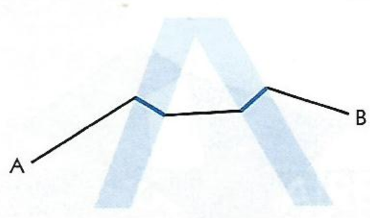
Comment faut-il choisir le point M sur la droite (Δ) pour que le trajet AM + MB soit de longueur minimale ?

34 Sur la figure ci-dessous, A est un point donné, à l'intérieur de la région colorée délimitée par les demi-droites [OI) et [OJ).
Soit M un point de la demi-droite [OI) et N son projeté orthogonal sur la demi-droite [OJ).



Comment faut-il choisir le point M pour que la somme AM + MN soit minimale ?

35 Pour relier les villages A et B, on doit construire deux ponts (perpendiculairement aux bras de la rivière).

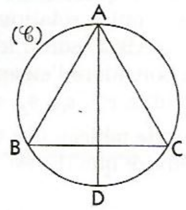


Où faut-il construire les ponts pour que le chemin reliant les villages A et B soit de longueur minimale ?

36 A, B, C, D sont quatre points distincts du plan tel que : AB = CD.
Déterminer dans chacun des cas suivants une isométrie f (ou une composée d'isométries) qui transforme le point A en C et le point B en D :
1. (AB) et (CD) sont deux droites parallèles ;
2. [AB] et [CD] ont même milieu I ;
3. (AB) et (CD) sont deux droites sécantes en un point P.

37 ABCD est un carré de sens direct.
On considère la transformation :
$$f = r\left(D, -\frac{\pi}{2}\right) \circ r'(C, \gamma) \circ r''\left(B, -\frac{\pi}{2}\right) \circ s_A.$$
Déterminer f(A) et en déduire, suivant les valeurs de γ, la nature et les éléments caractéristiques de f.

38 ABC est un triangle équilatéral de sens direct, inscrit dans le cercle $(\mathscr{C})$ de diamètre [AD].

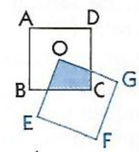


1. Démontrer que la transformation f définie par : $f = s_{(BD)} \circ s_{(AC)}$ est une rotation, dont on précisera le centre I et l'angle.
2. Démontrer que la transformation g définie par $g = s_{(CD)} \circ s_{(AB)}$ est une rotation, dont on précisera le centre J et l'angle.
3. Démontrer que le triangle AIJ est équilatéral. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques des transformations g o f et f o g.

39 ABC est un triangle. α, β et γ désignent des mesures respectives des angles $2(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}})$, $2(\widehat{\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}})$ et $2(\widehat{\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}})$.
Démontrer que : $r(A, \alpha) \circ r'(B, \beta) \circ r''(C, \gamma) = \mathrm{Id}$.

40 ABCD est un quadrilatère convexe inscrit dans un cercle $(\mathscr{C})$ de centre O.
E, F, G, H désignent les milieux respectifs des côtés [AB], [BC], [CD], [DA].
1. *a)* Démontrer que EFGH est un parallélogramme.
b) En déduire que : $s_E \circ s_F \circ s_G \circ s_H = \mathrm{Id}$.
2. *a)* Démontrer que les médiatrices des côtés du quadrilatère ABCD sont concourantes en O.
b) En déduire que : $s_{(OE)} \circ s_{(OF)} \circ s_{(OG)} \circ s_{(OH)} = \mathrm{Id}$.

41 ABCD et OEFG sont des carrés de côté $2a$. O est le centre du carré ABCD.
Exprimer l'aire de la partie coloriée en fonction de a.



42 ABCD est un quadrilatère convexe.
On construit les points F et E, images respectives des points B et D par la translation t de vecteur $\overrightarrow{AC}$.
Démontrer que l'aire de BDEF est le double de l'aire de ABCD.

43 ABC est un triangle équilatéral de centre O et de sens direct.
1. Démontrer que les seules symétries orthogonales laissant globalement invariant le triangle ABC sont : $s_{(OA)}$, $s_{(OB)}$ et $s_{(OC)}$.
2. Soit r la rotation de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{3}$. Démontrer que les seules rotations laissant globalement invariant le triangle ABC sont : Id, r et r^{-1}.
3. On considère l'ensemble (E) d'isométries :
$(E) = \{\mathrm{Id}, r, r^{-1}, s_{(OA)}, s_{(OB)}, s_{(OC)}\}$.
Dresser le tableau des composées des éléments de (E) et en déduire que (E) est un groupe de transformations du plan.

44 ABCD est un carré de centre O et de sens direct, (Δ) et (Δ') sont les médiatrices respectives des segments [AB] et [AD].

1. Démontrer que les seules symétries orthogonales laissant globalement invariant le carré ABCD sont : s_Δ, $s_{\Delta'}$, $s_{(AC)}$ et $s_{(BD)}$.

2. Soit r le quart de tour direct de centre O. Démontrer que les seules rotations laissant globalement invariant le carré ABCD sont : Id, r, r^{-1} et s_O.

3. On considère l'ensemble (E) d'isométries :

$(E) = \{Id, r, r^{-1}, s_O, s_\Delta, s_{\Delta'}, s_{(AC)}, s_{(BD)}\}$.

Dresser le tableau des composées des éléments de (E) et en déduire que (E) est un groupe de transformations du plan.

45 ABC est un triangle équilatéral de sens direct. On note A', B' et C' les points tels que :

$A' = r\left(B, \frac{\pi}{2}\right)(A)$, $B' = r'\left(C, \frac{\pi}{2}\right)(B)$ et $C' = r''\left(A, \frac{\pi}{2}\right)(C)$.

Quelle est la nature du triangle A'B'C' ? Justifier.

46 On considère trois droites parallèles (Δ), (Δ') et (Δ''). Construire un triangle ABC isocèle rectangle en A, tel que : $A \in (\Delta)$, $B \in (\Delta')$ et $C \in (\Delta'')$.

47 $(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{C}')$ sont deux cercles concentriques de rayons respectifs 3 cm et 4 cm, A est un point de $(\mathscr{C})$.

1. Construire un triangle équilatéral ABC tel que le point B appartienne à $(\mathscr{C})$ et le point C à $(\mathscr{C}')$.

2. Construire un triangle équilatéral ABC tel que les points B et C appartiennent à $(\mathscr{C}')$.

(Dans chacun des cas, on précisera le nombre de solutions.)

48 On considère trois cercles concentriques (Γ), (Γ'), (Γ''), de centre O et de rayons 3 cm, 4 cm, 5 cm. Construire un triangle équilatéral ABC tel que :

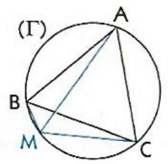
$A \in (\Gamma)$, $B \in (\Gamma')$ et $C \in (\Gamma'')$.

49 ABC est un triangle équilatéral de sens direct, inscrit dans un cercle (Γ).

M est un point du petit arc $\widehat{BC}$, distinct de B et de C.

Démontrer que : MA = MB + MC.

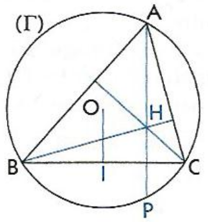
(On pourra utiliser une rotation de centre A).



50 I, J et K sont trois points non alignés. Construire un triangle ABC isocèle rectangle en A et de sens direct, tel que : $A \in (IJ)$, $B \in (JK)$ et $C \in (KI)$.

(Il conviendra de distinguer le cas où le triangle IJK est rectangle en K, du cas où il ne l'est pas.)

51 ABC est un triangle inscrit dans un cercle (Γ) de centre O, H est son orthocentre, I est le milieu du segment [BC].



1. On considère le point M du plan tel que :

$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$.

a) Démontrer que : $\overrightarrow{AM} = 2\,\overrightarrow{OI}$; en déduire que le point M appartient à la hauteur issue de A.

b) Démontrer que les points M et H sont confondus.

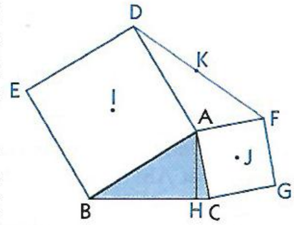
2. Soit P le symétrique du point H par rapport à la droite (BC).

a) Déterminer l'image du point P par la transformation définie par : $f = t_{\overrightarrow{HA}} \circ s_{(BC)}$.

b) Déterminer la droite (Δ) telle que : $t_{\overrightarrow{HA}} = s_\Delta \circ s_{(BC)}$.

c) En déduire que le point P est sur le cercle (Γ). Énoncer le théorème ainsi démontré.

52 ABC est un triangle de sens direct, ABED et ACGF sont les carrés construits extérieurement à ABC sur les côtés [AB] et [AC].



On désigne par H le projeté orthogonal de A sur (BC), K le milieu de [DF], I le centre du carré ABED et J le centre du carré ACGF.

1. On considère les quarts de tour directs r et r', de centres respectifs I et J.

Démontrer que : $r \circ r' = r'^{-1} \circ r^{-1} = s_K$.

2. Déterminer l'image de la droite (AH) par s_K. En déduire que les points K, A et H sont alignés.

3. Soit A' l'image du point A par s_K.

a) Démontrer que : r(C) = A'.

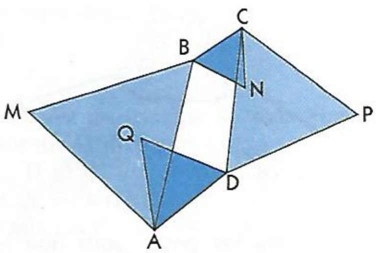
En déduire que : $(EC) \perp (A'B)$.

b) Démontrer de même que : $(BG) \perp (A'C)$.

4. Déduire des questions précédentes que les droites (EC), (BG) et (AH) sont concourantes.

53 Soit ABCD un quadrilatère. On construit vers l'extérieur du quadrilatère les triangles équilatéraux ABM et CDP, vers l'intérieur on construit les triangles équilatéraux BCN et ADQ.

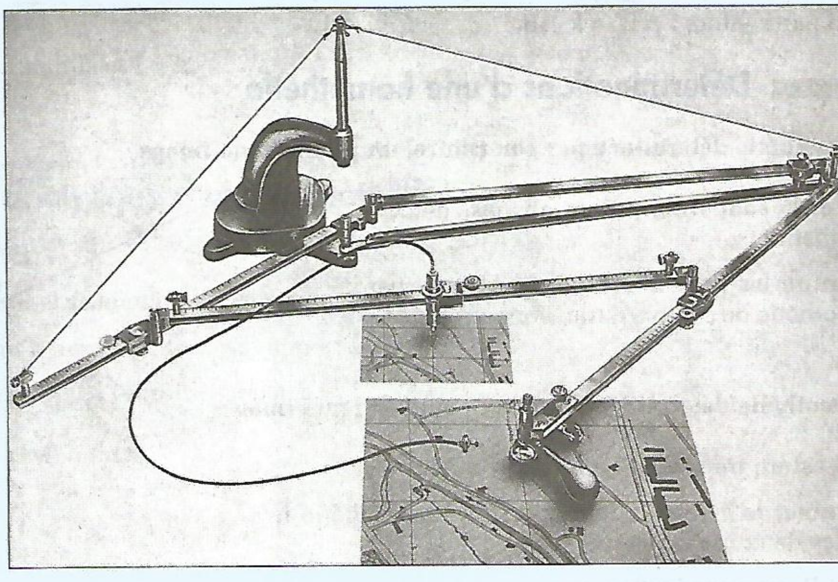
Quelle est la nature du quadrilatère MNPQ ?



5 Homothéties

Introduction

Une homothétie est une transformation du plan qui agrandit ou réduit les dimensions des figures planes.
La photo ci-dessous représente un pantographe de précision. Cet instrument servait, avant l'invention des photocopieuses, à reproduire, réduire ou agrandir des dessins, des cartes, des plans.



Un pantographe.

SOMMAIRE

1 Les homothéties et leurs utilisations

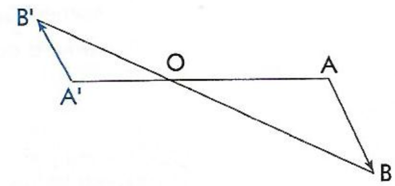
1.1. Déterminations et propriétés

Introduction

En classe de seconde, nous avons vu que toute homothétie est définie par un point, appelé centre, et un nombre réel non nul, appelé rapport. L'homothétie de centre O et de rapport k ($k \neq 0$), notée $h_{(O,\,k)}$ ou h, est l'application du plan dans lui-même qui à tout point M associe le point M' tel que : $\overrightarrow{OM'} = k\,\overrightarrow{OM}$.

On a également démontré ou admis les propriétés suivantes :

- si $k = 1$, h est l'application identique et tous les points sont invariants ;
- si $k \neq 1$, O est le seul point invariant ;
- si $k = -1$, h est la symétrie de centre O ;
- toute homothétie $h_{(O,\,k)}$ est une transformation et sa réciproque est l'homothétie $h_{\left(O\,;\,\frac{1}{k}\right)}$;
- si A' et B' désignent les images respectives des points A et B par h, alors : $\overrightarrow{A'B'} = k\,\overrightarrow{AB}$.

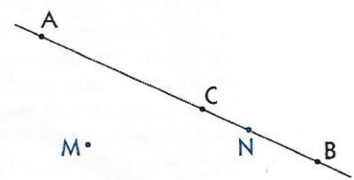


Déterminations d'une homothétie

1. Homothétie déterminée par son centre, un point et son image

A, B et C sont trois points alignés, deux à deux distincts.

Construire les images des points M et N par l'homothétie de centre A, transformant B en C.



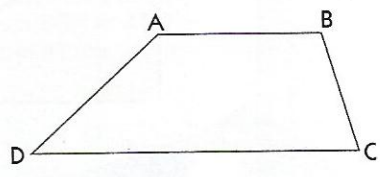
2. Homothétie déterminée par deux points et leurs images

ABCD est un trapèze tel que : CD = 2 AB.

Déterminer le centre et le rapport de l'homothétie h dans les deux cas suivants :

a) A et B ont pour images respectives D et C par h ;

b) A et B ont pour images respectives C et D par h.



3. Homothétie déterminée par son rapport, un point et son image

Construire, dans chaque cas, le centre de l'homothétie de rapport k qui transforme le point A en point B.

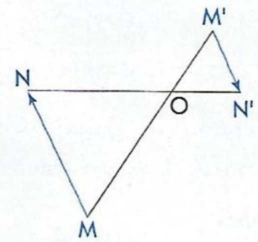
a) $k = -\frac{2}{3}$; *b)* $k = \frac{3}{2}$.

Propriété caractéristique d'une homothétie

Propriété

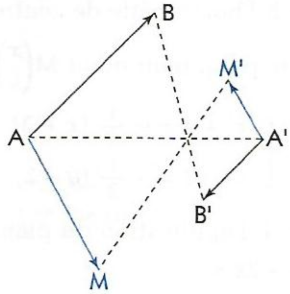
Soit f une application du plan dans lui-même, k un nombre réel différent de 0 et de 1.
f est une homothétie de rapport k si et seulement si, pour tous points M et N d'images respectives M' et N', on a : $\overrightarrow{M'N'} = k\overrightarrow{MN}$.

Démonstration



- Si f est une homothétie de rapport k, on sait que, pour tous points M et N d'images respectives M' et N' par f, on a : $\overrightarrow{M'N'} = k\,\overrightarrow{MN}$.
- Réciproquement, on suppose que pour tous points M et N d'images respectives M' et N', on a : $\overrightarrow{M'N'} = k\,\overrightarrow{MN}$.

Soit A et B deux points distincts, A' et B' leurs images respectives par f ; on a : $\overrightarrow{A'B'} = k\,\overrightarrow{AB}$.
On sait qu'il existe une homothétie h, de rapport k, telle que :
h(A) = A' et h(B) = B'.
Soit M un point du plan, M' son image par f et M_1 son image par h.
M' = f(M), donc : $\overrightarrow{A'M'} = k\,\overrightarrow{AM}$;
M_1 = h(M), donc : $\overrightarrow{A'M_1} = k\,\overrightarrow{AM}$.
Les points M' et M_1 sont confondus et f = h.



Expression analytique d'une homothétie

Le plan est muni du repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Soit k un nombre réel non nul et Ω le point de coordonnées $(x_0 ; y_0)$.

- On considère l'homothétie h de centre Ω et de rapport k.

Soit $M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ un point du plan et $M'\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ son image par h.

On a : M' = h (M) $\Leftrightarrow \quad \overrightarrow{\Omega M'} = k\,\overrightarrow{\Omega M}$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x' - x_0 = k\,(x - x_0) \\ y' - y_0 = k\,(y - y_0). \end{cases}$$

L'expression analytique de h est : $\begin{cases} x' = k\,x + (1-k)\,x_0 \\ y' = k\,y + (1-k\,)y_0. \end{cases}$

- Soit f l'application du plan dans lui-même, qui à tout point $M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ associe le point $M'\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ tel que :

$\begin{cases} x' = k\,x + p \\ y' = k\,y + q \end{cases}$, où p et q sont des nombres réels.

Si $k = 1$, f est la translation de vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$.

Si $k \neq 1$, considérons deux points $A\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ et leurs images respectives $A'\begin{pmatrix} x'_1 \\ y'_1 \end{pmatrix}$, $B'\begin{pmatrix} x'_2 \\ y'_2 \end{pmatrix}$ par f.

$$\begin{aligned} \text{On a : } \overrightarrow{A'B'} &= (x'_2 - x'_1)\,\vec{i} + (y'_2 - y'_1)\,\vec{j} \\ &= k\,(x_2 - x_1)\,\vec{i} + k\,(y_2 - y_1)\,\vec{j} \\ &= k\,\overrightarrow{AB}. \end{aligned}$$

Cette égalité caractérise une homothétie de rapport k.

Son centre est le point invariant, c'est-à-dire $\Omega\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ tel que : $\begin{cases} x = k\,x + p \\ y = k\,y + q. \end{cases}$ On a donc : $\Omega\begin{pmatrix}\dfrac{p}{1-k}\\ \\ \dfrac{q}{1-k}\end{pmatrix}$.

Propriété

Le plan est muni du repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
Soit k un nombre réel non nul et f l'application du plan dans lui-même, qui à tout point $M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ associe le point $M'\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ tel que : $\begin{cases} x' = k\,x + p \\ y' = k\,y + q \end{cases}$, où p et q sont des nombres réels.

- **Si $k = 1$, f est la translation de vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}p\\q\end{pmatrix}$.**
- **Si $k \neq 1$, f est une homothétie de rapport k.**

Exemples

- Soit h l'homothétie de centre $\Omega\begin{pmatrix}-3\\2\end{pmatrix}$ et de rapport $-\frac{1}{2}$.

L'image par h d'un point $M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ est le point $M'\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ tel que : $\overrightarrow{\Omega M'} = -\frac{1}{2}\,\overrightarrow{\Omega M}$.

On a : $\begin{cases} x' + 3 = -\frac{1}{2}(x + 3) \\ y' - 2 = -\frac{1}{2}(y - 2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = -\frac{1}{2}x - \frac{9}{2} \\ y' = -\frac{1}{2}y + 3 \end{cases}$.

- Soit f l'application du plan dans lui-même qui à tout point $M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ associe le point $M'\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ tel que :

$\begin{cases} x' = -2x + 3 \\ y' = -2y - 5. \end{cases}$

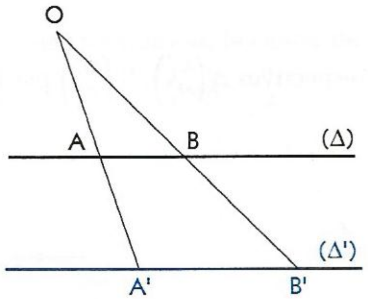
f est une homothétie de rapport -2. Son centre est le point invariant Ω, de coordonnées $(1\,;\,-\frac{5}{3})$.

1.2. Homothéties et configurations

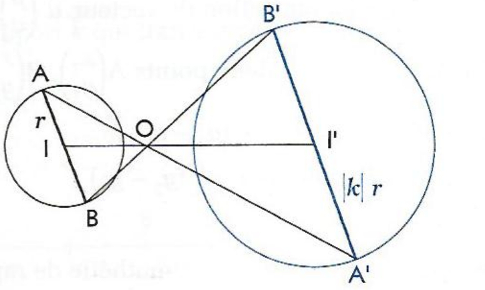
Images de figures simples

h est l'homothétie de centre O et de rapport k.
Soit A, B, I des points et A', B', I' leurs images respectives par h.
Les propriétés suivantes ont été démontrées en classe de seconde.

- L'image d'une droite (Δ) passant par A est la droite (Δ'), parallèle à (Δ) et passant par A'.
- L'image de la demi-droite [AB] est la demi-droite [A'B'), de support parallèle au support de [AB].
- L'image du segment [AB] est le segment [A'B'], de support parallèle au support de [AB].



- L'image du cercle (𝒞) de centre I et de rayon r est le cercle (𝒞') de centre I' et de rayon $|k|\,r$.
- L'image du cercle (𝒞) de diamètre [AB] est le cercle (𝒞') de diamètre [A'B'].



Remarques

- *Les homothéties conservent l'alignement, le milieu, le parallélisme, l'orthogonalité et les angles orientés.*
- *Une homothétie de rapport k multiplie les distances par $|k|$.*
- *Une homothétie de rapport k multiplie les aires par k^2.*

Conservation du barycentre

On sait que les homothéties conservent le milieu. La propriété suivante est une généralisation de ce résultat.

Propriété

Soit h une homothétie, (A,a), (B,b), (C,c) des points pondérés, A', B', C' les images respectives des points A, B, C par h, G un point et G' son image par h.

G est le barycentre des points pondérés (A,a), (B,b) et (C,c) si et seulement si G' est le barycentre des points pondérés (A',a), (B',b) et (C',c).

On dit que les homothéties conservent le barycentre.

Démonstration

Soit k le rapport de l'homothétie h.

$$\begin{aligned}
G = \text{bar}\{(A,a), (B,b), (C,c)\} &\Leftrightarrow a\,\overrightarrow{GA} + b\,\overrightarrow{GB} + c\,\overrightarrow{GC} = \vec{0}\\
&\Leftrightarrow ka\,\overrightarrow{GA} + kb\,\overrightarrow{GB} + kc\,\overrightarrow{GC} = \vec{0} \quad (\text{car } k \neq 0)\\
&\Leftrightarrow a\,\overrightarrow{G'A'} + b\,\overrightarrow{G'B'} + c\,\overrightarrow{G'C'} = \vec{0}\\
&\Leftrightarrow G' = \text{bar}\{(A',a), (B',b), (C',c)\}.
\end{aligned}$$

Conservation du contact

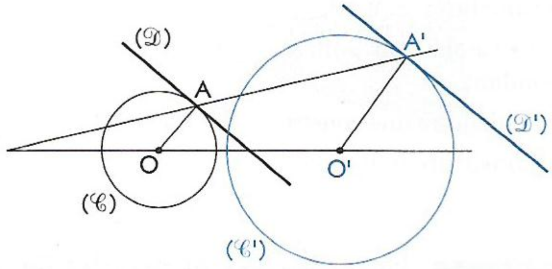
Propriété

Soit h une homothétie, $(\mathscr{D})$ une droite, A un point de $(\mathscr{D})$, $(\mathscr{C})$ un cercle tangent à $(\mathscr{D})$ en A, $(\mathscr{D}')$, A' et $(\mathscr{C}')$ les images respectives de $(\mathscr{D})$, A et $(\mathscr{C})$ par h.

La droite $(\mathscr{D}')$ est tangente au cercle $(\mathscr{C}')$ en A'.

On dit que les homothéties conservent le contact entre un cercle et une droite.

Démonstration



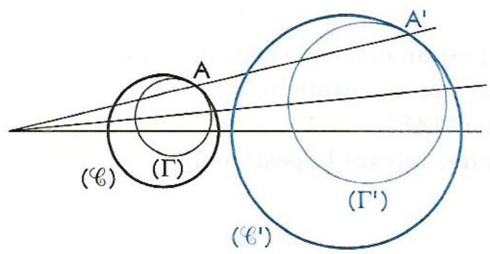
Le point A appartient au cercle $(\mathscr{C})$ et à la droite $(\mathscr{D})$, le point A' appartient donc au cercle $(\mathscr{C}')$ et à la droite $(\mathscr{D}')$.

Si O et O' sont les centres respectifs des cercles $(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{C}')$, $h(O) = O'$.

De plus, comme $(OA) \perp (\mathscr{D})$ et les homothéties conservent l'orthogonalité, on a : $(O'A') \perp (\mathscr{D}')$.

La droite $(\mathscr{D}')$ est donc tangente au cercle $(\mathscr{C}')$ en A'.

Remarque



On déduit immédiatement de cette propriété que deux cercles tangents ont pour images deux cercles tangents.
On dit que les homothéties conservent le contact entre deux cercles.
Plus généralement, on admettra que les homothéties conservent le contact.

1.3. Utilisations des homothéties

Homothéties et recherche de lieux géométriques

1. A et B sont deux points distincts, M est un point tel que le triangle ABM soit rectangle en M. On désigne par G le centre de gravité du triangle ABM.
Déterminer et construire le lieu géométrique de G lorsque M varie.

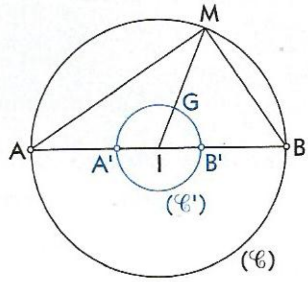
Solution

Soit I le milieu de [AB].

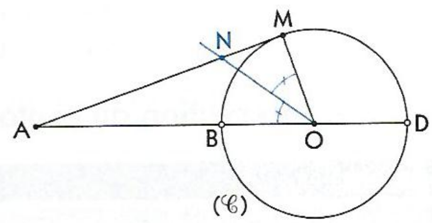
On a : $\overrightarrow{IG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{IM}$, donc G est l'image de M par l'homothétie h de centre I et de rapport $\frac{1}{3}$.

Le point M décrit le cercle ($\mathscr{C}$) de diamètre [AB], privé des points A et B.

L'image de ($\mathscr{C}$) par h est le cercle ($\mathscr{C}$') de centre I et de rayon $\frac{1}{3}$ IA. Donc, le lieu de G est le cercle ($\mathscr{C}$'), privé des points A' et B' tels que : A' = h(A) et B' = h(B).



2. ($\mathscr{C}$) est un cercle de centre O, A est un point extérieur à ($\mathscr{C}$).
On désigne par B et D les points d'intersection de ($\mathscr{C}$) avec la droite (AO) (B ∈ [AO]).
Soit M un point de ($\mathscr{C}$), distinct de B et D, et N le pied de la bissectrice issue de O dans le triangle AOM.
1°) Quel est le lieu géométrique de N lorsque M décrit ($\mathscr{C}$) privé de B et D ?
2°) Construire ce lieu.



Solution guidée

1°) • Démontrer que les droites (ON) et (DM) sont parallèles.

Soit h l'homothétie de centre A qui transforme D en O.

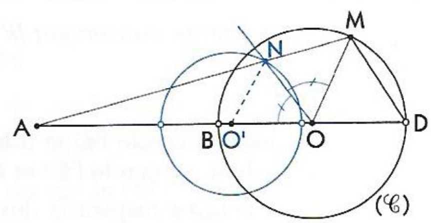
• Démontrer que : h(M) = N.

• Conclure.

2°) • Choisir un point M et construire le point N correspondant.

• En déduire une construction du point O', image de O par h.

• Construire le lieu de N.



Homothéties et problèmes de construction

1. ($\mathscr{C}$) est un cercle de centre O, A est un point extérieur à ($\mathscr{C}$).
Construire une droite passant par A et coupant ($\mathscr{C}$) en deux points B et C tels que C soit le milieu du segment [AB].
Discuter, suivant la position de A par rapport à ($\mathscr{C}$), le nombre de solutions.

Solution

Analyse

On a : $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AC}$; donc B est l'image de C par l'homothétie h de centre A et de rapport 2.

Le point C appartient à $(\mathscr{C})$, donc B appartient à l'image $(\mathscr{C}')$ de $(\mathscr{C})$ par h.

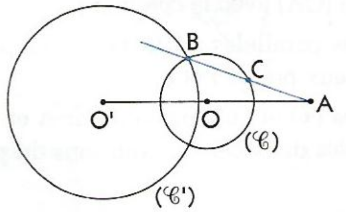
Le point B appartient également à $(\mathscr{C})$; il appartient donc à l'intersection de $(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{C}')$.

Synthèse

On construit le cercle $(\mathscr{C}')$, image de $(\mathscr{C})$ par h.

Soit B un point commun à $(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{C}')$, C le deuxième point d'intersection de la droite (AB) avec $(\mathscr{C})$.

On a : $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AC}$; donc C est le milieu de [AB].

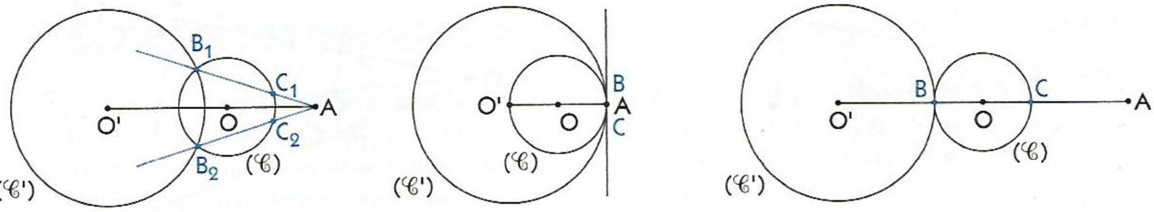


Discussion

Il y a autant de solutions que de points communs à $(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{C}')$.

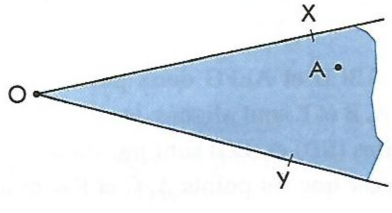
On pose : $d = AO = OO'$;

- si $r < d < 3r$, les cercles $(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{C}')$ sont sécants et il y a deux solutions ;
- si $d = r$ ou $d = 3r$, les cercles $(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{C}')$ sont tangents et il y a une solution ;
- si $d < r$ ou $d > 3r$, les cercles $(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{C}')$ n'ont pas de point commun et il n'y a pas de solution.



$r < d < 3r$ $\qquad$ $d = r$ $\qquad$ $d = 3r$

2. Sur la figure ci-contre, [OX) et [OY) sont deux demi-droites distinctes, A est un point situé dans la partie coloriée du plan, limitée par ces demi-droites.
Construire un cercle passant par A et tangent à [OX) et [OY).
Discuter, suivant la position du point A, le nombre de solutions.



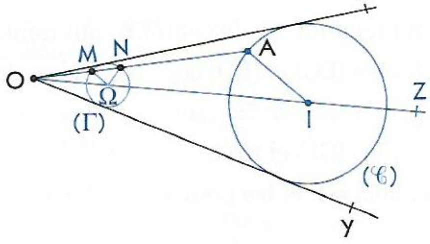
Solution

Analyse

Le cercle $(\mathscr{C})$ est tangent aux demi-droites [OX) et [OY) ; son centre I appartient donc à la bissectrice [OZ) de l'angle $\widehat{XOY}$.

Soit Ω un point de cette bissectrice et (Γ) le cercle de centre Ω, tangent aux deux demi-droites.

Il existe une homothétie h de centre O, transformant (Γ) en $(\mathscr{C})$.
A a pour antécédent par h l'un des points d'intersection, M ou N, de la demi-droite [OA) avec le cercle (Γ).



Synthèse

- Construire la bissectrice [OZ] de l'angle $\widehat{XOY}$.
- Choisir arbitrairement un point Ω ($\Omega \neq O$) de cette bissectrice.
- Construire le cercle (Γ) de centre Ω, tangent aux demi-droites [OX] et [OY].
- Tracer la demi-droite [OA) ; soit M et N les points d'intersection de [OA) avec le cercle (Γ).

Les droites parallèles à (ΩM) et (ΩN), passant par A, coupent (OZ) en deux points I et I'.

Les cercles ($\mathscr{C}$) et ($\mathscr{C}$'), passant par A et de centres respectifs I et I', sont les deux cercles solutions du problème.

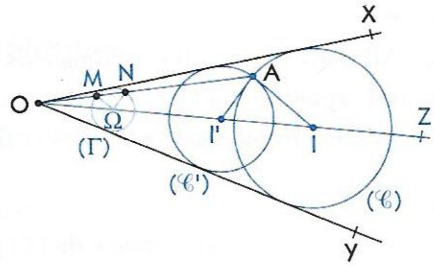


figure 1

Discussion

Il y a autant de solutions que de points d'intersection de (Γ) avec la demi-droite [OA).

- Si A n'appartient à aucune des demi-droites [OX) et [OY), il y a deux solutions (figure 1).

En particulier si A appartient à la bissectrice [OZ), les points I et I' seront construits en prenant un point intermédiaire, par exemple le point de contact S de (Γ) avec [OX) ; les droites (AT) et (AT') sont parallèles respectivement à (MS) et (NS) (figure 2).

- Si A appartient à l'une des demi-droites [OX) ou [OY), il y a une seule solution (figure 3).

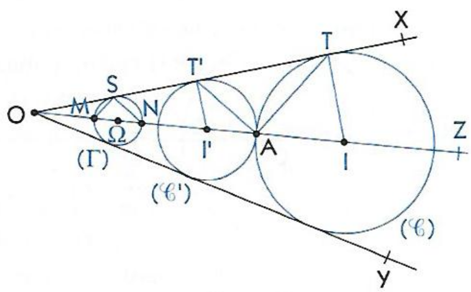


figure 2

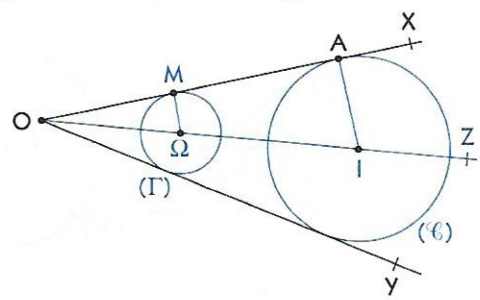
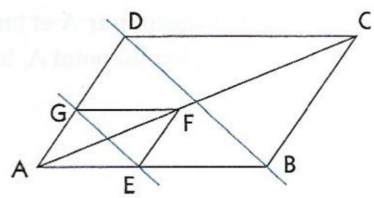


figure 3

Homothéties et démonstrations de propriétés

1. Soit ABCD et AEFG deux parallélogrammes tels que les points A, B et E sont alignés, les points A, D et G sont alignés, les droites (BD) et (EG) sont parallèles.
Démontrer que les points A, C et F sont alignés.



Solution

Soit h l'homothétie de centre A, qui transforme B en E.

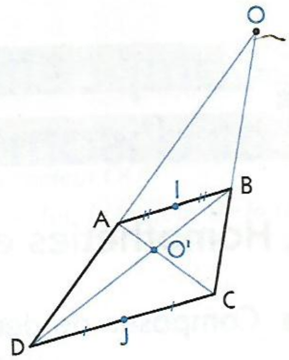
Les droites (EG) et (BD) sont parallèles, donc : h(D) = G.

Les droites (EF) et (BC) sont parallèles, donc l'image de C par h appartient à la droite (EF).

Les droites (GF) et (DC) sont parallèles, donc l'image de C par h appartient à la droite (GF).

Donc, h(C) = F et les points A, C, F sont alignés.

2. ABCD est un trapèze de bases [AB] et [CD]. Soit I le milieu de [AB], J le milieu de [CD], O le point d'intersection des droites (AD) et (BC), O' le point d'intersection des droites (AC) et (BD).
Démontrer que les points O, I, O' et J sont alignés.



Solution

Considérons l'homothétie h de centre O qui transforme A en D.

L'image par h de la droite (AB) est la droite parallèle à (AB) passant par D, c'est-à-dire (DC).

L'image de B par h appartient donc à la droite (DC) ; elle appartient aussi, par construction, à la droite (OB).

Par conséquent : h(B) = C.

Toute homothétie conserve les milieux, donc : h(I) = J.

Ainsi, les points O, I, J sont alignés.

Considérons maintenant l'homothétie h' de centre O' qui transforme A en C.

On démontre de même que : h'(B) = D et h'(I) = J.

Par conséquent, les points O, I, J d'une part et O', I, J d'autre part, sont alignés.

Les points O, I, O' et J sont donc alignés.

Exercices

1.a ABC est un triangle, A', B' et C' sont les milieux respectifs des côtés [BC], [AC] et [AB] .
1. Déterminer le centre et le rapport de l'homothétie qui transforme respectivement A, B et C en A', B' et C'.
2. En déduire que les triangles ABC et A'B'C' ont même centre de gravité.

1.b On donne quatre points deux à deux distincts A, A', B et B' tels que : $\overrightarrow{A'B'} = 3\overrightarrow{AB}$.
1. Déterminer le rapport de l'homothétie h qui transforme A en A' et B en B'. Construire son centre dans les deux cas suivants :
a) les droites (AB) et (A'B') sont distinctes ;
b) les droites (AB) et (A'B') sont confondues.
2. Mêmes questions pour l'homothétie h' telle que : h'(A) = B' et h'(B) = A'.

1.c P et Q sont deux points, G est le barycentre des points (P, – 3) et (Q, 1). Soit f l'application du plan dans lui-même, qui à tout point M associe le point M' tel que : $\overrightarrow{PM'} = \overrightarrow{PQ} + 3\overrightarrow{PM}$.
Démontrer que f est une homothétie dont on déterminera les éléments caractéristiques.

1.d $(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{C}')$ sont deux cercles de centres respectifs O et O', de rayons respectifs r et $2r$.
1. Quels sont les rapports des homothéties qui transforment $(\mathscr{C})$ en $(\mathscr{C}')$?
2. Soit Ω et Ω' les centres de ces homothéties.
a) Exprimer $\overrightarrow{O\Omega}$ et $\overrightarrow{O\Omega'}$ en fonction de $\overrightarrow{OO'}$.
b) En déduire une construction de Ω et Ω' dans chacun des cas suivants :
$OO' = \frac{1}{2}r$; $OO' = r$; $OO' = 2r$; $OO' = 3r$.

1.e Le plan est muni du repère (O, I, J). Soit h l'homothétie de centre $\Omega\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$ et de rapport $-\frac{3}{2}$.
1. Déterminer l'expression analytique de h dans le repère (O, I, J).
2. En déduire les coordonnées du point A dont l'image par h est le point $A'\begin{pmatrix}-4\\7\end{pmatrix}$.

1.f Soit un cercle $(\mathscr{C})$ de diamètre [AB] et I le point tel que : $\overrightarrow{IA} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$. À tout point M de $(\mathscr{C})$, on associe le point P, tel que [MP] soit un diamètre de $(\mathscr{C})$, et le point d'intersection Q des droites (IM) et (AP).
1. Démontrer que les droites (BM) et (PQ) sont parallèles.
2. En déduire le lieu (Γ) de Q lorsque M décrit $(\mathscr{C})$ privé de A et B. Construire (Γ).

1.g ABCD et AEFG sont deux carrés de sens direct tels que : $\overrightarrow{AE} = -\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$. Démontrer que les droites (AC), (BG) et (DE) sont concourantes.

2 Composition d'homothéties et d'isométries

2.1. Homothéties et translations

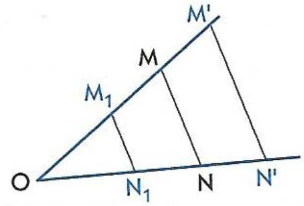
Composée de deux homothéties de même centre

Propriété

Soit h et h' deux homothéties de centre O et de rapports respectifs k et k'.

h' o h est l'homothétie de centre O et de rapport $k'k$.

Démonstration



Soit M un point du plan, M_1 son image par h et M' l'image de M_1 par h'.

On a : $\overrightarrow{OM'} = k'\,\overrightarrow{OM_1}$ et $\overrightarrow{OM_1} = k\,\overrightarrow{OM}$.

Donc : $\overrightarrow{OM'} = k'k\,\overrightarrow{OM}$.

Cas particuliers

- *Si $k'k = 1$, alors h' o h est l'application identique.*
- *Si $k'k = -1$, alors h' o h est la symétrie de centre O.*

Remarque

Pour tout couple (k, k') de nombres réels, on a : $k'k = kk'$; donc : h o h' = h' o h.
On dit que, pour tout point O, la composition des homothéties de centre O est commutative.

Composée de deux homothéties de centres distincts

Propriété

Soit $h_{(O,\,k)}$ et $h'_{(O',\,k')}$ deux homothéties de centres distincts O et O'.
- **si $k'k \neq 1$, alors h' o h est une homothétie de rapport $k'k$;**
- **si $k'k = 1$, alors h' o h est une translation.**

Démonstration

Soit M et N deux points distincts.

On pose : $h(M) = M_1$, $h(N) = N_1$, $h'(M_1) = M'$, $h'(N_1) = N'$.

D'après la propriété caractéristique des homothéties, on a : $\overrightarrow{M'N'} = k'\,\overrightarrow{M_1N_1}$ et $\overrightarrow{M_1N_1} = k\,\overrightarrow{MN}$.

Donc : $\overrightarrow{M'N'} = k'k\,\overrightarrow{MN}$.

D'après les propriétés caractéristiques des homothéties et des translations, on a :
- si $k'k \neq 1$, alors h' o h est une homothétie de rapport $k'k$;
- si $k'k = 1$, alors h' o h est une translation.

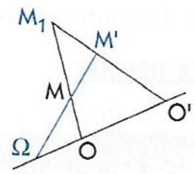
Remarque

La droite (OO') est globalement invariante par les homothéties h et h' ; elle est donc globalement invariante par la transformation h' o h. Ainsi :

- *si h' o h est une homothétie de centre Ω, alors Ω appartient à la droite (OO') ;*
- *si h' o h est une translation de vecteur $\vec{u}$, alors $\vec{u}$ est colinéaire au vecteur $\overrightarrow{OO'}$.*

Cette remarque ne suffit pas pour déterminer le centre de l'homothétie (ou le vecteur de la translation) h' o h.

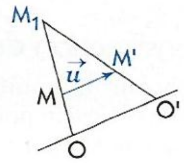
Construction du centre Ω de l'homothétie h' o h ($k'k \neq 1$)



- Choisir un point M n'appartenant pas à la droite (OO') et construire le point M_1 image de M par h, le point M' image de M_1 par h'.
- M' est l'image de M par l'homothétie h' o h, donc le centre Ω de cette homothétie appartient à (MM').

De plus, Ω ∈ (OO'). Donc, Ω est le point d'intersection des droites (OO') et (MM').

Construction du vecteur $\vec{u}$ de la translation h' o h ($k'k = 1$)



Pour déterminer le vecteur $\vec{u}$ de la translation h' o h, il suffit de construire l'image M' d'un point M par h' o h ; on a : $\vec{u} = \overrightarrow{MM'}$.

Remarque

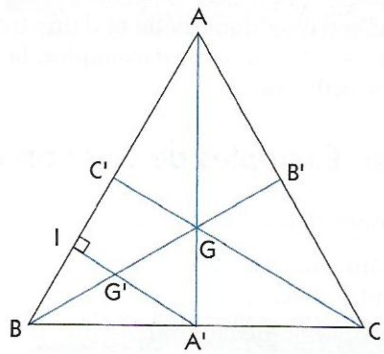
Généralement, la composition de deux homothéties de centres distincts n'est pas commutative.

Exemple

ABC est un triangle équilatéral, G son centre de gravité, A', B' et C' les milieux respectifs des côtés [BC], [CA] et [AB].

Soit h l'homothétie de centre A et de rapport $\frac{2}{3}$, h' l'homothétie de centre B et de rapport $\frac{1}{2}$.

Étudions les transformations h' o h et h o h'.



- h' o h et h o h' sont des homothéties de rapport $\frac{1}{3}$ et dont les centres appartiennent à la droite (AB).
- Pour déterminer le centre de h' o h, déterminons l'image de A' par h' o h.

h(A') = G et h'(G) = G', tel que G' est milieu de [BG] ; les droites (AB) et (A'G') sont sécantes en I, milieu de [BC'] et centre de h' o h.

- Pour déterminer le centre de h o h', déterminons l'image de C par h o h'.

h'(C) = A' et h(A') = G ; les droites (AB) et (CG) sont sécantes en C', centre de h o h'.

- Les homothéties h' o h et h o h' ont même rapport et des centres distincts, donc : h' o h ≠ h o h'.

Composée d'une homothétie et d'une translation

Propriété

Soit h une homothétie de rapport k différent de 1 et t une translation.

h o t et t o h sont des homothéties de rapport k.

Démonstration

Pour démontrer que les transformations $h \circ t$ et $t \circ h$ sont des homothéties de rapport k, il suffit d'établir qu'elles en vérifient la propriété caractéristique.

Soit M et N deux points distincts, M_1 et N_1 leurs images respectives par t, M' et N' les images respectives de M_1 et N_1 par h.

On a : $\overrightarrow{M_1N_1} = \overrightarrow{MN}$, car t est une translation ;

$\overrightarrow{M'N'} = k\,\overrightarrow{M_1N_1}$, car h est une homothétie de rapport k.

Donc : $\overrightarrow{M'N'} = k\,\overrightarrow{MN}$ et $h \circ t$ est une homothétie de rapport k.

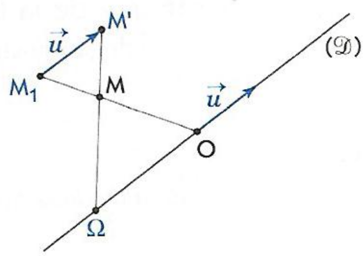
On démontre de même que $t \circ h$ est une homothétie de rapport k.

Remarque

La droite ($\mathscr{D}$) passant par le centre de l'homothétie h et dirigée par le vecteur de la translation t (si ce vecteur n'est pas nul), est globalement invariante par les transformations h et t. Par conséquent, les centres des homothéties $h \circ t$ et $t \circ h$ appartiennent à ($\mathscr{D}$).

Cette remarque ne suffit pas pour déterminer les centres des homothéties $h \circ t$ et $t \circ h$.

Construction du centre de l'homothétie $t \circ h$



- Choisir un point M n'appartenant pas à la droite ($\mathscr{D}$) et construire le point M_1 image de M par h, le point M' image de M_1 par t.
- M' est l'image de M par l'homothétie $t \circ h$, donc le centre Ω de cette homothétie appartient à (MM').

De plus : $\Omega \in (\mathscr{D})$. Donc, Ω est le point d'intersection des droites ($\mathscr{D}$) et (MM').

La construction du centre de l'homothétie $h \circ t$ est analogue à la construction précédente.

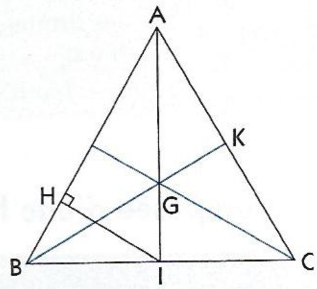
2.2. Homothéties et isométries

La composée d'une homothétie et d'une translation est une homothétie.
Nous allons étudier, à partir d'exemples, la composée d'une homothétie et d'une isométrie connue : rotation ou symétrie orthogonale.

Exemples de composées d'homothéties et d'isométries

1. Composées d'une homothétie et d'une rotation

Soit ABC un triangle équilatéral de sens direct, I le milieu de [BC], H le projeté orthogonal de I sur (AB) et G le centre de gravité de ABC.



- Soit r la rotation de centre H et d'angle $\frac{\pi}{2}$, h l'homothétie de centre H et de rapport $\sqrt{3}$.

Les triangles IHB et AHI sont semblables, de même sens et $AI = IB\sqrt{3}$.

On vérifie que l'image de IHB par la transformation $h \circ r$ est AHI.

L'image de IHB par la transformation $r \circ h$ est également AHI.

- Soit r' la rotation de centre I et d'angle $-\frac{\pi}{3}$, h' l'homothétie de centre G et de rapport -2.

Les triangles IHB et AIC sont semblables, de même sens et AC = 2 IB.

L'image de IHB par la transformation $h' \circ r'$ est AIC.

$h \circ r$, $r \circ h$, $h' \circ r'$ sont des composées d'une homothétie et d'un déplacement ; on dit que ce sont des similitudes directes.

2. Composée d'une homothétie et d'une symétrie orthogonale

On reprend la figure précédente. Soit K le milieu de [AC].

Soit h'' l'homothétie de centre B et de rapport 2, s la symétrie orthogonale par rapport à (AI).

Les triangles IHB et BKC sont semblables, de sens contraires et BC = 2 IB.

On vérifie que l'image de IHB par la transformation s o h'' est BKC.

s o h'' est la composée d'une homothétie et d'un antidéplacement ; on dit que c'est une similitude indirecte.

Similitudes

Nous allons procéder ici à une première étude de la composée d'une homothétie et d'une isométrie. Une étude plus approfondie de ces transformations sera faite en classe de terminale.

Définitions

- **On appelle similitude toute transformation composée d'une homothétie et d'une isométrie.**
- **Si l'isométrie est un déplacement, on dit que la similitude est directe.**
- **Si l'isométrie est un antidéplacement, on dit que la similitude est indirecte.**

Cas particuliers

L'application identique est à la fois une homothétie et une isométrie. On en déduit que :

- *les déplacements et les homothéties sont des similitudes directes ;*
- *les antidéplacements sont des similitudes indirectes.*

Propriété 1

Soit h une homothétie de rapport k et i une isométrie.

Les similitudes h o i et i o h multiplient les distances par $|k|$.

$|k|$ est appelé rapport des similitudes h o i et i o h.

Démonstration

Les isométries conservent les distances et les homothéties de rapport k les multiplient par $|k|$.

Donc, une similitude, composée de ces deux transformations, multiplie les distances par $|k|$.

Propriété 2

- **Les similitudes directes conservent les angles orientés.**
- **Les similitudes indirectes transforment tout angle orienté en son opposé.**

En effet, les homothéties et les déplacements conservent les angles orientés, et les antidéplacements transforment les angles orientés en leurs opposés.

Propriété 3

Soit s une similitude directe, composée d'une homothétie et d'une rotation d'angle α.

Pour tous points M et N distincts, d'images respectives M' et N', on a : $(\overrightarrow{MN},\overrightarrow{M'N'}) = \widehat{\alpha}$.

α est appelé angle de la similitude directe s.

Démonstration

Soit h une homothétie et r une rotation d'angle α.

Nous allons faire la démonstration de la propriété dans le cas où $s = h \circ r$.

On pose : $r(M) = M_1$, $r(N) = N_1$, $h(M_1) = M'$, $h(N_1) = N'$.

On a : $(\widehat{\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{M_1N_1}}) = \widehat{\alpha}$ et $(\widehat{\overrightarrow{M_1N_1}, \overrightarrow{M'N'}}) = \widehat{0}$.

Donc : $(\widehat{\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{M'N'}}) = (\widehat{\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{M_1N_1}}) + (\widehat{\overrightarrow{M_1N_1}, \overrightarrow{M'N'}}) = \widehat{\alpha}$.

La propriété se démontre de façon analogue dans le cas où $s = r \circ h$.

Remarque

Les similitudes étant des composées d'homothéties et d'isométries, elles vérifient les propriétés communes à ces deux transformations :

- *les similitudes conservent l'alignement ;*
- *les similitudes conservent le milieu ;*
- *les similitudes conservent le parallélisme et l'orthogonalité ;*
- *les similitudes conservent le contact.*

Triangles semblables

En classe de troisième, nous avons appris à reconnaître deux triangles semblables.

Nous allons maintenant en donner une définition, à l'aide des similitudes.

Définition

On dit que deux triangles ABC et A'B'C' sont semblables s'il existe une similitude s telle que les points A, B et C ont respectivement pour images A', B' et C' par s.

Les propriétés des similitudes vont nous permettre de déterminer deux conditions suffisantes pour que deux triangles soient semblables. Ces conditions sont appelées critères de similitude.

Propriété 1

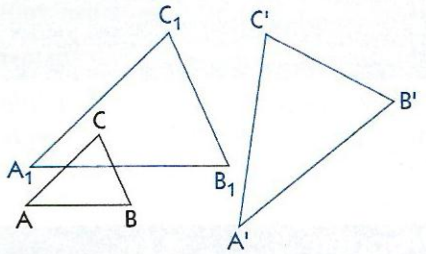
Si deux triangles ont leurs côtés deux à deux proportionnels, alors ils sont semblables.

Démonstration

ABC et A'B'C' sont deux triangles tels que : $\frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{C'B'}{CB}$.

On pose : $k = \frac{A'B'}{AB}$. Soit h une homothétie de rapport k,

A_1, B_1 et C_1 les images respectives de A, B et C par h.



On a : $A_1B_1 = k\,AB$ et $A'B' = k\,AB$.

Donc : $A_1B_1 = A'B'$.

On démontre de même que : $A_1C_1 = A'C'$ et $B_1C_1 = B'C'$.

Donc, les triangles $A_1B_1C_1$ et A'B'C' sont isométriques ; il existe une isométrie i qui transforme $A_1B_1C_1$ en A'B'C'.

A'B'C' est l'image de ABC par la similitude $i \circ h$.

Donc, ABC et A'B'C' sont semblables.

Propriété 2

Si deux triangles ont leurs angles deux à deux de même mesure, alors ils sont semblables.

Démonstration

ABC et A'B'C' sont deux triangles tels que : mes $\widehat{A}$ = mes $\widehat{A'}$, mes $\widehat{B}$ = mes $\widehat{B'}$ et mes $\widehat{C}$ = mes $\widehat{C'}$.

On a donc : $\sin \widehat{A} = \sin \widehat{A'}$, $\sin \widehat{B} = \sin \widehat{B'}$ et $\sin \widehat{C} = \sin \widehat{C'}$.

On sait que : $\dfrac{a}{\sin \widehat{A}} = \dfrac{b}{\sin \widehat{B}} = \dfrac{c}{\sin \widehat{C}}$, où $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$;

$\dfrac{a'}{\sin \widehat{A'}} = \dfrac{b'}{\sin \widehat{B'}} = \dfrac{c'}{\sin \widehat{C'}}$, où $a' = B'C'$, $b' = C'A'$, $c' = A'B'$.

On en déduit que : $\dfrac{a}{a'} = \dfrac{b}{b'} = \dfrac{c}{c'}$.

Donc, d'après la propriété 1, ABC et A'B'C' sont semblables.

2.3. Travaux dirigés

L'objet de ce travail dirigé est de démontrer le théorème de Ménélaüs.
Trois points M, N, P, appartenant respectivement aux côtés (AB), (BC), (AC) d'un triangle ABC et distincts des sommets de ce triangle, sont alignés si et seulement si : $\dfrac{\overline{MB}}{\overline{MA}} \times \dfrac{\overline{NC}}{\overline{NB}} \times \dfrac{\overline{PA}}{\overline{PC}} = 1$.

M, N, P sont trois points appartenant respectivement aux côtés (AB), (BC), (AC) d'un triangle ABC, distincts des points A, B, C.

Soit h l'homothétie de centre M et de rapport k tel que : $k = \dfrac{\overline{MB}}{\overline{MA}}$

Soit h' l'homothétie de centre N et de rapport k' tel que : $k' = \dfrac{\overline{NC}}{\overline{NB}}$.

1°) Déterminer l'image de A par la transformation h' o h.

2°) On suppose que les points M, N et P sont alignés.

***a)* Démontrer que h' o h est une homothétie et calculer son rapport.**

***b)* Démontrer que P est le centre de l'homothétie h' o h et en déduire que :**
$\dfrac{\overline{MB}}{\overline{MA}} \times \dfrac{\overline{NC}}{\overline{NB}} \times \dfrac{\overline{PA}}{\overline{PC}} = 1$.

3°) Réciproquement, on suppose que : $\dfrac{\overline{MB}}{\overline{MA}} \times \dfrac{\overline{NC}}{\overline{NB}} \times \dfrac{\overline{PA}}{\overline{PC}} = 1$.

Démontrer que les points M, N et P sont alignés.

Solution guidée

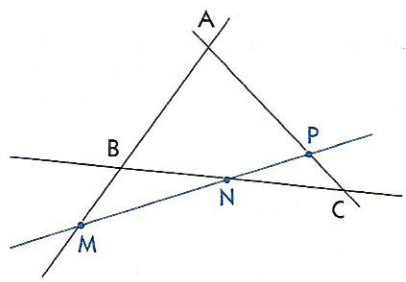
1°) Vérifier que : h' o h(A) = C.

2°) *a)* • Calculer $k'k$.

• Démontrer que : si $k'k = 1$, alors (MN) et (AC) sont parallèles.

• Conclure.

b) • Justifier que le centre de l'homothétie h' o h appartient aux droites (MN) et (AC) et est donc le point P.



• Vérifier que : $k'k = \dfrac{\overline{PC}}{\overline{PA}}$;

en déduire que : $\dfrac{\overline{MB}}{\overline{MA}} \times \dfrac{\overline{NC}}{\overline{NB}} \times \dfrac{\overline{PA}}{\overline{PC}} = 1$.

3°) • Démontrer que : $k'k = \dfrac{\overline{PC}}{\overline{PA}}$.

• En déduire que h' o h est l'homothétie de centre P et de rapport $k'k$.

• Démontrer que P appartient à la droite (MN).

• Conclure.

Exercices

2.a ABC est un triangle.
Soit h et h' les homothéties de centres respectifs B et C, de rapports respectifs 2 et $-\frac{1}{3}$.
1. Démontrer que h' o h est une homothétie et préciser son rapport.
2. Construire l'image de A par h' o h et en déduire une détermination du centre de cette homothétie.

2.b ABC est un triangle.
Soit h et h' les homothéties de centres respectifs B et C, de rapports respectifs $\frac{2}{3}$ et $\frac{3}{2}$.
1. Démontrer que h' o h est une translation.
2. Construire l'image de A par h' o h et en déduire une détermination du vecteur de cette translation.
Exprimer ce vecteur en fonction de $\overrightarrow{BC}$.

2.c ABC est un triangle.
Soit h l'homothétie de centre B et de rapport $\frac{1}{2}$ et t la translation de vecteur $\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$.
1. Justifier que t o h est une homothétie et préciser son rapport.
2. Construire l'image de A par t o h et en déduire une détermination du centre de cette homothétie.

2.d Soit h l'homothétie de centre O et de rapport -2, h' l'homothétie de centre O' et de rapport $\frac{1}{2}$.
1. Démontrer que h' o h est la symétrie de centre I tel que : $\overrightarrow{OI} = \frac{1}{4}\overrightarrow{OO'}$.
2. Déterminer la transformation h o h'.

2.e O et O' sont deux points distincts du plan, k est un nombre réel non nul et différent de 1.
Soit h l'homothétie de centre O et de rapport k, h' l'homothétie de centre O' et de rapport $\frac{1}{k}$.
1. Démontrer que h' o h est la translation de vecteur $\frac{k-1}{k}\overrightarrow{OO'}$.
2. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la transformation h o h'.

2.f Le plan est muni du repère orthonormé (O, I, J).
Soit h et h' les homothéties dont les expressions analytiques sont respectivement :
$$\begin{cases} x' = -2x \\ y' = -2y \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x' = \frac{3}{2}x - 4 \\ y' = \frac{3}{2}y. \end{cases}$$
1. Démontrer que les transformations h' o h et h o h' sont des homothéties et déterminer leurs expressions analytiques dans le repère (O, I, J).
2. Déterminer les coordonnées des centres de ces homothéties.

2.g Le plan est muni du repère orthonormé (O, I, J).
Soit h l'homothétie de centre $\Omega\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$ et de rapport -3, t la translation de vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$ et σ la symétrie orthogonale d'axe (OI).
1. Déterminer les expressions analytiques des homothéties t o h et h o t.
2. Déterminer les expressions analytiques des similitudes σ o h et h o σ.

Exercices

APPRENTISSAGE

Lieux géométriques

1 ABCD est un quadrilatère et O un point du plan. À tout point P de ABCD on associe le point Q, milieu de [OP].
Déterminer le lieu géométrique des points Q lorsque P décrit ABCD.

2 Soit $(\mathscr{C})$ un cercle et A, B deux points distincts de $(\mathscr{C})$. Déterminer le lieu géométrique du centre de gravité G du triangle ABM, lorsque M décrit le cercle $(\mathscr{C})$ privé des points A et B.

3 Soit ABCD un carré, M un point de [AC], P et Q les projetés orthogonaux respectifs de M sur les côtés [AB] et [BC].
Déterminer le lieu géométrique du point I, milieu de [PQ], lorsque M décrit [AC].

4 ABC est un triangle et M un point de [BC]. Soit G et G' les centres de gravité respectifs des triangles ABM et ACM.
1. Déterminer les lieux géométriques respectifs (Γ) et (Γ'), des point G et G' lorsque M décrit le segment [BC].
2. Préciser la position du point commun à (Γ) et (Γ').

5 On considère un cercle $(\mathscr{C})$, de centre O et de rayon r, et un point A distinct de O.
Soit M un point du cercle $(\mathscr{C})$ et G le centre de gravité du triangle AOM.
Déterminer le lieu géométrique du point G lorsque M décrit le cercle $(\mathscr{C})$.

Problèmes de construction

6 Soit deux cercles $(\mathscr{C})$, $(\mathscr{C}')$ de centres respectifs O, O' $(O \neq O')$ et de rayons respectifs r, r' $(r > r')$.
1. Démontrer qu'il existe deux homothéties h et h' transformant $(\mathscr{C})$ en $(\mathscr{C}')$ et déterminer les rapports respectifs de h et h'.
2. Construire les centres de ces homothéties dans chacun des cas suivants :
a) $(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{C}')$ sont extérieurs l'un à l'autre ;
b) $(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{C}')$ sont tangents extérieurement ;
c) $(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{C}')$ sont sécants ;
d) $(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{C}')$ sont tangents intérieurement ;
e) $(\mathscr{C}')$ est intérieur à $(\mathscr{C})$.

7 Soit $(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{C}')$ deux cercles de centres et de rayons distincts, A un point du plan.
Construire le point A', image de A par une homothétie transformant $(\mathscr{C})$ en $(\mathscr{C}')$.

8 Soit (Δ) et (Δ') deux droites sécantes en un point I, A un point n'appartenant à aucune de ces droites.
Construire deux points M et N appartenant respectivement à (Δ) et (Δ'), tels que : $\overrightarrow{AM} + 2\,\overrightarrow{AN} = \vec{0}$.

9 Soit $(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{C}')$ deux cercles sécants, A un de leurs points d'intersection.
Construire une droite (Δ) passant par A, coupant les cercles $(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{C}')$ respectivement aux points M et N tels que : $\overrightarrow{AM} = -2\,\overrightarrow{AN}$.

10 (Δ_1), (Δ_2) et (Δ_3) sont trois droites sécantes deux à deux. Construire un carré ABCD tel que :
$A \in (\Delta_1)$, $B \in (\Delta_2)$, $C \in (\Delta_3)$ et $D \in (\Delta_3)$.

11 Soit $(\mathscr{C})$ un demi-cercle de centre O et de diamètre [AB]. Construire un carré PQRS tel que :
$P \in [AB]$, $Q \in [AB]$, $R \in (\mathscr{C})$ et $S \in (\mathscr{C})$.

12 Soit (Δ) et (Δ') deux droites strictement parallèles, A un point situé entre les droites (Δ) et (Δ').
Construire un triangle AMM' rectangle et isocèle en M, de sens direct, tel que les points M et M' soient situés respectivement sur (Δ) et (Δ').

Démonstrations de propriétés

13 Soit $(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{C}')$ deux cercles de rayons distincts, [AB] un diamètre de $(\mathscr{C})$.
On désigne par h et h' les homothéties qui transforment $(\mathscr{C})$ en $(\mathscr{C}')$.
Démontrer que : $h(A) = h'(B)$ et $h'(A) = h(B)$.

14 ABC et A'B'C' sont deux triangles non isométriques tels que :
(AB) // (A'B'), (BC) // (B'C') et (AC) // (A'C').
1. Démontrer qu'il existe une homothétie qui transforme ABC en A'B'C'.
2. En déduire que les droites (AA'), (BB') et (CC') sont concourantes.

15 ABC est un triangle, I, J et K sont les milieux respectifs des côtés [BC], [CA] et [AB].
Soit P le point d'intersection de la droite parallèle à (BJ) passant par K et de la droite parallèle à (CK) passant par J.
Démontrer que les points A, P et I sont alignés.

16 ABCD est un quadrilatère convexe. Soit E un point de [AB] et F un point de [AD] tels que : $\frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AD}$.
La droite (Δ), parallèle à (BC) passant par E, et la droite (Δ'), parallèle à (CD) passant par F, se coupent en un point O.
Démontrer que les points A, O et C sont alignés.

17 On considère les cercles $(\mathscr{C})$, de centre O et de rayon r, et $(\mathscr{C}')$, de centre O' et de rayon r', tangents en un point T. Soit I un point intérieur au cercle $(\mathscr{C})$.

À tout point M de $(\mathscr{C})$ on associe les points :
- N, second point d'intersection de (IM) et de $(\mathscr{C})$;
- M', second point d'intersection de (TM) et de $(\mathscr{C}')$;
- N', second point d'intersection de (TN) et de $(\mathscr{C}')$.

Démontrer que, lorsque le point M décrit $(\mathscr{C})$, toutes les droites (M'N') passent par un point fixe.

18 Soit [AB] et [A'B'] deux segments tels que : (AB) // (A'B') et AB ≠ A'B'.
On construit des carrés ABCD et A'B'C'D' tels que :
$(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}) = (\widehat{\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'}})$.
Démontrer que les droites (AA'), (BB'), (CC') et (DD') sont concourantes.

19 Soit ABCD un parallélogramme de centre O et E un point de la diagonale [BD], distinct de O.
La droite passant par E et parallèle à (AD) coupe (AB) en F et (CD) en G. La droite passant par E et parallèle à (AB) coupe (AD) en H et (BC) en I.
Démontrer que les droites (FH), (BD) et (IG) sont concourantes.

Similitudes

20 Soit O un point du plan et $\vec{u}$ un vecteur.
On désigne par h l'homothétie de centre O et de rapport 2, par t la translation de vecteur $\vec{u}$.
1. *a)* Soit M' l'image d'un point M par la transformation h o t. Exprimer $\overrightarrow{OM'}$ en fonction de $\overrightarrow{OM}$ et $\vec{u}$.
b) Soit Ω le centre de l'homothétie h o t. Exprimer $\overrightarrow{O\Omega}$ en fonction de $\vec{u}$.
2. Mêmes questions pour la transformation t o h.

21 On considère deux triangles équilatéraux OAP et OBQ de sens direct et tels que B est le projeté orthogonal de O sur (AP).
Déterminer une similitude s telle que les points O, A et P ont pour images respectives par s les points O, B et Q.

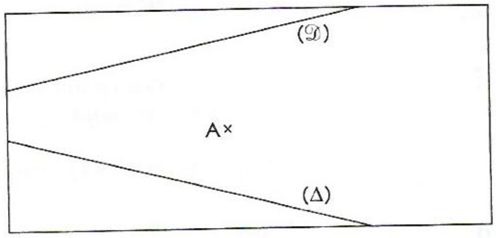
22 OAB est un triangle isocèle en O. Soit h l'homothétie de centre O et de rapport k, r la rotation de centre O et d'angle α.
On désigne par D et E les images respectives de A et B par la transformation h o r, C le point tel que ABCD soit un parallélogramme .
Quelle est la nature du triangle BCE ?

23 Le plan est muni du repère orthonormé (O, I, J).
Soit h l'homothétie de centre O et de rapport –2,
s_A la symétrie de centre $A\begin{pmatrix}-3\\1\end{pmatrix}$.
1. Écrire les expressions analytiques de h et s_A, puis celle de la transformation s_A o h.
2. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la transformation s_A o h.

APPROFONDISSEMENT

24 Le plan est muni du repère orthonormé (O, I, J).
h est l'homothétie de centre $\Omega\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$ et de rapport $-\frac{3}{2}$, $(\mathscr{C})$ est le cercle de centre $A\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$ et de rayon 2.
Déterminer une équation du cercle $(\mathscr{C}')$, image du cercle $(\mathscr{C})$ par l'homothétie h.

25 La figure ci-dessous représente une feuille de papier sur laquelle on a tracé deux droites $(\mathscr{D})$ et (Δ) se coupant en un point O extérieur à la feuille. A est un point de la feuille de papier.



Tracer, sans sortir de la feuille, la portion de la droite (OA) incluse dans la feuille.

26 Soit (Δ) une droite, $(\mathscr{C})$ un cercle, A un point de $(\mathscr{C})$.
Construire un cercle (Γ) tangent à $(\mathscr{C})$ en A et tangent à (Δ).

27 Soit $(\mathscr{C})$ un cercle, (Δ) une droite et I un point de (Δ).
Construire un cercle tangent au cercle $(\mathscr{C})$ et tangent à la droite (Δ) en I.
Discuter le nombre de solutions suivant les positions relatives de $(\mathscr{C})$, (Δ) et I.

28 ABC est un triangle.
Construire un point P de [AB] et un point Q de [AC] tels que : BP = PQ = QC.
(On pourra utiliser une homothétie de centre B ou C.)

29 Soit $(\mathscr{C})$ un cercle de centre O et A un point distinct de O.
À tout point M de $(\mathscr{C})$ on associe les points P et Q, milieux respectifs de [AM] et [OP].
1. Déterminer les lieux (Γ) et (Γ') des points P et Q lorsque M décrit le cercle $(\mathscr{C})$.
2. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la transformation qui à $(\mathscr{C})$ associe (Γ').

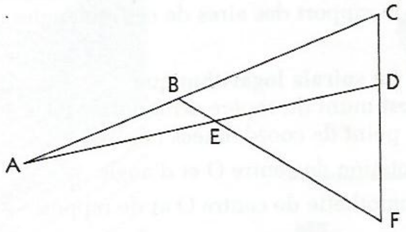
30 ABC est un triangle. Soit A', B' et C' les milieux respectifs des côtés [BC], [CA] et [AB], G le centre de gravité de ABC. On désigne par H l'orthocentre de ABC et par O le centre du cercle circonscrit à ce triangle.
1. Trouver une homothétie qui transforme les droites (OA'), (OB') et (OC') respectivement en (AH), (BH) et (CH).
2. En déduire que les points O, G et H appartiennent à une même droite (Δ).
(Δ) *est appelée la droite d'Euler du triangle ABC.*

31 ABC est un triangle, A', B' et C' sont les milieux respectifs des côtés [BC], [CA] et [AB], P est un point du plan distinct des points A, B et C.
On trace les droites (Δ_1) passant par A' et parallèle à (AP), (Δ_2) passant par B' et parallèle à (BP), (Δ_3) passant par C' et parallèle à (CP).
Démontrer que les droites (Δ_1), (Δ_2) et (Δ_3) sont concourantes.

32 Le quadrilatère complet

Sur la figure ci-dessous A, B, C, D, E et F sont les sommets d'un quadrilatère complet.

(On appelle quadrilatère complet la figure composée de quatre droites sécantes deux à deux et de leurs six points d'intersection.)



Soit I, J et K les milieux respectifs des diagonales [AF], [BD] et [EC] de ce quadrilatère complet.

On se propose de démontrer que I, J et K sont alignés.

On désigne par h et h' les homothéties de centre A et telles que : h(B) = C et h'(D) = E.

1. Soit I' et J' les points tels que EFCI' et BFDJ' sont des parallélogrammes.

a) Déterminer l'image de la droite (BJ') par h' o h, puis l'image de la droite (DJ') par h o h'.

b) En déduire que A, I' et J' sont alignés.

2. Démontrer que I, J et K sont les images respectives de A, I' et J' par une homothétie que l'on précisera. Conclure.

33 Soit A, I et B trois points distincts alignés dans cet ordre, ($\mathscr{C}$) et ($\mathscr{C}'$) les cercles de diamètres respectifs [AI] et [IB], (Δ) une tangente commune extérieure à ($\mathscr{C}$) et ($\mathscr{C}'$), M et N les points de contact respectifs de (Δ) avec ($\mathscr{C}$) et ($\mathscr{C}'$), P le point d'intersection des droites (AM) et (BN).

1. Déterminer, suivant la position du point I sur le segment [AB], la transformation f qui au cercle ($\mathscr{C}$) associe le cercle ($\mathscr{C}'$) et laisse la droite (Δ) globalement invariante.

2. En utilisant la transformation f précédente, déterminer la nature du quadrilatère PMIN.

3. Soit Q l'image de P par f et R l'antécédent de P par f. Démontrer que les droites (RA) et (QB) sont tangentes respectivement à ($\mathscr{C}$) et ($\mathscr{C}'$).

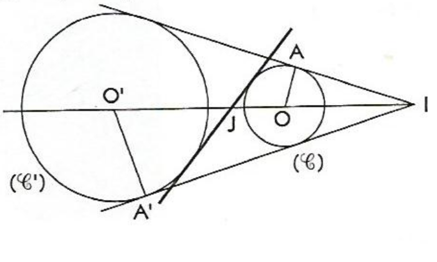
34 ABC est un triangle rectangle en A. Soit H le pied de la hauteur issue de A, I et J les projetés orthogonaux de H respectivement sur (AB) et (AC).

On pose : AC = *b* et AB = *c*.

1. Démontrer que les triangles ABC et AJI sont semblables et calculer, en fonction de *b* et *c*, le rapport de similitude $\frac{IJ}{BC}$.

2. Déterminer une homothétie h de centre A et une symétrie orthogonale s, dont l'axe passe par A, telles que l'image du triangle ABC par s o h soit le triangle AJI.

35 Sur la figure ci-dessous, les cercles ($\mathscr{C}$) et ($\mathscr{C}'$) ont pour centres respectifs O et O', pour rayons respectifs *r* et *r'* ($r \neq r'$).



1. Démontrer que les triangles IAO et IA'O' sont semblables. Déterminer les éléments d'une similitude qui transforme les points I, A, O respectivement en I, A', O'.

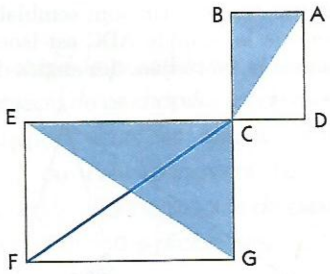
2. Soit h et h' les deux homothéties qui transforment ($\mathscr{C}$) en ($\mathscr{C}'$), h étant celle dont le rapport est positif, h^{-1} et h'^{-1} leurs réciproques.

Déterminer la nature et les éléments caractéristiques des transformations h'^{-1} o h et h' o h^{-1}.

3. Soit B le symétrique de A par rapport à (OO') et B' le symétrique de A' par rapport à O'.

Démontrer que : B' = h'(B).

36 ABCD et GCEF sont deux rectangles directs tels que : GC = 2 AB et CE = 2 BC.



1. Démontrer que les triangles ABC et GCE, ainsi que les triangles ABC et EFG, sont semblables.

En déduire qu'il existe deux similitudes directes s et s' qui, au rectangle ABCD, associent le rectangle GCEF.

Préciser, pour chacune de ces similitudes, les images respectives des points A, B, C, D, l'angle et le rapport. *(On notera s la similitude d'angle $\frac{\pi}{2}$.)*

2. Soit Ω le projeté orthogonal de C sur (GD).

a) Démontrer que Ω est invariant par s.

b) En déduire qu'il existe une homothétie h et une rotation r, toutes deux de centre Ω, telles que :

s = h o r = r o h.

Le point Ω est appelé centre de la similitude s.

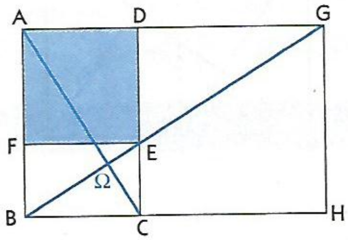
3. Déterminer de même le centre Ω' de la similitude s', puis une homothétie h' et une rotation r', toutes deux de centre Ω', telles que : s' = h' o r' = r' o h'..

37 Les rectangles d'or

On considère un rectangle ABCD tel que :

$\frac{AB}{AD} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \varphi.$

1. À l'intérieur de ce rectangle on construit un carré ADEF.



Démontrer qu'il existe une similitude telle que les points B, C, E, F ont pour images respectives A, B, C, D et donner le rapport de cette similitude.

2. On construit maintenant, à l'extérieur du rectangle ABCD, un carré CDGH.

Démontrer qu'il existe une similitude telle que les points A, B, C, D ont pour images respectives G, A, B, H et ayant le même rapport que précédemment.

3. *a)* Démontrer que les droites (BE), (AC) et (GB) sont concourantes en un point Ω.

b) Déterminer le rapport d'une homothétie h de centre Ω et l'angle d'une rotation r de centre Ω, telles que :

- (B, C, E, F) a pour image (A, B, C, D) par r o h,
- (A, B, C, D) a pour image (G, A, B, H) par r o h.

Les rectangles EFBC, ABCD, BHGA sont appelés « rectangles d'or ».

38 Les triangles d'or

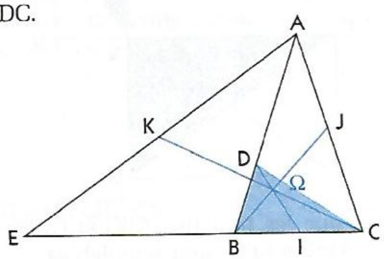
Soit ABC un triangle isocèle en A, tel que :

$\frac{AB}{BC} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \varphi$.

1. Soit D le point de [AB], tel que : AD = BC.

a) Démontrer que ABC et CDB sont semblables.

b) En déduire que le triangle ADC est isocèle en D et calculer les mesures, en radian, des angles des triangles ABC et ADC.



2. Soit E le point de la droite (BC), extérieur au segment [BC], tel que : BE = BA.

Démontrer que les triangles ABC et ECA sont semblables, ainsi que les triangles ADC et EBA.

Ces deux familles de triangles sont appelés des « triangles d'or ».

3. Soit I, J et K les milieux respectifs de [BC], [CA] et [AE].

a) Démontrer que les droites (DI), (BJ) et (CK) sont concourantes en un point Ω.

b) Déterminer le rapport d'une homothétie h de centre Ω et l'angle d'une rotation r de centre Ω, telles que :

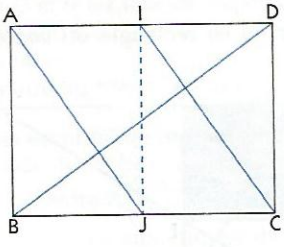
- (C, D, B) a pour image (A, B, C) par r o h ;
- (A, B, C) a pour image (E, C, A) par r o h.

c) Quelle est l'image de (A, D, C) par r o h ?

39 Le nombre $\sqrt{2}$

ABCD est un rectangle tel que AB < AD. On pose : $\frac{AD}{AB} = k$.

Soit I et J les milieux respectifs de [AD] et [BC].



1. Démontrer que les droites (AJ) et (IC) sont perpendiculaires à la diagonale (BD) si et seulement si il existe une similitude, de rapport k, transformant ABJ en DAB. Calculer k.

2. Démontrer que le rectangle ABCD est l'image du rectangle BJIA par la similitude précédente.

Calculer le rapport des aires de ces rectangles.

40 La spirale logarithmique

Le plan est muni du repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

A_0 est le point de coordonnées (1 ; 0) ;

r est la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{6}$;

h est l'homothétie de centre O et de rapport $\frac{2}{\sqrt{3}}$.

On considère la similitude s telle que : s = r o h

1. Construire le point $A_1 = s(A_0)$ et démontrer que le triangle OA_0A_1 est rectangle en A_0.

2. Construire les points $A_2, A_3, \ldots, A_{13}$ définis par : $A_2 = s(A_1)$, $A_3 = s(A_2)$, … , $A_{13} = s(A_{12})$.

3. Pour tout entier naturel n, on pose :

$u_n = OA_n$ et $v_n = (\overrightarrow{OA_0}, \overrightarrow{OA_n})$.

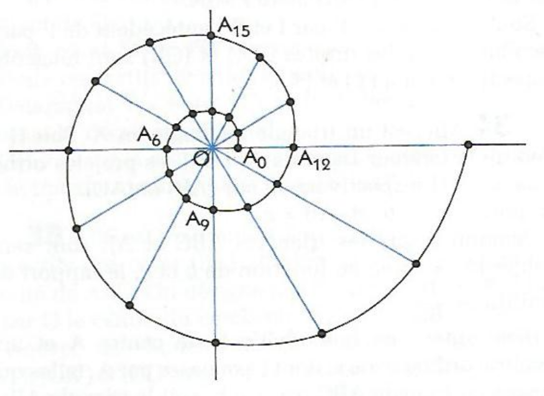
a) Démontrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $\frac{2}{\sqrt{3}}$ et que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite arithmétique de raison $\frac{\pi}{6}$.

b) Calculer OA_n et $(\overrightarrow{OA_0}, \overrightarrow{OA_n})$ en fonction de n.

c) On note s^n la transformation qui, au point A_0, associe le point A_n.

Déterminer les valeurs de n pour que s^n soit une homothétie ; préciser le rapport de cette homothétie en fonction de n.

La ligne brisée $A_0A_1A_2 \ldots A_n \ldots$ est voisine d'une courbe appelée spirale logarithmique.



6

Orthogonalité dans l'espace

Introduction

En classe de seconde, nous avons étudié le parallélisme et les propriétés d'incidence dans l'espace. L'objectif de ce chapitre est de mettre en évidence, en utilisant comme support visuel les solides connus (cubes, pavés droits, tétraèdre, …) ou l'environnement habituel (immeubles, salles de classes, …), la notion d'orthogonalité de droites ou de plans, puis de l'utiliser dans la résolution de problèmes.

Une vue d'Abidjan (Côte d'Ivoire).

SOMMAIRE

$\mathscr{E}$ désigne l'espace. Rappelons ici un axiome de géométrie dans l'espace (noté (A_5) dans le manuel de seconde) que nous utiliserons très souvent :
« les théorèmes de géométrie plane sont vrais dans tout plan de l'espace ».

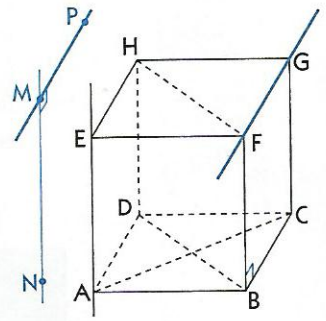
1 Droites et plans orthogonaux

1.1. Droites orthogonales

Introduction

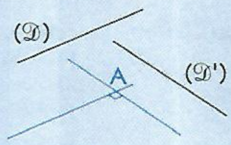
Soit ABCDEFGH un cube.

Considérons les droites (AE) et (FG). Les parallèles à ces droites passant par un même sommet du cube sont perpendiculaires ; par exemple, les droites (BF) et (BC), sont perpendiculaires.
De même, les droites (CG) et (CB), (HD) et (HE), (DH) et (DA) sont perpendiculaires.
On admettra que les parallèles aux droites (AE) et (FG) passant par un même point M de $\mathscr{E}$ sont également perpendiculaires : les droites (MN) et (MP) sont perpendiculaires.
On dit que les droites (AE) et (FG) sont orthogonales.
De même, les droites (EH) et (AB), (AC) et (HF), (BG) et (ED) sont orthogonales.



Définition

Deux droites de $\mathscr{E}$ sont orthogonales lorsque, un point de $\mathscr{E}$ étant choisi, les parallèles à ces droites passant par ce point sont perpendiculaires.



« $(\mathscr{D})$ est orthogonale à $(\mathscr{D}')$ » se note : $(\mathscr{D}) \perp (\mathscr{D}')$.

Remarque

Deux droites de $\mathscr{E}$ sont perpendiculaires lorsqu'elles sont orthogonales et sécantes.

Propriétés

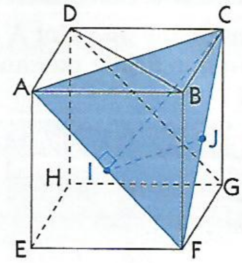
On déduit directement de la définition les propriétés suivantes.

Propriétés

• Si deux droites sont orthogonales, toute droite parallèle à l'une est orthogonale à l'autre.	**• Si deux droites sont parallèles, toute droite orthogonale à l'une est orthogonale à l'autre.**
$\begin{cases} (\mathscr{D}) \perp (\mathscr{D}') \\ (\Delta) \,/\!/\, (\mathscr{D}) \end{cases} \Rightarrow (\Delta) \perp (\mathscr{D}')$.	$\begin{cases} (\mathscr{D}) \,/\!/\, (\mathscr{D}') \\ (\Delta) \perp (\mathscr{D}) \end{cases} \Rightarrow (\Delta) \perp (\mathscr{D}')$.

Exemples

Soit ABCDEFGH un cube, I et J les milieux respectifs des segments [AF] et [CF]. Dans le triangle équilatéral AFC, (CI) est une médiane et (IJ) une droite des milieux.



- $\begin{cases} (CI) \perp (AF) \\ (AF) \,//\, (DG) \end{cases} \Rightarrow (CI) \perp (DG).$
- $\begin{cases} (IJ) \,//\, (AC) \\ (AC) \perp (BD) \end{cases} \Rightarrow (IJ) \perp (BD).$

Remarque

Deux droites peuvent être orthogonales à une même troisième sans être parallèles.
Dans l'exemple ci-dessus, (AB) et (FG) sont toutes deux orthogonales à (DH), mais elles ne sont pas parallèles.

1.2. Droite et plan orthogonaux

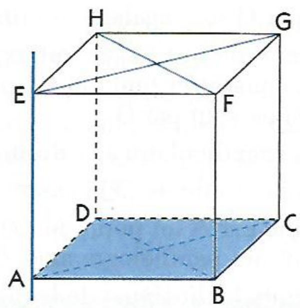
Introduction

Soit ABCDEFGH un cube.

- La droite (EA) est perpendiculaire aux droites sécantes (AD) et (AB) du plan (ABC) ; on dit que la droite (EA) et le plan (ABC) sont orthogonaux.

La droite (EA) est aussi orthogonale aux droites (AC), (BD), (CD) et (BC) du plan (ABC). On démontrera plus loin que (EA) est orthogonale à toutes les droites du plan (ABC).

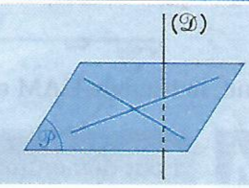
- De même, la droite (AC) est orthogonale aux droites sécantes (BD) et (DH), donc au plan (BDH).
- Par contre, la droite (AC) est orthogonale aux droites parallèles (CG) et (BF) du plan (BCG), mais elle n'est pas orthogonale à la droite (BC) de ce même plan ; la droite (AC) n'est pas orthogonale au plan (BCG).



Définition et propriétés

Définition

Une droite $(\mathscr{D})$ et un plan $(\mathscr{P})$ sont orthogonaux lorsque la droite $(\mathscr{D})$ est orthogonale à deux droites sécantes du plan $(\mathscr{P})$.



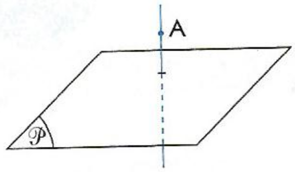
On note : $(\mathscr{D}) \perp (\mathscr{P})$ ou $(\mathscr{P}) \perp (\mathscr{D})$.

Remarques

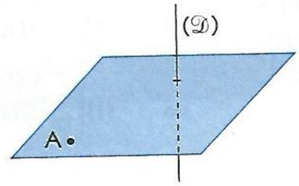
- *On dit également que $(\mathscr{D})$ est orthogonale à $(\mathscr{P})$ ou que $(\mathscr{P})$ est orthogonal à $(\mathscr{D})$.*
- *Si une droite est orthogonale à un plan, alors elle est sécante à ce plan en un point ; elle est dite orthogonale au plan en ce point.*
- *Une droite peut être orthogonale à deux droites parallèles d'un plan sans être orthogonale à ce plan.*

Propriétés

• Étant donné un point A et un plan $(\mathscr{P})$, il existe une unique droite passant par A et orthogonale à $(\mathscr{P})$.



• Étant donné un point A et une droite $(\mathscr{D})$, il existe un unique plan passant par A et orthogonal à $(\mathscr{D})$.

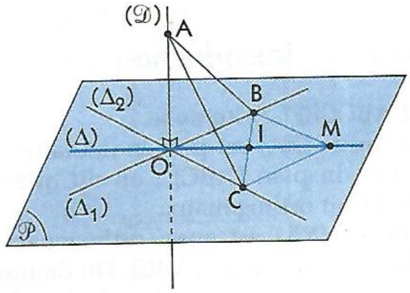


Ces propriétés sont admises.

Propriété fondamentale

Si une droite est orthogonale à un plan, alors elle est orthogonale à toute droite de ce plan.

Démonstration



Soit $(\mathscr{D})$ une droite orthogonale à un plan $(\mathscr{P})$ en un point O. $(\mathscr{D})$ est donc orthogonale à deux droites sécantes (Δ_1) et (Δ_2) de $(\mathscr{P})$.

On suppose que ces droites passent par O ; en effet, si elles sont sécantes en un point autre que O, les parallèles à ces droites passant par O sont également orthogonales à $(\mathscr{D})$.

Pour démontrer que $(\mathscr{D})$ est orthogonale à toute droite de $(\mathscr{P})$, il suffit de démontrer que $(\mathscr{D})$ est perpendiculaire à toute droite (Δ) de $(\mathscr{P})$ passant par O.

$(\mathscr{D})$ est perpendiculaire aux droites (Δ_1) et (Δ_2).

Soit (Δ) une droite de $(\mathscr{P})$ passant par O, distincte de (Δ_1) et (Δ_2), et M un point de (Δ) distinct de O.

On désigne par A un point de $(\mathscr{D})$ distinct de O, par B et C les points respectifs de (Δ_1) et (Δ_2) tels que OBMC soit un parallélogramme. On désigne par I le centre de ce parallélogramme.

On applique le théorème de la médiane au triangle ABC : $AB^2 + AC^2 = 2\ AI^2 + \frac{1}{2}\ BC^2$ (1).

Les triangles OAB et OAC sont rectangles, donc : $AB^2 = OA^2 + OB^2$ et $AC^2 = OA^2 + OC^2$.

D'où : (1) $\Leftrightarrow$ $(OA^2 + OB^2) + (OA^2 + OC^2) = 2\ AI^2 + \frac{1}{2}\ BC^2$

$\Leftrightarrow$ $2\ OA^2 + (OB^2 + OC^2) = 2\ AI^2 + \frac{1}{2}\ BC^2$.

On applique le théorème de la médiane au triangle OBC : $OB^2 + OC^2 = 2\ OI^2 + \frac{1}{2}\ BC^2$.

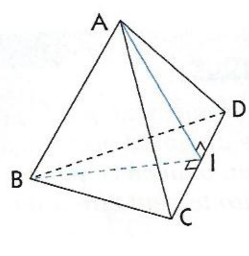
On a : (1) $\Leftrightarrow$ $2\ OA^2 + (2\ OI^2 + \frac{1}{2}\ BC^2) = 2\ AI^2 + \frac{1}{2}\ BC^2$

$\Leftrightarrow$ $OA^2 + OI^2 = AI^2$.

Donc, le triangle OAM est rectangle en O et la droite $(\mathscr{D})$ est perpendiculaire à (Δ).

M Pour démontrer que deux droites sont orthogonales, il suffit de démontrer que l'une d'elles est orthogonale à un plan contenant l'autre.

Exemple



ABCD est un tétraèdre régulier[1]. On se propose de démontrer que les droites (AB) et (CD) sont orthogonales.
On désigne par I le milieu de [CD] ; les droites (AI) et (BI) sont perpendiculaires à (CD).
La droite (CD) est orthogonale au plan (ABI), donc à toutes les droites de ce plan, en particulier à la droite (AB).

1. *Un tétraèdre est régulier lorsque ses faces sont des triangles équilatéraux.*

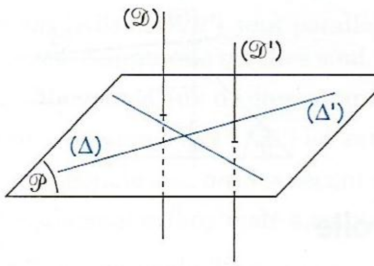
Autres propriétés

Nous étudierons ici quelques propriétés de l'orthogonalité d'une droite et d'un plan. Il en existe d'autres qui se déduisent de celles-ci et seront rencontrées en exercices.

Propriétés 1

• Si deux droites $(\mathscr{D})$ et $(\mathscr{D}')$ sont parallèles, tout plan $(\mathscr{P})$ orthogonal à $(\mathscr{D})$ est orthogonal à $(\mathscr{D}')$.

$$\begin{cases} (\mathscr{D}) \,//\, (\mathscr{D}') \\ (\mathscr{D}) \perp (\mathscr{P}) \end{cases} \Rightarrow (\mathscr{D}') \perp (\mathscr{P}).$$



Démonstration

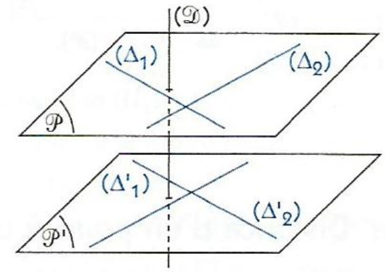
$(\mathscr{D})$ est orthogonale à $(\mathscr{P})$, donc orthogonale à deux droites sécantes (Δ) et (Δ') de $(\mathscr{P})$.

$(\mathscr{D}')$ est parallèle à $(\mathscr{D})$, donc orthogonale à (Δ) et à (Δ').

$(\mathscr{D}')$ est donc orthogonale à $(\mathscr{P})$.

• Si deux plans $(\mathscr{P})$ et $(\mathscr{P}')$ sont parallèles, toute droite $(\mathscr{D})$ orthogonale à $(\mathscr{P})$ est orthogonale à $(\mathscr{P}')$.

$$\begin{cases} (\mathscr{P}) \,//\, (\mathscr{P}') \\ (\mathscr{D}) \perp (\mathscr{P}) \end{cases} \Rightarrow (\mathscr{D}) \perp (\mathscr{P}').$$



Démonstration

$(\mathscr{D})$ est orthogonale à $(\mathscr{P})$, donc orthogonale à deux droites sécantes (Δ_1) et (Δ_2) de $(\mathscr{P})$.

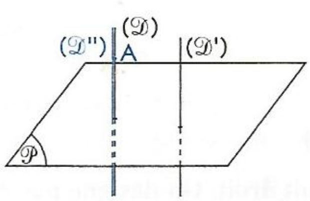
$(\mathscr{P}')$ est parallèle à $(\mathscr{P})$, donc contient deux droites (Δ'_1) et (Δ'_2) respectivement parallèles à (Δ_1) et (Δ_2).

$(\mathscr{D})$ est orthogonale à (Δ'_1) et à (Δ'_2), donc à $(\mathscr{P}')$.

Propriétés 2

• Si deux droites $(\mathscr{D})$ et $(\mathscr{D}')$ sont orthogonales à un même plan $(\mathscr{P})$, alors elles sont parallèles.

$$\begin{cases} (\mathscr{D}) \perp (\mathscr{P}) \\ (\mathscr{D}') \perp (\mathscr{P}) \end{cases} \Rightarrow (\mathscr{D}) \,//\, (\mathscr{D}').$$



Démonstration

Soit A un point de $(\mathscr{D})$ et $(\mathscr{D}'')$ la droite passant par A et parallèle à $(\mathscr{D}')$.

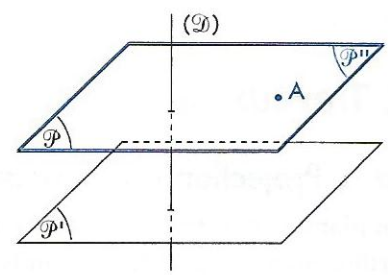
D'après les propriétés 1, $(\mathscr{D}'')$ est orthogonale à $(\mathscr{P})$.

Or, il existe une seule droite passant par A et orthogonale à $(\mathscr{P})$.

Donc, $(\mathscr{D})$ et $(\mathscr{D}'')$ sont confondues et $(\mathscr{D})$ est parallèle à $(\mathscr{D}')$.

• Si deux plans $(\mathscr{P})$ et $(\mathscr{P}')$ sont orthogonaux à une même droite $(\mathscr{D})$, alors ils sont parallèles.

$$\begin{cases} (\mathscr{D}) \perp (\mathscr{P}) \\ (\mathscr{D}) \perp (\mathscr{P}') \end{cases} \Rightarrow (\mathscr{P}) \,//\, (\mathscr{P}').$$



Démonstration

Soit A un point de $(\mathscr{P})$ et $(\mathscr{P}'')$ le plan passant par A et parallèle à $(\mathscr{P}')$.

D'après les propriétés 1, $(\mathscr{P}'')$ est orthogonal à $(\mathscr{D})$.

Or, il existe un seul plan passant par A et orthogonal à $(\mathscr{D})$.

Donc, $(\mathscr{P})$ et $(\mathscr{P}'')$ sont confondus et $(\mathscr{P})$ est parallèle à $(\mathscr{P}')$.

M

Pour démontrer que deux droites sont parallèles, il suffit de démontrer qu'elles sont orthogonales à un même plan.

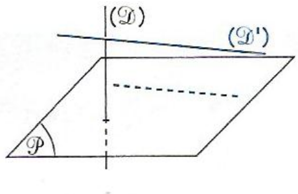
Pour démontrer que deux plans sont parallèles, il suffit de démontrer qu'ils sont orthogonaux à une même droite.

La propriété suivante est admise.

Propriété 3

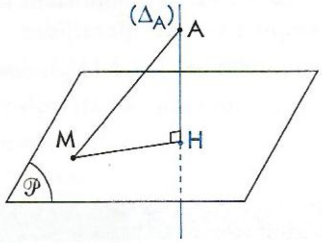
Soit $(\mathcal{D})$ une droite orthogonale à un plan $(\mathcal{P})$.
Toute droite $(\mathcal{D}')$ orthogonale à $(\mathcal{D})$ est parallèle à $(\mathcal{P})$.

$$\begin{cases} (\mathcal{D}) \perp (\mathcal{P}) \\ (\mathcal{D}) \perp (\mathcal{D}') \end{cases} \Rightarrow (\mathcal{D}') \,//\, (\mathcal{P}).$$



Distance d'un point à un plan, à une droite

Soit $(\mathcal{P})$ un plan et A un point de $\mathcal{E}$.
Il existe une droite unique (Δ_A) passant par A et orthogonale à $(\mathcal{P})$. Cette droite coupe le plan $(\mathcal{P})$ en un point H, appelé projeté orthogonal de A sur $(\mathcal{P})$.

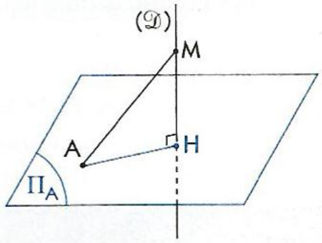


Pour tout point M de $(\mathcal{P})$, on a : $AH \leq AM$.

H est donc le point de $(\mathcal{P})$ le plus proche de A.

AH est la distance du point A au plan $(\mathcal{P})$.

Soit $(\mathcal{D})$ une droite et A un point de $\mathcal{E}$.
Il existe un plan unique (Π_A) passant par A et orthogonal à $(\mathcal{D})$. Ce plan coupe la droite $(\mathcal{D})$ en un point H, appelé projeté orthogonal de A sur $(\mathcal{D})$.



Pour tout point M de $(\mathcal{D})$, on a : $AH \leq AM$.

H est donc le point de $(\mathcal{D})$ le plus proche de A.

AH est la distance du point A à la droite $(\mathcal{D})$.

1.3. Travaux dirigés

1. Projection orthogonale d'un angle droit

Soit $(\mathcal{P})$ un plan, A, B, C trois points de $\mathcal{E}$ tels que l'angle $\widehat{BAC}$ soit droit. On désigne par A', B', C' les projetés orthogonaux respectifs des points A, B, C sur $(\mathcal{P})$.
On suppose que les droites (AB) et (AC) ne sont pas orthogonales à $(\mathcal{P})$.
Démontrer que $\widehat{B'A'C'}$ est un angle droit si et seulement si l'une des droites (AB) ou (AC) est parallèle à $(\mathcal{P})$.

Solution

Soit (Δ_A) la droite orthogonale au plan $(\mathcal{P})$ et passant par le point A. On désigne par (Π_1) et (Π_2) les plans contenant la droite (Δ_A) et, respectivement, les points B et C.

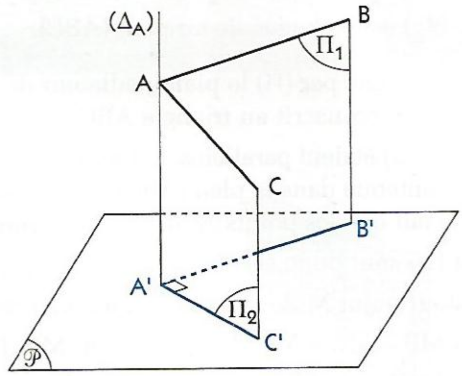
• Supposons que la droite (AB) est parallèle à $(\mathcal{P})$.

(AB) est orthogonale aux droites sécantes (AC) et (Δ_A), donc au plan (Π_2) qui les contient.

(AB) est parallèle à $(\mathcal{P})$ et à (Π_1), donc à la droite (A'B'), intersection de ces deux plans.

(A'B') est donc orthogonale au plan (Π_2), donc perpendiculaire à (A'C'), et l'angle $\widehat{B'A'C'}$ est droit.

On démontre de manière analogue que, si (AC) est parallèle à $(\mathcal{P})$, l'angle $\widehat{B'A'C'}$ est droit.



• Réciproquement, supposons l'angle $\widehat{B'A'C'}$ droit.

Si les droites (AB) et (A'B') sont parallèles, la propriété est démontrée. Supposons qu'elles sont sécantes.

(A'C') est orthogonale aux droites sécantes (A'B') et (Δ_A), donc au plan (Π_1).

On démontre de même que (A'B') est orthogonale au plan (Π_2), donc à la droite (AC).

(AC) est orthogonale aux droites sécantes (AB) et (A'B'), donc au plan (Π_1).

(A'C') est également orthogonale à ce plan, donc parallèle à (AC). La propriété est encore démontrée.

Donc, $\widehat{B'A'C'}$ est un angle droit si et seulement si l'une des droites (AB) ou (AC) est parallèle à $(\mathcal{P})$.

2. Plan médiateur – Sphère circonscrite à un tétraèdre

1°) Soit A et B deux points distincts de $\mathcal{E}$. Démontrer que l'ensemble des points équidistants des points A et B est le plan orthogonal à la droite (AB) passant par le milieu du segment [AB].

Ce plan est appelé plan médiateur du segment [AB].

2°) Soit A, B et C trois points non alignés, O le centre du cercle $(\mathscr{C})$ circonscrit au triangle ABC. Démontrer que l'ensemble des points équidistants des points A, B et C est la droite passant par O et orthogonale au plan (ABC).

Cette droite est appelée axe du cercle $(\mathscr{C})$.

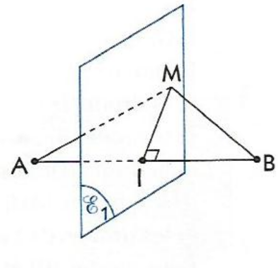
3°) Soit ABCD un tétraèdre. Démontrer que le plan médiateur de [AD] et l'axe du cercle circonscrit au triangle ABC sont sécants.

En déduire qu'il existe un seul point de l'espace équidistant des points A, B, C et D.

Ce point est le centre de la sphère circonscrite au tétraèdre ABCD.

Solution

1°) On désigne par I le milieu de [AB], par $(\mathcal{P})$ le plan orthogonal à (AB) passant par I et par $(\mathscr{E}_1)$ l'ensemble des points équidistants de A et B.



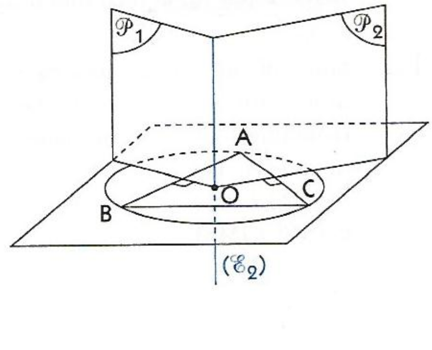
I appartient à $(\mathscr{E}_1)$. Soit M un point de l'espace, distinct de I.

On a : $M \in (\mathscr{E}_1) \Leftrightarrow MA = MB$

$\Leftrightarrow (MI) \perp (AB)$

$\Leftrightarrow M \in (\mathcal{P})$.

2°) On désigne par $(\mathcal{P}_1)$ (respectivement $(\mathcal{P}_2)$) le plan médiateur du segment [AB] (respectivement [AC]) et par $(\mathscr{E}_2)$ l'ensemble des points équidistants de A, B et C.

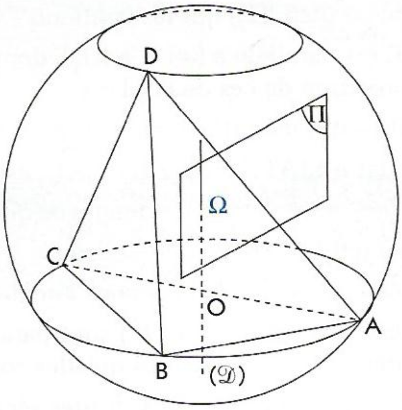


On a : $M \in (\mathscr{E}_2) \Leftrightarrow MA = MB = MC$

$\Leftrightarrow M \in (\mathcal{P}_1)$ et $M \in (\mathcal{P}_2)$.

Or, $(\mathcal{P}_1)$ et $(\mathcal{P}_2)$ ne sont pas parallèles, sinon (AB) et (AC) seraient confondues. $(\mathscr{E}_2)$ est donc la droite d'intersection de $(\mathcal{P}_1)$ et $(\mathcal{P}_2)$. Cette droite passe par O car OA = OB = OC.

De plus : $(\mathcal{E}_2) \subset (\mathcal{P}_1) \Rightarrow (\mathcal{E}_2) \perp (AB)$ et $(\mathcal{E}_2) \subset (\mathcal{P}_2) \Rightarrow (\mathcal{E}_2) \perp (AC)$.
Donc $(\mathcal{E}_2)$ est orthogonale au plan (ABC).



3°) On désigne par (Π) le plan médiateur de [AD] et par $(\mathcal{D})$ l'axe du cercle circonscrit au triangle ABC.

Si (Π) et $(\mathcal{D})$ étaient parallèles, $(\mathcal{D})$ serait orthogonale à (AD) ; (AD) serait contenue dans le plan (ABC), ce qui serait en contradiction avec le fait que les points A, B, C et D ne sont pas coplanaires.

(Π) et $(\mathcal{D})$ sont donc sécants.

Pour tout point M de l'espace, on a :

$MA = MB = MC = MD \Leftrightarrow M \in (\mathcal{D})$ et $M \in (\Pi)$.

Le seul point de l'espace équidistant des points A, B, C et D est donc Ω, point d'intersection de (Π) et $(\mathcal{D})$.

La sphère de centre Ω et de rayon ΩA passe par A, B, C et D. On l'appelle sphère circonscrite au tétraèdre ABCD.

Exercices

1.a Soit ABCDEFGH un cube, I et J les milieux respectifs de [EF] et [BF]. Démontrer que :
a) $(ED) \perp (BG)$; *c)* $(IJ) \perp (DG)$;
b) $(JG) \perp (DC)$; *d)* $(ID) \perp (AH)$.

1.b Soit ABCDEFGH un pavé droit.
a) Nommer les droites contenant une arête de ce cube et orthogonales à la droite (AE).
b) Nommer les plans contenant deux arêtes de ce cube et orthogonaux à la droite (AE).
c) Nommer deux droites orthogonales à (AE) et non coplanaires.

1.c Soit ABCDEFGH un cube. On désigne par I, J et K les milieux respectifs des segments [BF], [FG] et [AE].
Démontrer que :
a) la droite (IK) est orthogonale au plan (ADE) ;
b) la droite (BE) est orthogonale au plan (ADG) ;
c) la droite (DE) est orthogonale au plan (IJK) ;
d) les droites (AC) et (BF) sont orthogonales ;
e) les droites (IK) et (CF) sont orthogonales ;
f) les droites (IJ) et (ED) sont orthogonales.

1.d Soit ABC un triangle rectangle en A et $(\mathcal{D})$ la droite orthogonale en A au plan (ABC).
Démontrer que pour tout point M de $(\mathcal{D})$, distinct de A, on a :
a) $(MA) \perp (BC)$; *b)* $(AB) \perp (MC)$;
c) $(AC) \perp (MB)$.

1.e Soit $(\mathcal{P})$ un plan, A un point de ce plan, $(\mathcal{D})$ la droite orthogonale à $(\mathcal{P})$ en A et (Δ) une droite de $(\mathcal{P})$ ne passant pas par A. On désigne par A' le projeté orthogonal de A sur la droite (Δ).
Démontrer que pour tout point M de $(\mathcal{D})$, on a : $(MA') \perp (\Delta)$.

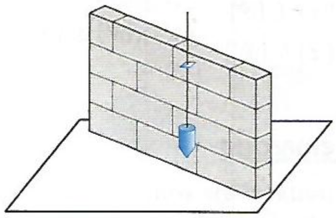
1.f Soit ABCDEFGH un cube, dont la mesure d'une arête est a. Calculer, en fonction de a :
a) la distance de G au plan (ABC) ;
b) la distance de A au plan (DBF) ;
c) la distance AG.

1.g Soit ABCDEFGH un cube. On désigne par I, J et K les milieux respectifs des segments [AE], [CG] et [BC].
1. Démontrer que le plan (DBF) est le plan médiateur du segment [IJ].
2. Démontrer que I, J et K appartiennent au plan médiateur du segment [DF].
3. Quel est le plan médiateur du segment [DG] ?

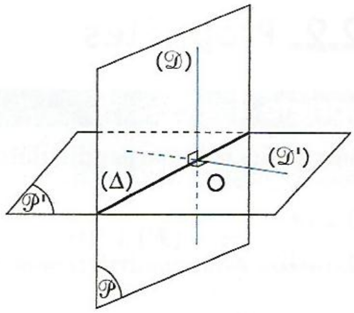
1.h Soit ABCD un tétraèdre régulier, I et J les milieux respectifs de [AB] et [CD].
1. Démontrer que le plan (ICD) est le plan médiateur de [AB].
2. Démontrer que le plan (JAB) est le plan médiateur de [CD].
3. En déduire que la droite (IJ) est perpendiculaire aux droites (AB) et (CD).

2 Plans perpendiculaires

2.1. Définition



• Pour vérifier qu'un mur est « droit », le maçon utilise un fil à plomb. Si ce fil, placé contre le mur, est parallèle à celui-ci, le mur est vertical.
En géométrie, on peut modéliser cette situation de la façon suivante :
– le fil est représenté par une droite verticale, donc orthogonale au plan horizontal qui représente le sol,
– le mur est représenté par un plan.
On dit que ce plan est perpendiculaire au plan du sol.



• Soit $(\mathscr{P})$ et $(\mathscr{P}')$ deux plans tels que $(\mathscr{P})$ contienne une droite $(\mathscr{D})$ orthogonale à $(\mathscr{P}')$ en un point O.
On se propose de démontrer que le plan $(\mathscr{P}')$ contient une droite $(\mathscr{D}')$ orthogonale au plan $(\mathscr{P})$.
– Justifier que $(\mathscr{P})$ et $(\mathscr{P}')$ sont sécants suivant une droite (Δ) passant par O.
Soit $(\mathscr{D}')$ la droite de $(\mathscr{P}')$ perpendiculaire à (Δ) en O.
– Justifier que $(\mathscr{D}')$ est orthogonale à $(\mathscr{P})$.

Cette étude justifie la définition suivante.

Définition

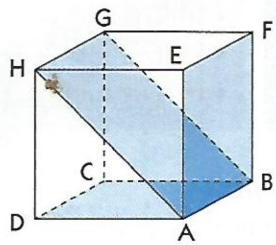
Deux plans sont perpendiculaires lorsque l'un d'entre eux contient une droite orthogonale à l'autre.

« $(\mathscr{P})$ est perpendiculaire à $(\mathscr{P}')$ » se note : $(\mathscr{P}) \perp (\mathscr{P}')$.

Remarque

Si deux plans sont perpendiculaires, ils sont sécants.

Exemples



Soit ABCDEFGH un cube.
• Le plan (ABE) contient la droite (AE), qui est orthogonale au plan (ABC) ; les plans (ABE) et (ABC) sont donc perpendiculaires.

• Le plan (ABG) contient la droite (AB), qui est orthogonale au plan (ADE) ; les plans (ABG) et (ADE) sont donc perpendiculaires.

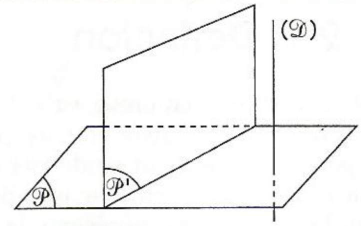
• Les plans (ABG) et (ABE) ne sont pas perpendiculaires ; en effet, toute droite orthogonale à (ABE) est parallèle à (AD), donc sécante à (ABG).

On déduit directement de la définition les propriétés suivantes.

Conséquences

- **Si une droite $(\mathcal{D})$ est orthogonale à un plan $(\mathcal{P})$, tout plan parallèle à $(\mathcal{D})$ est perpendiculaire à $(\mathcal{P})$.**
- **Si deux plans sont perpendiculaires, toute droite orthogonale à l'un est parallèle à l'autre.**

$$\begin{cases} (\mathcal{D}) \perp (\mathcal{P}) \\ (\mathcal{D}) \,//\, (\mathcal{P}') \end{cases} \Rightarrow (\mathcal{P}) \perp (\mathcal{P}') \quad ; \quad \begin{cases} (\mathcal{P}) \perp (\mathcal{P}') \\ (\mathcal{D}) \perp (\mathcal{P}) \end{cases} \Rightarrow (\mathcal{D}) \,//\, (\mathcal{P}').$$



Remarque

Si deux plans sont perpendiculaires, une droite parallèle à l'un n'est pas nécessairement orthogonale à l'autre (il suffit de considérer par exemple leur droite d'intersection).

2.2. Propriétés

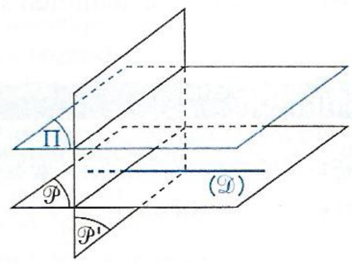
Propriété 1

Si deux plans sont perpendiculaires, tout plan parallèle à l'un est perpendiculaire à l'autre.

$$\begin{cases} (\mathcal{P}) \perp (\mathcal{P}') \\ (\mathcal{P}) \,//\, (\Pi) \end{cases} \Rightarrow (\mathcal{P}') \perp (\Pi).$$

Démonstration

Soit $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{P}')$ deux plans perpendiculaires, (Π) un plan parallèle à $(\mathcal{P})$.
$(\mathcal{P})$ contient une droite $(\mathcal{D})$ orthogonale à $(\mathcal{P}')$.
Le plan (Π), parallèle à $(\mathcal{P})$, est donc parallèle à $(\mathcal{D})$.
D'après les conséquences du § 2.1., (Π) est perpendiculaire à $(\mathcal{P}')$.



Remarques

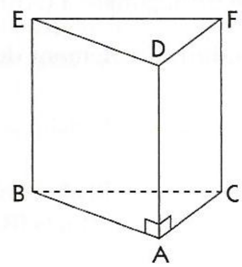
- *La propriété précédente peut également s'énoncer de la façon suivante : si deux plans sont parallèles, tout plan perpendiculaire à l'un est perpendiculaire à l'autre.*
- *Deux plans perpendiculaires à un même plan ne sont pas forcément parallèles entre eux.*

M

Pour démontrer que deux plans sont perpendiculaires, on peut utiliser un des procédés suivants :
- trouver une droite de l'un qui est orthogonale à l'autre ;
- trouver une droite parallèle à l'un et orthogonale à l'autre ;
- trouver un plan parallèle à l'un et perpendiculaire à l'autre.

Exemples

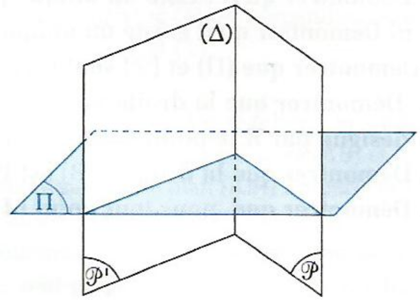
Soit ABCDEF un prisme droit dont la base est un triangle ABC.
- La droite (AD) est perpendiculaire aux droites (AB) et (AC), donc orthogonale au plan (ABC). Le plan (ABD) contient (AD), donc est perpendiculaire au plan (ABC).
- La droite (AD) est parallèle à la droite (BE), donc au plan (BCE). De plus, (AD) est orthogonale au plan (ABC). Par suite, les plans (BCE) et (ABC) sont perpendiculaires.
- Le plan (ABC) est parallèle au plan (DEF) et perpendiculaire au plan (ABD). Donc les plans (DEF) et (ABD) sont perpendiculaires.



Propriété 2

Un plan est perpendiculaire à deux plans sécants si et seulement si il est orthogonal à leur droite d'intersection.

Démonstration



Soit (𝒫) et (𝒫') deux plans sécants, (Δ) leur droite d'intersection.

• Soit (Π) un plan orthogonal à (Δ). (𝒫) contient la droite (Δ) orthogonale à (Π), donc il est perpendiculaire à (Π).
De même, (𝒫') est perpendiculaire à (Π).

• Réciproquement, si (Π) est un plan perpendiculaire à (𝒫) et (𝒫'), alors toute droite orthogonale à (Π) est parallèle à (𝒫) et à (𝒫'), donc à (Δ).
(Δ) est donc orthogonale à (Π).

2.3. Travaux dirigés

1. Le tétraèdre orthocentrique

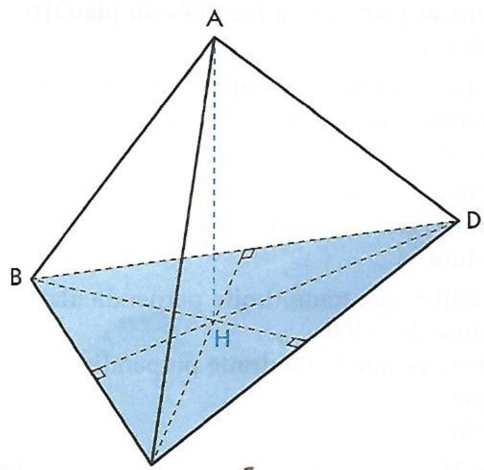
Soit ABCD un tétraèdre tel que les droites (AB) et (AC) sont respectivement orthogonales aux droites (CD) et (BD). On désigne par H l'orthocentre du triangle BCD.

1°) Démontrer que les plans (ABH) et (ACH) sont perpendiculaires au plan (BCD).

2°) En déduire que la droite (AD) est orthogonale à la droite (BC).

Un tel tétraèdre, dont les arêtes opposées sont deux à deux orthogonales, est dit orthocentrique.

Solution



1°) La droite (BH) est une hauteur du triangle BCD, donc elle est perpendiculaire à la droite (CD).
(CD) est orthogonale aux droites sécantes (AB) et (BH), donc au plan (ABH).
Le plan (BCD) contient la droite (CD), donc les plans (BCD) et (ABH) sont perpendiculaires.
On démontre par un raisonnement analogue que les plans (BCD) et (ACH) sont perpendiculaires.

2°) Le plan (BCD) est perpendiculaire aux plans sécants (ABH) et (ACH), donc orthogonal à leur droite d'intersection (AH). Les droites (AH) et (BC) sont donc orthogonales.
La droite (BC) est orthogonale aux droites sécantes (AH) et (DH), donc au plan (ADH) qui contient la droite (AD).
Les droites (BC) et (AD) sont donc orthogonales.

2. Perpendiculaire commune à deux droites non coplanaires

Soit $(\mathscr{D})$ et $(\mathscr{D}')$ deux droites non coplanaires.

On se propose de déterminer toutes les droites perpendiculaires à $(\mathscr{D})$ et $(\mathscr{D}')$.

1°) Démontrer qu'il existe un unique plan $(\mathscr{P})$ contenant $(\mathscr{D})$ et parallèle à $(\mathscr{D}')$.

2°) *a)* Démontrer qu'il existe un unique plan (Π) contenant $(\mathscr{D}')$ et perpendiculaire à $(\mathscr{P})$.

***b)* Démontrer que (Π) et $(\mathscr{D})$ sont sécants ; on désigne par A leur point d'intersection.**

3°) Démontrer que la droite passant par A et orthogonale à $(\mathscr{P})$ est perpendiculaire à $(\mathscr{D})$ et à $(\mathscr{D}')$.

On désigne par B le point d'intersection de cette droite avec $(\mathscr{D}')$.

4°) Démontrer que la droite (AB) est l'unique perpendiculaire commune à $(\mathscr{D})$ et à $(\mathscr{D}')$.

5°) Démontrer que, pour tout point M de $(\mathscr{D})$ et tout point N de $(\mathscr{D}')$, on a : $MN \geq AB$.

Solution guidée

1°) *Existence*

Soit M un point de $(\mathscr{D})$ et $(\mathscr{D}_1')$ la droite passant par M et parallèle à $(\mathscr{D}')$.

- Démontrer que $(\mathscr{D})$ et $(\mathscr{D}_1')$ déterminent un plan $(\mathscr{P})$.
- Vérifier que $(\mathscr{P})$ satisfait les conditions de la question.

Unicité

Soit $(\mathscr{Q})$ un plan contenant $(\mathscr{D})$ et parallèle à $(\mathscr{D}')$.

- Démontrer que $(\mathscr{Q})$ est parallèle à $(\mathscr{P})$.
- Conclure.

2°) *a) Existence*

Soit N un point de $(\mathscr{D}')$ et (Δ) la droite passant par N et orthogonale à $(\mathscr{P})$.

- Démontrer que $(\mathscr{D}')$ et (Δ) déterminent un plan (Π).
- Vérifier que (Π) est perpendiculaire à $(\mathscr{P})$.

Unicité

- Vérifier que tout plan contenant la droite $(\mathscr{D}')$ et perpendiculaire au plan $(\mathscr{P})$ est parallèle au plan (Π).
- Conclure.

b) Soit $(\mathscr{D}_2')$ la droite d'intersection des plans (Π) et $(\mathscr{P})$.

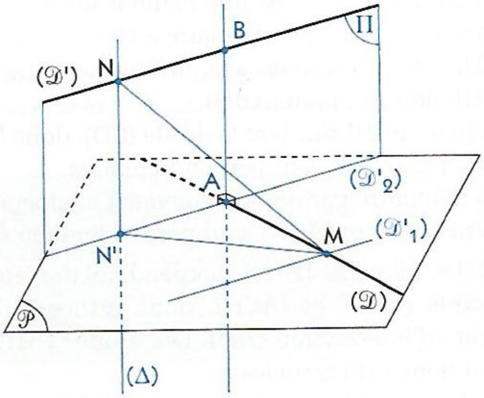
- Démontrer que $(\mathscr{D})$ et $(\mathscr{D}_2')$ sont sécantes.
- Conclure.

3°) • Démontrer que la droite passant par A et orthogonale au plan $(\mathscr{P})$ est incluse dans (Π).

- Conclure.

4°) • Vérifier que toute droite perpendiculaire à $(\mathscr{D})$ et $(\mathscr{D}')$ est incluse dans (Π).

- En déduire que toute droite perpendiculaire à $(\mathscr{D})$ et $(\mathscr{D}')$ passe par A.
- Conclure.



5°) Soit N' le point d'intersection de (Δ) et de $(\mathscr{P})$.

- Démontrer que : $NN' = AB$.
- Vérifier que : $MN \geq NN'$.
- Conclure.

Exercices

2.a Soit $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{P}')$ deux plans perpendiculaires et $(\mathcal{D})$ leur droite d'intersection.
Démontrer que toute droite de $(\mathcal{P})$ perpendiculaire à $(\mathcal{D})$ est orthogonale à $(\mathcal{P}')$.

2.b Soit ABCDEFGH un cube. Démontrer que les plans suivants sont perpendiculaires :
a) (ABC) et (EAC) ;
b) (EAC) et (HDB) ;
c) (FCH) et (AGE).

2.c Soit $(\mathcal{P})$ un plan et $(\mathcal{D})$ une droite non orthogonale à $(\mathcal{P})$.
Démontrer qu'il existe un plan unique contenant $(\mathcal{D})$ et perpendiculaire à $(\mathcal{P})$.

2.d Soit ABC un triangle rectangle en A et $(\mathcal{D})$ la droite orthogonale en B au plan (ABC).
Démontrer que, pour tout point M de $(\mathcal{D})$ distinct de B, les plans (MAB) et (MAC) sont perpendiculaires.

2.e Soit $(\mathcal{P})$ un plan, A un point de ce plan, $(\mathcal{D})$ la droite orthogonale à $(\mathcal{P})$ en A et (Δ) une droite de $(\mathcal{P})$ ne passant pas par A. On désigne par A' le projeté orthogonal de A sur (Δ).
Démontrer que, pour tout point M de $(\mathcal{D})$, le plan défini par M et (Δ) est perpendiculaire au plan défini par A' et $(\mathcal{D})$.

2.f Soit ABCD un tétraèdre régulier. On désigne par I et J les milieux respectifs de [AB] et [CD].
1. Démontrer que le plan (ABJ) est perpendiculaire aux plans (ACD) et (BCD).
2. Déterminer les faces du tétraèdre dont les plans sont perpendiculaires au plan (CDI).
3. Démontrer que les plans (ABJ) et (CDI) sont perpendiculaires.

2.g Soit $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{P}')$ deux plans distincts sécants suivant une droite (Δ) et M un point de $\mathcal{E}$ n'appartenant pas aux plans $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{P}')$. On désigne par H et H' les projetés orthogonaux de M respectivement sur $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{P}')$.
Démontrer que le plan (MHH') est perpendiculaire à $(\mathcal{P})$ et à $(\mathcal{P}')$.

2.h Soit ABCD un tétraèdre tel que :
– ACD et BCD sont des triangles équilatéraux ;
– les faces ABC et ABD sont des triangles rectangles isocèles de sommets respectifs C et D.
Démontrer que les plans (ABC) et (ABD) sont perpendiculaires.

Exercices

APPRENTISSAGE

Droites et plans orthogonaux

1 Soit $(\mathscr{D}_1)$ et $(\mathscr{D}_2)$ deux droites.
Démontrer que si les droites $(\mathscr{D}_1)$ et $(\mathscr{D}_2)$ sont orthogonales alors il existe un plan contenant $(\mathscr{D}_1)$ et orthogonal à $(\mathscr{D}_2)$.

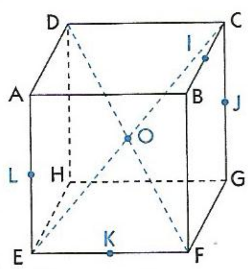
2 Soit $(\mathscr{D}_1)$ et $(\mathscr{D}_2)$ deux droites d'un plan $(\mathscr{P})$ et (Δ) une droite orthogonale à $(\mathscr{D}_1)$ et $(\mathscr{D}_2)$. On suppose que la droite (Δ) n'est pas orthogonale au plan $(\mathscr{P})$.
Démontrer que les droites $(\mathscr{D}_1)$ et $(\mathscr{D}_2)$ sont parallèles.

3 Soit ABCD un tétraèdre tel que le triangle BCD soit rectangle en B et la droite (AC) orthogonale au plan (BCD).
Démontrer que les triangles ABD et ACD sont des triangles rectangles.

4 Soit $(\mathscr{D})$ une droite, A un point n'appartenant pas à $(\mathscr{D})$ et H le projeté orthogonal de A sur $(\mathscr{D})$.
On désigne par $(\mathscr{P})$ le plan déterminé par $(\mathscr{D})$ et A, par H' le projeté orthogonal, dans le plan $(\mathscr{P})$, de A sur $(\mathscr{D})$.
Démontrer que H et H' sont confondus.

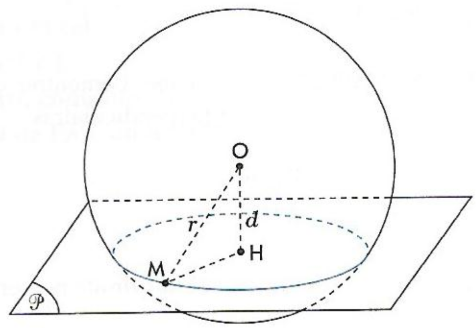
5 Soit $(\mathscr{D}_1)$ et $(\mathscr{D}_2)$ deux droites d'un plan $(\mathscr{P})$ sécantes en un point O. On construit deux plans $(\mathscr{P}_1)$ et $(\mathscr{P}_2)$ respectivement orthogonaux à $(\mathscr{D}_1)$ et à $(\mathscr{D}_2)$.
1. Démontrer que les plans $(\mathscr{P}_1)$ et $(\mathscr{P}_2)$ sont sécants.
2. Démontrer que leur droite d'intersection (Δ) est orthogonale au plan $(\mathscr{P})$.

6 Soit ABCDEFGH un cube de centre O et I, J, K, L les milieux respectifs des arêtes [BC], [CG], [EF], [AE].



1. Démontrer que la droite (OI) est orthogonale aux droites (AD) et (KL).
2. Démontrer que la droite (BG) est orthogonale au plan (EFC).
3. En déduire que les droites (IJ) et (EC) sont orthogonales.
4. Construire le projeté orthogonal du point L sur le plan (EFC).
5. Construire le projeté orthogonal du point L sur la droite (BG).

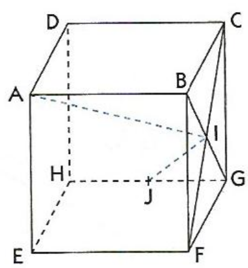
7 Soit $(\mathscr{P})$ un plan, O un point de $\mathscr{E}$, H le projeté orthogonal de O sur $(\mathscr{P})$ et (Σ) une sphère de centre O et de rayon r. On désigne par d la distance du point O au plan $(\mathscr{P})$.
1. Démontrer qu'un point M de $(\mathscr{P})$ appartient à (Σ) si et seulement si : $HM^2 = r^2 - d^2$.
2. Déterminer l'intersection de (Σ) et de $(\mathscr{P})$ dans les trois cas suivants :
a) $r < d$; *b)* $r = d$; *c)* $r > d$.
Si $r = d$, on dit que le plan est tangent à la sphère.



8 Soit $(\mathscr{P})$ un plan, ABCD un tétraèdre, I et J les milieux respectifs des segments [AC] et [BD].
On désigne par A', B', C', D', I', J' les projetés orthogonaux respectifs des points A, B, C, D, I, J sur le plan $(\mathscr{P})$.
1. Démontrer que I' est le milieu du segment [A'C'].
2. *a)* Établir que les points A', B', C', D' ne sont pas alignés.
b) Démontrer que le quadrilatère A'B'C'D' est un parallélogramme si et seulement si la droite (IJ) est orthogonale au plan $(\mathscr{P})$.

9 Soit OABCD une pyramide de sommet O, P, Q et R des points tels que les droites (OP), (OQ) et (OR) soient respectivement orthogonales aux plans (AOC), (BOD) et (POQ).
On désigne par I le point d'intersection des droites (AC) et (BD). Démontrer que les points O, I et R sont alignés.

10 Soit ABCDEFGH un cube, I le centre du carré BCGF et J le milieu du segment [GH].



1. Démontrer que la droite (FC) est orthogonale au plan (ABG).
En déduire que les droites (BH) et (FC) sont orthogonales.
2. Démontrer que la droite (BH) est orthogonale au plan (ACF). En déduire que les droites (BH) et (AI) sont perpendiculaires.
3. Démontrer que le triangle AIJ est rectangle en I.

11 Soit $(\mathscr{P})$ un plan, $(\mathscr{D})$ une droite de $(\mathscr{P})$ et A, B deux points distincts tels que la droite (AB) n'est pas orthogonale à $(\mathscr{P})$. On désigne par A' et B' les projetés orthogonaux respectifs de A et B sur $(\mathscr{P})$.
1. Démontrer que les points A' et B' sont distincts.
2. Démontrer que : $(\mathscr{D}) \perp (AB) \Leftrightarrow (\mathscr{D}) \perp (A'B')$.

12 Soit ABCD un tétraèdre tel que :
AC = BC et AD = BD.
1. Démontrer que les droites (AB) et (CD) sont orthogonales.

2. Soit I le milieu du segment [AB] et $(\mathscr{D})$ la droite du plan (ICD) passant par I et perpendiculaire à (CD).
Démontrer que la droite $(\mathscr{D}_A)$ passant par A et orthogonale au plan (BCD), la droite $(\mathscr{D}_B)$ passant par B et orthogonale au plan (ACD), et la droite $(\mathscr{D})$ sont concourantes.

13 Soit ABCD un tétraèdre tel que les angles $\widehat{BAD}$, $\widehat{CAD}$ et $\widehat{BAC}$ sont droits.
1. Dans le plan (ACD), le point A se projette orthogonalement en I sur la droite (CD).
Démontrer que la droite (BI) est une hauteur de BCD.
2. Dans le plan (ABI), le point A se projette orthogonalement en H sur la droite (BI).
Démontrer que la droite (AH) est orthogonale au plan (BCD).

14 Soit ABCD un tétraèdre et I, J, K, L, M, N les milieux respectifs des segments [AB], [BC], [CD], [DA], [AC], [BD].
On suppose que : AB = CD et AC = BD.
1. Démontrer que les quadrilatères IJKL et MLNJ sont des losanges.
2. Démontrer que la droite (JL) est orthogonale au plan (IKM).
3. Démontrer que la droite (JL) est orthogonale aux droites (BC) et (AD).

Plans perpendiculaires

15 Soit $(\mathscr{P})$ et $(\mathscr{Q})$ deux plans sécants.
Démontrer qu'il existe un plan et un seul, perpendiculaire à $(\mathscr{P})$ et à $(\mathscr{Q})$, passant par un point A donné.

16 Soit $(\mathscr{P})$, $(\mathscr{P}')$ deux plans sécants, (Δ) leur droite d'intersection et (Π) un plan orthogonal à (Δ). On désigne par $(\mathscr{D})$ et $(\mathscr{D}')$ les droites d'intersection de (Π) avec $(\mathscr{P})$ et $(\mathscr{P}')$ respectivement.
Démontrer que $(\mathscr{P})$ et $(\mathscr{P}')$ sont perpendiculaires si et seulement si $(\mathscr{D})$ et $(\mathscr{D}')$ sont orthogonales.

17 Soit $(\mathscr{D})$ et $(\mathscr{D}')$ deux droites respectivement orthogonales à deux plans $(\mathscr{P})$ et $(\mathscr{P}')$.
Démontrer que $(\mathscr{P}')$ et $(\mathscr{P})$ sont perpendiculaires si et seulement si $(\mathscr{D})$ et $(\mathscr{D}')$ sont orthogonales.

18 Soit $(\mathscr{P}_1)$ et $(\mathscr{P}_2)$ deux plans sécants suivant une droite (Δ). Pour tout point M de $\mathscr{E}$, on désigne par H_1 et H_2 les projetés orthogonaux respectifs de M sur $(\mathscr{P}_1)$ et $(\mathscr{P}_2)$.
Démontrer que, si M n'appartient ni à $(\mathscr{P}_1)$ ni à $(\mathscr{P}_2)$ alors les points M, H_1 et H_2 ne sont pas alignés et le plan (MH_1H_2) est perpendiculaire à $(\mathscr{P}_1)$ et $(\mathscr{P}_2)$.

19 Soit ABCD un tétraèdre régulier, I et J les milieux respectifs des segments [AB] et [CD].
1. Démontrer que les plans (ICD) et (JAB) sont perpendiculaires.
2. Démontrer que le plan (ICD) est perpendiculaire aux plans (ABC) et (ABD) et que le plan (JAB) est perpendiculaire aux plans (ACD) et (BCD).

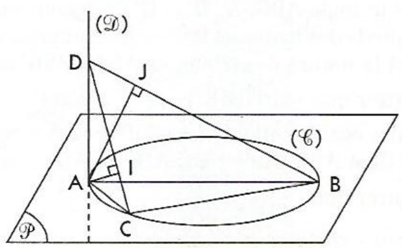
20 Soit $(\mathscr{P}_1)$, $(\mathscr{P}_2)$ deux plans sécants suivant une droite (Δ) et (Π) un plan orthogonal à (Δ).
On désigne par $(\mathscr{F})$ l'ensemble des points M de $\mathscr{E}$ situés à égale distance de $(\mathscr{P}_1)$ et de $(\mathscr{P}_2)$.
1. Démontrer que l'intersection de $(\mathscr{F})$ et de (Π) est un ensemble $(\mathscr{J})$, réunion de deux droites perpendiculaires.
2. Pour tout point M de $\mathscr{E}$, on désigne par M' le projeté orthogonal de M sur (Π).
Démontrer que : $M \in (\mathscr{F}) \Leftrightarrow M' \in (\mathscr{J})$.
3. En déduire que $(\mathscr{F})$ est la réunion de deux plans perpendiculaires, sécants suivant la droite (Δ).

APPROFONDISSEMENT

21 Soit O un point, $(\mathscr{P})$ un plan ne passant pas par O et A un point de $(\mathscr{P})$. On désigne par (Δ) une droite de $(\mathscr{P})$ contenant A et par H le projeté orthogonal de O sur (Δ).
Déterminer le lieu du point H quand (Δ) pivote autour de A.

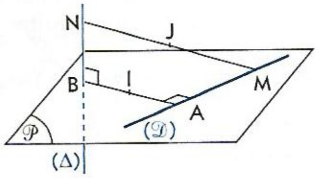
22 Soit O un point et (Δ) une droite ne passant pas par O. On désigne par $(\mathscr{P})$ un plan contenant (Δ) et par H le projeté orthogonal de O sur $(\mathscr{P})$.
Déterminer le lieu du point H quand $(\mathscr{P})$ pivote autour de (Δ).

23 Soit $(\mathscr{P})$ un plan, A et B deux points distincts de $(\mathscr{P})$, $(\mathscr{C})$ le cercle de diamètre [AB] inclus dans $(\mathscr{P})$, C un point de $(\mathscr{C})$ distinct de A et B, $(\mathscr{D})$ la droite orthogonale à $(\mathscr{P})$ en A, D un point de $(\mathscr{D})$ distinct de A.



1. Démontrer que les droites (BC) et (CD) sont perpendiculaires.
2. Démontrer que les plans (DAC) et (DBC) sont perpendiculaires.
3. *a)* Dans le plan (ADC), soit I le projeté orthogonal de A sur la droite (DC).
Démontrer que la droite (AI) est orthogonale au plan (BCD).
b) Dans le plan (ADB), soit J le projeté orthogonal de A sur la droite (DB).
Démontrer que le triangle AIJ est rectangle.
c) Démontrer que les points B, C, I et J sont cocycliques.

24 Soit $(\mathscr{P})$ un plan, A, B deux points de $(\mathscr{P})$ tels que AB = 1, I le milieu du segment [AB], $(\mathscr{D})$ la droite de $(\mathscr{P})$ passant par A et perpendiculaire à la droite (AB), et (Δ) la droite orthogonale à $(\mathscr{P})$ en B.
Pour tout point M de $(\mathscr{D})$ et tout point N de (Δ), on désigne par J le milieu du segment [MN].
1. On pose : AM = a et BN = b.
Calculer MN en fonction de a et b.
2. On désigne par K le milieu du segment [AN].
Démontrer que le triangle IKJ est rectangle en K.



3. Calculer IJ en fonction de a et b.
4. On suppose que M varie sur $(\mathscr{D})$ et N varie sur (Δ) de manière à ce que MN soit constant et égal à 2.
Déterminer le lieu du point J.

25 Soit $(\mathscr{P})$ un plan, A, B, C trois points de $\mathscr{E}$ et a, b, c trois nombres réels.
On désigne par A', B', C' les projetés orthogonaux respectifs de A, B, C sur $(\mathscr{P})$.
1. On suppose : $a + b \neq 0$.
Démontrer que le projeté orthogonal sur $(\mathscr{P})$ du barycentre des points pondérés (A, a), (B, b) est le barycentre des points pondérés (A', a), (B', b).
2. On suppose : $a + b + c \neq 0$.
Démontrer que le projeté orthogonal sur $(\mathscr{P})$ du barycentre des points pondérés (A, a), (B, b), (C, c) est le barycentre des points pondérés (A', a), (B', b), (C', c).

26 Soit SABC un tétraèdre tel que les triangles SAB, SAC et SBC sont rectangles en S, H le projeté orthogonal du point S sur le plan (ABC).
1. Démontrer que H est l'orthocentre du triangle ABC.
2. Démontrer que les angles du triangle ABC sont aigus *(on pourra utiliser le théorème d'Al Kashi).*
3. Dans le triangle ABC, A', B' et C' désignent respectivement les pieds des hauteurs issues des sommets A, B et C. Quelle est la nature des triangles ASA', BSB' et CSC' ?
4. Démontrer que : $\text{aire(BHC)} = \frac{SH}{SA} \times \text{aire(BSC)}$.
5. Écrire des égalités analogues relatives aux aires des triangles AHB et ASB d'une part, AHC et ASC d'autre part.
6. Démontrer que : $\frac{1}{SH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{SB^2} + \frac{1}{SC^2}$.
(On pourra exprimer le volume du tétraèdre de deux façons différentes.)

27 Tétraèdre orthocentrique
Soit ABCD un tétraèdre. On désigne par A', B', C', D' les projetés orthogonaux respectifs des points A, B, C, D sur les plans (BCD, (ACD), (ABD), (ABC).
On suppose que A' est l'orthocentre du triangle BCD.
1. Démontrer que le plan (ABA') est orthogonal à la droite (DC). En déduire que les droites (AB) et (DC) sont orthogonales.
2. Démontrer que les droites (AC) et (BD) sont orthogonales, ainsi que les droites (AD) et (BC).
3. Démontrer que B', C', D' sont les orthocentres respectifs des triangles ACD, ABD, ABC.
4. Démontrer que les droites (AA'), (BB'), (CC') et (DD') sont concourantes en un point H.
H est appelé orthocentre du tétraèdre. Seuls les tétraèdres orthocentriques ont un orthocentre.

28 Soit AOB un triangle rectangle isocèle en O et I le milieu de [OB].
On désigne par $(\mathscr{D})$ la droite orthogonale en O au plan (AOB), par $(\mathscr{P})$ le plan déterminé par B et $(\mathscr{D})$. À tout point M de la droite $(\mathscr{D})$, on associe la droite (Δ_M) incluse dans $(\mathscr{P})$ et perpendiculaire en M à (IM).
1. Soit A' et B' les projetés orthogonaux respectifs de A et B sur (Δ_M).
Démontrer que les droites (BB'), (IM) et (OA') sont parallèles et que M est le milieu du segment [A'B'].
2. Démontrer que : AA' = BB'.

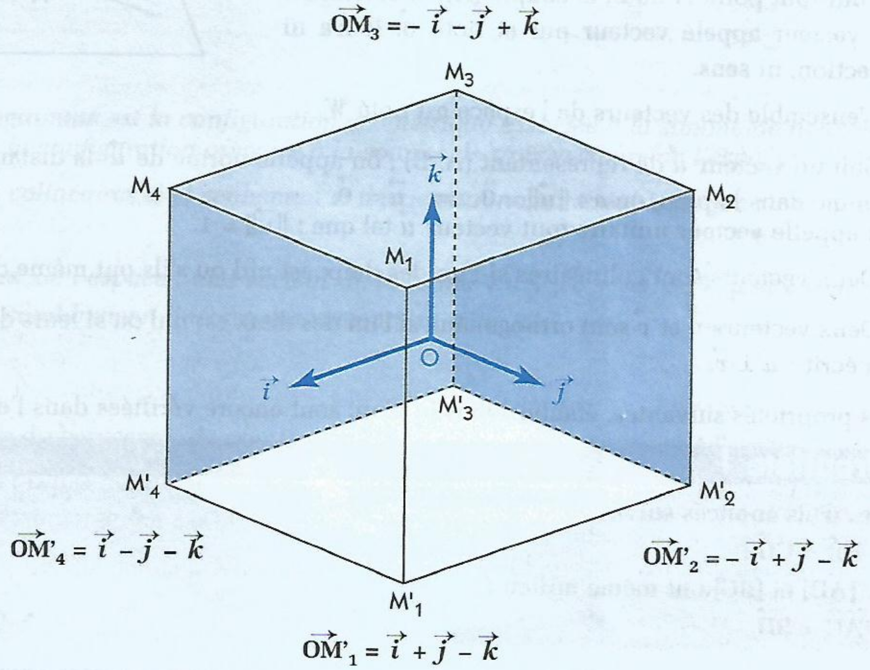
29 Soit $(\mathscr{P})$ un plan, O un point n'appartenant pas à $(\mathscr{P})$, H le projeté orthogonal de O sur $(\mathscr{P})$ et A un point de $(\mathscr{P})$ distinct de H.
Soit $(\mathscr{D}_1)$, $(\mathscr{D}_2)$ deux droites distinctes de $(\mathscr{P})$ passant par A et ne passant pas par H. Les droites orthogonales en O aux plans définis par O et $(\mathscr{D}_1)$ d'une part, O et $(\mathscr{D}_2)$, d'autre part, coupent respectivement le plan $(\mathscr{P})$ en M_1 et M_2.
1. Démontrer que les points M_1 et M_2 sont distincts.
2. Démontrer que la droite (OA) est orthogonale au plan (OM_1M_2).
3. Démontrer que la droite (AH) est perpendiculaire à la droite (M_1M_2).
4. On désigne par A' le point d'intersection des droites (AH) et (M_1M_2).
Quelle est la nature du triangle AOA' ?
Trouver une relation liant OH, AH et A'H.
5. La droite (M_1H) coupe $(\mathscr{D}_2)$ en B et la droite (M_2H) coupe $(\mathscr{D}_1)$ en C. Démontrer que H est l'orthocentre du triangle ABC et que les droites (BC) et (M_1M_2) sont parallèles.
6. Sur quel ensemble se déplacent les points M_1 et M_2 lorsque les droites $(\mathscr{D}_1)$ et $(\mathscr{D}_2)$ varient dans $(\mathscr{P})$?

30 Soit OABC un tétraèdre et P, Q, R des points tels que les droites (OP), (OQ), (OR) soient respectivement orthogonales aux plans (AOB), (POC), (POQ).
1. Démontrer que les droites (OA), (OB), (OQ) et (OR) sont coplanaires.
2. Démontrer que les plans (AOB) et (POC) sont sécants suivant la droite (OR).

7 Vecteurs de l'espace

Introduction

Nous avons pu apprécier en géométrie plane la puissance et la maniabilité de l'outil vectoriel, du produit scalaire et du barycentre. L'objectif de ce chapitre est d'étendre à l'espace l'usage de ces outils, en particulier pour déterminer des droites et des plans.



SOMMAIRE

1 Extension à l'espace de la notion de vecteur

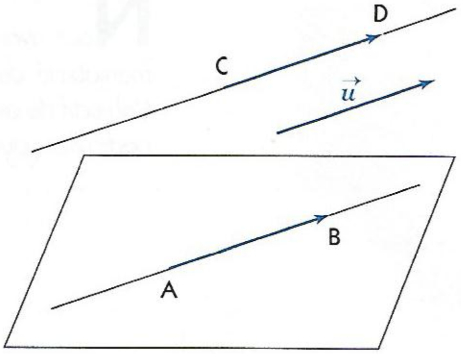
1.1. Définitions et propriétés

• Un couple (A, B) de points distincts de $\mathscr{E}$ détermine un vecteur noté $\overrightarrow{AB}$, caractérisé par :

– une direction, celle de la droite (AB) ;

– un sens, le sens de parcours de A vers B sur (AB) ;

– une longueur, celle du segment [AB].



Un couple (C, D) de points de $\mathscr{E}$ détermine le même vecteur que (A, B) si et seulement si $\overrightarrow{CD}$ a même direction, même sens et même longueur que $\overrightarrow{AB}$.
On dit que (A, B) et (C, D) sont des représentants du même vecteur.

• Pour tout point A de $\mathscr{E}$, le couple (A, A) détermine un vecteur appelé vecteur nul et noté $\vec{0}$. Il n'a ni direction, ni sens.

• L'ensemble des vecteurs de l'espace est noté $\mathscr{W}$.

• Soit un vecteur $\vec{u}$ de représentant (A, B) ; on appelle norme de $\vec{u}$ la distance AB. On la note : $\|\vec{u}\|$.
Comme dans le plan, on a : $\|\vec{u}\| = 0 \iff \vec{u} = \vec{0}$.
On appelle vecteur unitaire tout vecteur $\vec{u}$ tel que : $\|\vec{u}\| = 1$.

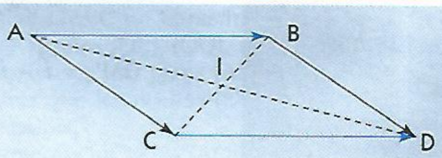
• Deux vecteurs sont colinéaires si l'un des deux est nul ou s'ils ont même direction.

• Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si l'un des deux est nul ou si leurs directions sont orthogonales.
On écrit : $\vec{u} \perp \vec{v}$.

Les propriétés suivantes, établies dans le plan, sont encore vérifiées dans l'espace.

Propriété 1

Les trois énoncés suivants sont équivalents :
- $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ **;**
- **[AD] et [BC] ont même milieu ;**
- $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$**.**



Propriété 2

Pour tout point O et tout vecteur $\vec{u}$, il existe un et un seul point M tel que : $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$.

1.2. Calcul vectoriel

Opérations sur les vecteurs

La somme de deux vecteurs et le produit d'un vecteur par un nombre réel se définissent dans l'espace de la même façon que dans le plan.
Les règles de calcul sur les vecteurs de l'espace sont analogues à celles établies dans le plan.

Propriétés

- **Pour tous points A, B, C de $\mathscr{E}$, on a : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ (relation de Chasles).**
- **Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ de $\mathscr{W}$ et tous nombres réels λ, μ, on a :**

(1) $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$; (2) $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$;

(3) $(\lambda + \mu)\,\vec{u} = \lambda\,\vec{u} + \mu\,\vec{u}$; (4) $\lambda\,(\vec{u} + \vec{v}) = \lambda\,\vec{u} + \lambda\,\vec{v}$;

(5) $\lambda\,(\mu\,\vec{u}) = (\lambda \times \mu)\,\vec{u}$; (6) $1\,\vec{u} = \vec{u}$;

(7) $\|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$ (inégalité triangulaire) ; (8) $\|\lambda\,\vec{u}\| = |\lambda|\,\|\vec{u}\|$.

Démonstration

On démontrera seulement la propriété (2).

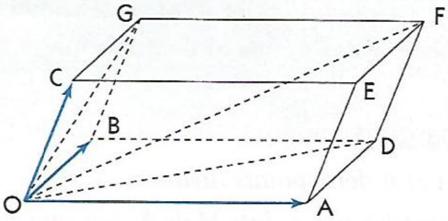
Soit O, A, B et C quatre points de $\mathscr{E}$ tels que :
$\overrightarrow{OA} = \vec{u}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{v}$ et $\overrightarrow{OC} = \vec{w}$.

On considère les points D, E, F et G définis par :
$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{DF} = \overrightarrow{BG} = \overrightarrow{OC}$.

On a : $\overrightarrow{OF} = \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{DF} = \overrightarrow{GF} + \overrightarrow{OG}$;

donc : $(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + (\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$.

On en déduit la propriété (2).



Remarques

- *De même que le parallélogramme est la configuration géométrique associée à la somme de deux vecteurs du plan, le pavé est la configuration associée à la somme de trois vecteurs de l'espace.*
- *Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si il existe un nombre réel λ tel que :* $\vec{v} = \lambda\vec{u}$ *ou* $\vec{u} = \lambda\vec{v}$.
- *Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de l'espace ; tout vecteur de la forme $\lambda\vec{u} + \mu\vec{v} + \nu\vec{w}$, où λ, μ et ν sont des nombres réels, est appelé combinaison linéaire des vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$.*

Barycentre

La définition et les propriétés du barycentre de points pondérés du plan se généralisent à l'espace.

Ainsi, étant donnés A, B, C et D des points de $\mathscr{E}$, a, b, c et d des nombres réels tels que $a + b + c + d \neq 0$, il existe un et un seul point G de $\mathscr{E}$ tel que : $a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB} + c\overrightarrow{GC} + d\overrightarrow{GD} = \vec{0}$.

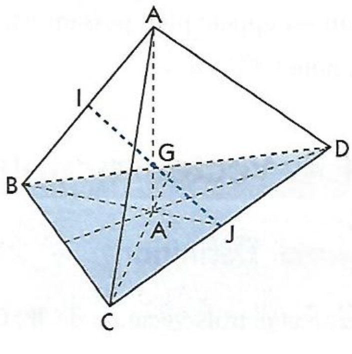
Le point G est appelé barycentre des points pondérés (A, a), (B, b), (C, c) et (D, d).

Exemple

ABCD est un tétraèdre. On désigne par I et J les milieux respectifs des arêtes [AB] et [CD], par G l'isobarycentre des points A, B, C et D, par A' le centre de gravité du triangle BCD.

- Écrire G comme barycentre des points A et A'.
- En déduire que : $\overrightarrow{AG} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AA'}$.
- Écrire G comme barycentre des points I et J.
- En déduire que G est le milieu du segment [IJ].

Le point G est appelé centre de gravité du tétraèdre ABCD.

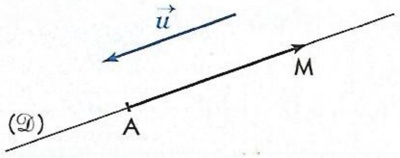


1.3. Repères de droites et de plans de l'espace

Repère d'une droite de l'espace

Soit A un point de $\mathscr{E}$ et $\vec{u}$ un vecteur non nul ; l'ensemble des points M de $\mathscr{E}$ tels que les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires est une droite de l'espace, appelée droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$, ou droite de repère $(A, \vec{u})$.

On la note : $\mathscr{D}(A, \vec{u})$.



Propriété

Soit A un point de $\mathscr{E}$ et $\vec{u}$ un vecteur non nul de $\mathscr{W}$.
L'ensemble des points M de $\mathscr{E}$ tels que $\overrightarrow{AM} = \lambda\vec{u}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, est la droite de repère $(A, \vec{u})$.

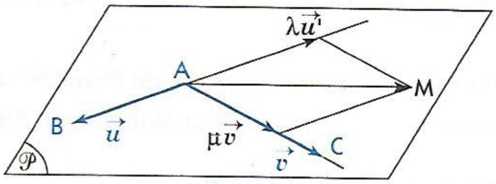
Remarques

Soit A et B deux points distincts de $\mathscr{E}$.

- *L'ensemble des points M de $\mathscr{E}$ tels que $\overrightarrow{AM} = \lambda\, \overrightarrow{AB}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, est la droite (AB).*
- *L'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM} = \lambda\, \overrightarrow{AB}$, $\lambda \in [0\ ;+\infty[$, est la demi-droite [AB).*
- *L'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM} = \lambda\, \overrightarrow{AB}$, $\lambda \in [0\ ;1]$, est le segment [AB].*

Repère d'un plan de l'espace

Soit A un point de $\mathscr{E}$ et $\vec{u}$, $\vec{v}$ deux vecteurs non colinéaires de $\mathscr{W}$. On désigne par B et C les points de $\mathscr{E}$ tels que : $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{AC} = \vec{v}$. Les points A, B, C définissent un plan ($\mathscr{P}$).



- D'après les résultats établis en géométrie plane, le triplet $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ est un repère de ($\mathscr{P}$) et, pour tout point M de ($\mathscr{P}$), il existe un couple unique (λ, μ) de nombres réels tel que : $\overrightarrow{AM} = \lambda\overrightarrow{AB} + \mu\overrightarrow{AC}$.
- Réciproquement, soit (λ, μ) un couple de nombres réels et M le point de $\mathscr{E}$ tel que : $\overrightarrow{AM} = \lambda\overrightarrow{AB} + \mu\overrightarrow{AC}$. On admet que M appartient à ($\mathscr{P}$).

Propriété

Soit A un point de $\mathscr{E}$, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non colinéaires de $\mathscr{W}$.
L'ensemble des points M de $\mathscr{E}$ tels que $\overrightarrow{AM} = \lambda\vec{u} + \mu\,\vec{v}$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, est un plan de l'espace.

Ce plan est appelé plan passant par A, de vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, ou plan de repère $(A, \vec{u}, \vec{v})$.

On le note : $\mathscr{P}(A, \vec{u}, \vec{v})$.

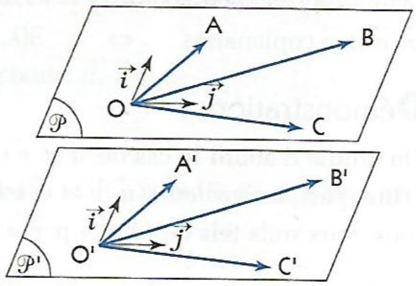
1.4. Vecteurs coplanaires

Définition

Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de $\mathscr{W}$, O et O' deux points de $\mathscr{E}$.

On désigne par A, B, C, A', B', C' les points définis par : $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{O'A'} = \vec{u}$, $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{O'B'} = \vec{v}$, $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{O'C'} = \vec{w}$.

On suppose que les points O, A, B, C appartiennent à un même plan $(\mathcal{P})$ de repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.



Il existe deux nombres réels λ et μ tels que : $\overrightarrow{OA} = \lambda\,\vec{i} + \mu\,\vec{j}$.

Donc : $\overrightarrow{O'A'} = \lambda\,\vec{i} + \mu\,\vec{j}$;

A' appartient au plan $(\mathcal{P}')$ de repère $(O', \vec{i}, \vec{j})$.

On démontre de même que les points B' et C' appartiennent au plan $(\mathcal{P}')$.

Ainsi, les points O', A', B' et C' sont coplanaires.

On dit que les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires.

On peut généraliser l'étude précédente à un nombre quelconque de vecteurs.

Définition

Les vecteurs $\vec{u_1}$, $\vec{u_2}$, ... et $\vec{u_n}$ de l'espace sont dits coplanaires si, étant donnés un point O de $\mathcal{E}$ et les points A_1, A_2, ..., A_n définis par $\overrightarrow{OA_1} = \vec{u_1}$, $\overrightarrow{OA_2} = \vec{u_2}$, ..., $\overrightarrow{OA_n} = \vec{u_n}$, les points O, A_1, A_2, ... et A_n sont coplanaires.

Cette définition est indépendante du choix du point O.

Remarques

- *Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont toujours coplanaires, puisque, étant donné un point O et les points A, B tels que $\overrightarrow{OA} = \vec{u}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{v}$, il existe au moins un plan contenant O, A, B.*
- *Trois vecteurs peuvent être non coplanaires ; les vecteurs $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OC}$ sont non coplanaires si et seulement si les points O, A, B et C sont les sommets d'un tétraèdre.*
- *Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, alors, pour tout vecteur $\vec{w}$, les trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires.*

Propriétés

Propriété 1

Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de $\mathcal{W}$ tels que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non colinéaires.

$\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires si et seulement si $\vec{w}$ est une combinaison linéaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

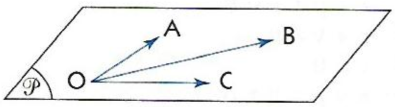
Démonstration

Soit O un point de $\mathcal{E}$, A, B, C les points de $\mathcal{E}$ tels que : $\overrightarrow{OA} = \vec{u}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{v}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{w}$ et $(\mathcal{P})$ le plan de repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$, c'est-à-dire le plan (OAB).

$\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ coplanaires $\Leftrightarrow$ O, A, B, C coplanaires

$\Leftrightarrow$ $C \in (\mathcal{P})$

$\Leftrightarrow$ $\exists(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \vec{w} = \lambda\vec{u} + \mu\,\vec{v}$.



Propriété 2

Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de $\mathcal{W}$.

$\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires si et seulement si il existe une combinaison linéaire de ces vecteurs égale au vecteur nul sans que ses coefficients soient tous nuls.

Cette propriété peut s'écrire :

$\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ coplanaires $\Leftrightarrow$ $\exists(\lambda, \mu, \nu) \in \mathbb{R}^3$, $(\lambda, \mu, \nu) \neq (0, 0, 0)$ et $\lambda\vec{u} + \mu\vec{v} + \nu\vec{w} = \vec{0}$.

Démonstration

On étudie d'abord le cas où $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.
D'une part, les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires ; d'autre part, il existe deux nombres réels λ et μ non tous deux nuls tels que $\lambda\,\vec{u} + \mu\,\vec{v} = \vec{0}$, donc tels que : $\lambda\,\vec{u} + \mu\,\vec{v} + 0\,\vec{w} = \vec{0}$, avec $(\lambda, \mu, 0) \neq (0, 0, 0)$.

On étudie maintenant le cas où $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.

- Si $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires, il existe deux nombres réels λ et μ tels que : $\vec{w} = \lambda\,\vec{u} + \mu.\vec{v}$.

On a donc : $\lambda\vec{u} + \mu\,\vec{v} + (-1)\,\vec{w} = \vec{0}$, avec $(\lambda, \mu, -1) \neq (0, 0, 0)$.

- Réciproquement, soit λ, μ et ν, trois nombres réels, non tous nuls, tels que : $\lambda\vec{u} + \mu\,\vec{v} + \nu\,\vec{w} = \vec{0}$.

Le nombre ν est non nul, sinon on aurait : $\lambda\,\vec{u} + \mu\,\vec{v} = \vec{0}$, avec $(\lambda, \mu) \neq (0, 0)$; les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ seraient alors colinéaires, ce qui est en contradiction avec l'hypothèse.
On a donc : $\vec{w} = -\frac{\lambda}{\nu}\,\vec{u} - \frac{\mu}{\nu}\,\vec{v}$; d'après la propriété 1, les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires.

Propriété 3

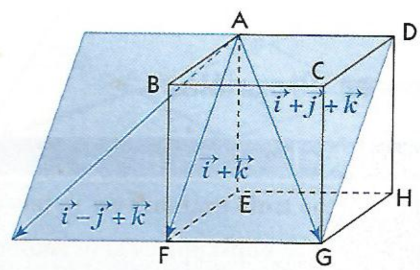
Trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ de $\mathcal{W}$ sont non coplanaires si et seulement si le seul triplet (λ, μ, ν) de nombres réels tels que $\lambda\vec{u} + \mu\vec{v} + \nu\vec{w} = \vec{0}$ est le triplet $(0, 0, 0)$.

Cette propriété est un autre énoncé de la propriété 2. Elle peut s'écrire :

$\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ non coplanaires $\Leftrightarrow$ $(\lambda\vec{u} + \mu\vec{v} + \nu\vec{w} = \vec{0} \Rightarrow \lambda = \mu = \nu = 0)$.

Exemples

ABCDEFGH est un cube ; on pose : $\overrightarrow{AB} = \vec{i}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{j}$, $\overrightarrow{AE} = \vec{k}$.
Ces vecteurs sont non coplanaires, car A, B, D et E sont non coplanaires.



- Les vecteurs $\vec{i} + \vec{k}$, $\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$, $\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$ sont coplanaires.

En effet : $2(\vec{i} + \vec{k}) - (\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}) - (\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}) = \vec{0}$.

- Les vecteurs $\vec{i}$, $\vec{i} + \vec{j}$, $\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ sont non coplanaires.

En effet , soit trois nombres réels λ, μ, ν tels que :

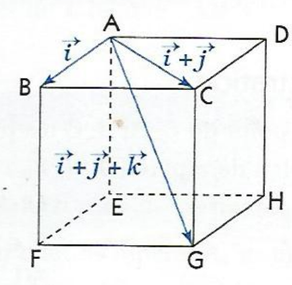
$\lambda\vec{i} + \mu(\vec{i} + \vec{j}) + \nu(\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}) = \vec{0}$.

On a : $(\lambda + \mu + \nu)\,\vec{i} + (\mu + \nu)\,\vec{j} + \nu\vec{k} = \vec{0}$.

Les vecteurs $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ étant non coplanaires, on en déduit que :

$$\begin{cases} \lambda + \mu + \nu = 0 \\ \mu + \nu = 0 \\ \nu = 0 \end{cases}$$

D'où : $\lambda = \mu = \nu = 0$.



1.5. Travaux dirigés

ABCD est un tétraèdre et I, J, K, L sont les points définis par :

$\overrightarrow{AI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{DJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{AK} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BL} = \frac{3}{4}\overrightarrow{BC}$.

On pose : $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{v}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{w}$.

On se propose de démontrer que les points I, J, K et L sont coplanaires et de déterminer les points d'intersection des droites (IJ) et (KL) et des droites (IK) et (JL).

1°) *a)* Exprimer chacun des vecteurs $\overrightarrow{IJ}, \overrightarrow{IK}$ et $\overrightarrow{IL}$ en fonction des vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$.

***b)* Calculer le vecteur $9\overrightarrow{IJ} - 8\overrightarrow{IK} - 4\overrightarrow{IL}$.**

En déduire que les points I, J, K et L sont coplanaires.

2°) Démontrer que le point P, barycentre des points pondérés (A, 2), (B, 1), (C, 3) et (D, 6), appartient aux droites (IJ) et (KL).

Exprimer $\overrightarrow{AP}$ en fonction de $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$.

3°) *a)* Démontrer que les droites (IK) et (JL) sont sécantes en un point Q de la droite (BD).

***b)* Démontrer que : $3\overrightarrow{QI} - 8\overrightarrow{QK} = \overrightarrow{QB} - 6\overrightarrow{QD} = \vec{0}$.**

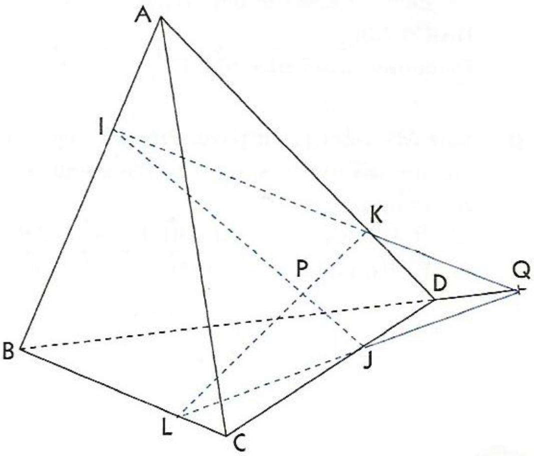
En déduire l'expression de $\overrightarrow{AQ}$ en fonction de $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$.

Solution

1°) *a)* On a : $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{AJ} - \overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DJ} - \overrightarrow{AI}$; donc : $\overrightarrow{IJ} = -\frac{1}{3}\vec{u} + \frac{1}{3}\vec{v} + \frac{2}{3}\vec{w}$.

On démontre de manière analogue que : $\overrightarrow{IK} = -\frac{1}{3}\vec{u} + \frac{3}{4}\vec{w}$ et $\overrightarrow{IL} = -\frac{1}{12}\vec{u} + \frac{3}{4}\vec{v}$.

b) $9\overrightarrow{IJ} - 8\overrightarrow{IK} - 4\overrightarrow{IL} = \left(-3 + \frac{8}{3} + \frac{1}{3}\right)\vec{u} + (3-3)\vec{v} + (6-6)\vec{w} = \vec{0}$.



Les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$, $\overrightarrow{IK}$ et $\overrightarrow{IL}$ sont coplanaires ;
donc les points I, J, K et L sont coplanaires.

2°) On a : P = bar {(A, 2), (B, 1), (C, 3), (D, 6)}.

De plus : $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} \Rightarrow$ I = bar {(A, 2), (B, 1)} ;

$\overrightarrow{DJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DC} \Rightarrow$ J = bar {(C,3),(D,6)}.

Donc : P = bar {(I, 3), (J, 9)} et P ∈ (IJ).

On démontre de même que P appartient à (KL).

On a : $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{12}(\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC} + 6\overrightarrow{AD})$

$= \frac{1}{12}(\vec{u} + 3\vec{v} + 6\vec{w})$.

3°) *a)* Les droites (IK) et (JL) sont coplanaires.

De plus, (IK) et (JL) appartiennent respectivement aux plans (ABD) et (CBD), sécants suivant la droite (BD). (IK) et (JL) ne peuvent être parallèles, sinon elles seraient parallèles à (BD), ce qui est impossible.

En effet : $\overrightarrow{BD} = -\vec{u} + \vec{w}$ et $\overrightarrow{IK} = -\frac{1}{3}\vec{u} + \frac{3}{4}\vec{w}$; ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires.

Donc les droites (IK) et (JL) se coupent en Q, point d'intersection du plan (IJK) et de la droite (BD).

b) On a : I = bar {(A, 2), (B, 1)} $\Rightarrow$ $3\overrightarrow{QI} = 2\overrightarrow{QA} + \overrightarrow{QB}$.

De plus : $\overrightarrow{AK} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AD} \Rightarrow$ K = bar {(A, 2), (D, 6)}, donc : $8\overrightarrow{QK} = 2\overrightarrow{QA} + 6\overrightarrow{QD}$.

On en déduit que : $3\overrightarrow{QI} - 8\overrightarrow{QK} = \overrightarrow{QB} - 6\overrightarrow{QD}$.

Ce vecteur est nul, sinon il serait simultanément vecteur directeur de chacune des droites (IK) et (BD) qui sont sécantes.

On a : Q = bar {(B, 1), (D, –6)} ; on en déduit que : $\overrightarrow{AQ} = -\frac{1}{5}(\vec{u} - 6\vec{w})$.

On démontre de même que les droites (IL) et (JK) sont sécantes en un point R de la droite (AC), tel que : $\overrightarrow{AR} = 3\vec{v}$.

Exercices

1.a ABCD est un tétraèdre.

1. Construire les points E et F tels que :
$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}$.

2. Démontrer que D est le milieu de [EF] et $\overrightarrow{EF} = 2\,\overrightarrow{BC}$.

1.b ABCDEFGH est un cube de centre O.
On pose : $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{v}$ et $\overrightarrow{AE} = \vec{w}$.

1. Exprimer les vecteurs $\overrightarrow{BG}$, $\overrightarrow{CH}$, $\overrightarrow{OG}$, $\overrightarrow{FD}$ et $\overrightarrow{CE}$ en fonction de $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$.

2. Construire les points I, J et K tels que :
$\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}$, $\overrightarrow{AJ} = \frac{1}{2}(\vec{u} + \vec{w}) + \vec{v}$ et
$\overrightarrow{AK} = \frac{1}{2}(\vec{v} + \vec{w}) + \vec{u}$.

1.c ABCD est un tétraèdre. Soit I, J, K et L les centres de gravité respectifs des triangles BCD, CDA, DAB et ABC.
Démontrer que : $\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{BJ} + \overrightarrow{CK} + \overrightarrow{DL} = \vec{0}$.

1.d Soit ABCDEFGH un pavé. Préciser, dans chacun des cas suivants, si les vecteurs sont coplanaires ou non :

a) $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{EG}$; *b)* $\overrightarrow{DH}$, $\overrightarrow{CF}$, $\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}$;
c) $\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{AG}$, $\overrightarrow{FE} - \overrightarrow{FG}$; *d)* $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{DF}$, $\overrightarrow{FE} - \overrightarrow{HE}$.

1.e Soit $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ trois vecteurs non coplanaires. Démontrer que les vecteurs suivants sont non coplanaires :

a) $\vec{i} + \vec{j}$, $\vec{j} + \vec{k}$ et $\vec{k} + \vec{i}$;
b) $2\vec{i} - \vec{j}$, $2\vec{j} - \vec{k}$ et $2\vec{k} - \vec{i}$;
c) $\vec{i} - \vec{j}$, $\vec{j} - \vec{k}$ et $\vec{k} - \vec{i}$.

1.f Soit ABCD un tétraèdre et I, J, K, L les milieux respectifs de [AB], [BC], [CD], [DA].
On pose : $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$; $\overrightarrow{AC} = \vec{v}$ et $\overrightarrow{AD} = \vec{w}$.

1. Donner deux points de chacune des droites :
$\mathcal{D}_1(\mathrm{I}, \vec{u} - \vec{w})$, $\mathcal{D}_2(\mathrm{J}, \vec{u} + \vec{v})$ et $\mathcal{D}_3(\mathrm{L}, \vec{u} + \vec{v} - \vec{w})$.

2. *a)* Déterminer, en fonction de $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$, un couple de vecteurs directeurs de chacun des plans (AJK), (BKL), (CIK) et (DJL).
b) Démontrer que les points I, J, K et L sont coplanaires et déterminer un repère du plan qui les contient.

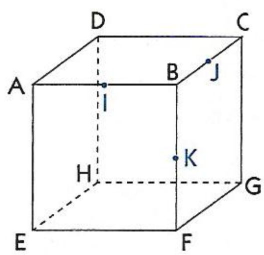
1.g Soit ABCD un tétraèdre, G le barycentre des points pondérés (A, –1), (B, 2), (C, 1), (D, 2) et I le milieu du segment [BD].
Démontrer que les points A, C, G et I sont coplanaires.

2 Bases et repères

2.1. Bases de $\mathcal{W}$

Introduction

Soit ABCDEFGH un cube. On désigne par I, J et K les milieux respectifs des segments [AB], [BC] et [BF].
On pose : $\vec{i} = \overrightarrow{BI}$, $\vec{j} = \overrightarrow{BJ}$ et $\vec{k} = \overrightarrow{BK}$.



- Justifier que les vecteurs $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ ne sont pas coplanaires.
- Exprimer en fonction de $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ chacun des vecteurs suivants : $\overrightarrow{IA}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{CG}$, $\overrightarrow{IC}$, $\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{FC}$, $\overrightarrow{BH}$, $\overrightarrow{DF}$.
- On considère le point O tel que : $\overrightarrow{BO} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$.
Justifier que O est le centre du cube.
- Construire les points P, Q et R tels que : $\overrightarrow{DP} = -4\vec{i}$, $\overrightarrow{GQ} = \vec{j}$ et $\overrightarrow{FR} = \vec{i} + 2\vec{j}$.
Exprimer en fonction de $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ chacun des vecteurs suivants : $\overrightarrow{AP}$, $\overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{RP}$.

Coordonnées d'un vecteur

Propriété fondamentale

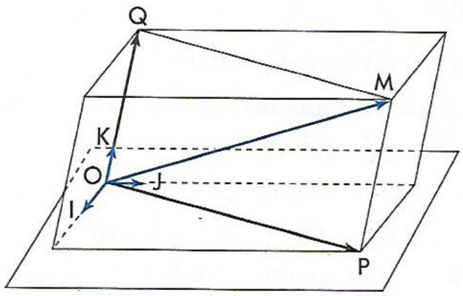
Soit $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ trois vecteurs non coplanaires.
Pour tout vecteur $\vec{u}$ de $\mathcal{W}$, il existe un et un seul triplet (x, y, z) de nombres réels tel que :
$\vec{u} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}$.

Cette propriété signifie que tout vecteur de l'espace peut se décomposer de façon unique comme combinaison linéaire de $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ pourvu que ceux-ci ne soient pas coplanaires.

Démonstration

Existence

Soit $\vec{u}$ un vecteur, (O, I), (O, J), (O, K) et (O, M) des représentants respectifs des vecteurs $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ et $\vec{u}$.
On désigne par P le point d'intersection du plan (OIJ) et de la droite de repère $(M, \vec{k})$, par Q le point tel que : $\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{PM}$.



P appartient au plan de repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, donc il existe un couple (x, y) de nombres réels tel que :
$\overrightarrow{OP} = x\vec{i} + y\vec{j}$.

$\overrightarrow{OQ}$ et $\vec{k}$ sont colinéaires, donc il existe un nombre réel z tel que : $\overrightarrow{OQ} = z\vec{k}$.

Or : $\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{PM} \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ}$.

On en déduit que : $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

C'est-à-dire : $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

Unicité

Soit (x', y', z') un triplet de nombres réels tel que : $\vec{u} = x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k}$.

On a : $x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k} \Rightarrow (x - x')\vec{i} + (y - y')\vec{j} + (z - z')\vec{k} = \vec{0}$

$$\Rightarrow \begin{cases} x - x' = 0 \\ y - y' = 0 \\ z - z' = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = x' \\ y = y' \\ z = z'. \end{cases}$$

Le triplet (x, y, z) est donc unique.

Définitions

- **Tout triplet $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de vecteurs non coplanaires est appelé base de $\mathcal{W}$.**
- **Soit $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ une base de $\mathcal{W}$ et $\vec{u}$ un vecteur.**

L'unique triplet (x, y, z) de nombres réels tel que $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ est appelé triplet de coordonnées de $\vec{u}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On note : $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ dans $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Remarque

Dire « on munit $\mathcal{W}$ de la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ » signifie que les coordonnées (x, y, z) de tout vecteur $\vec{u}$ de $\mathcal{W}$ sont exprimées dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On écrit alors simplement : $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

Propriété

Soit $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ une base de $\mathscr{W}$, λ un nombre réel, $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ deux vecteurs.

Si $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\vec{u}'\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$, alors $(\vec{u} + \vec{u}')\begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \\ z + z' \end{pmatrix}$ et $(\lambda \vec{u})\begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \\ \lambda z \end{pmatrix}$.

La démonstration de cette propriété est laissée à l'initiative du lecteur.

Base orthogonale, base orthonormée

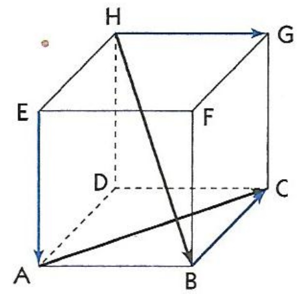
Définitions

- **Une base est orthogonale lorsqu'elle est constituée de trois vecteurs deux à deux orthogonaux.**
- **Une base est orthonormée lorsqu'elle est orthogonale et constituée de trois vecteurs unitaires.**

$(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est une base orthogonale si et seulement si : $\vec{i} \perp \vec{j}$, $\vec{j} \perp \vec{k}$, $\vec{k} \perp \vec{i}$.

$(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est une base orthonormée si et seulement si : $\vec{i} \perp \vec{j}$, $\vec{j} \perp \vec{k}$, $\vec{k} \perp \vec{i}$ et $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = \|\vec{k}\| = 1$.

Exemples



ABCDEFGH est un cube d'arête 1.

- $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{EA}, \overrightarrow{HG})$ est une base orthonormée de $\mathscr{W}$.
- $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{HG}$;

donc $\overrightarrow{AC}$ a pour coordonnées (1 ; 0 ; 1) dans cette base.

- $\overrightarrow{HB} = \overrightarrow{HE} + \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{HG}$;

donc $\overrightarrow{HB}$ a pour coordonnées (–1 ; 1 ; 1) dans cette base.

2.2. Repères de $\mathscr{E}$

Définitions

- Pour tout point O de $\mathscr{E}$ et toute base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de $\mathscr{W}$, il existe un unique triplet (I, J, K) de points tel que : $\overrightarrow{OI} = \vec{i}$, $\overrightarrow{OJ} = \vec{j}$, $\overrightarrow{OK} = \vec{k}$.
- Si O, I, J et K sont quatre points non coplanaires de $\mathscr{E}$; alors le triplet $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ}, \overrightarrow{OK})$ est une base de $\mathscr{W}$.
- Soit $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ une base de $\mathscr{W}$ et O un point de $\mathscr{E}$.

Pour tout point M de $\mathscr{E}$, il existe un et un seul triplet (x, y, z) de nombres réels tel que : $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$; en effet, il existe un seul vecteur $\overrightarrow{OM}$ de $\mathscr{W}$, donc un seul triplet de coordonnées de $\overrightarrow{OM}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Définitions

- **On appelle repère de l'espace $\mathscr{E}$:**
  - **ou bien un quadruplet (O, I, J, K) de points non coplanaires ;**
  - **ou bien un quadruplet $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, où O est un point de $\mathscr{E}$ et $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ une base de $\mathscr{W}$.**
- **Soit $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère et M un point de l'espace $\mathscr{E}$.**

L'unique triplet (x, y, z) de nombres réels tel que : $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ est appelé triplet de coordonnées du point M dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

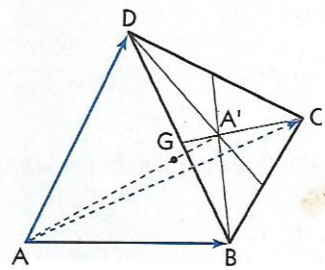
On a : $M\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ dans $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{OM}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ dans $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Vocabulaire

- Le point O est appelé origine du repère.
- Les nombres réels x, y et z sont appelés respectivement abscisse, ordonnée et cote du point M.
- les droites de repères $(O, \vec{i})$, $(O, \vec{j})$ et $(O, \vec{k})$ sont appelées axes de coordonnées du repère.
- Le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est dit orthogonal lorsque la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est orthogonale.
- Le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est dit orthonormé lorsque la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est orthonormée.

Exemples

Soit ABCD un tétraèdre ; $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$ est un repère de $\mathscr{E}$.



- Soit A' le centre de gravité du triangle BCD.

On a : $\overrightarrow{AA'} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD})$;

donc A' a pour coordonnées $(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3})$ dans le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$.

- Soit G le centre de gravité du tétraèdre.

On a : $\overrightarrow{AG} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AA'}$;

donc G a pour coordonnées $(\frac{1}{4}; \frac{1}{4}; \frac{1}{4})$ dans le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$.

Représentation d'un point dans un repère

$\mathscr{E}$ est muni du repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Soit M le point de coordonnés $(x ; y ; z)$.

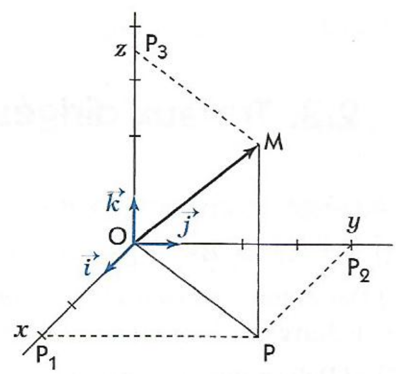
Pour placer le point M, on peut utiliser la construction suivante.

- On place sur la droite de repère $(O, \vec{i})$ le point P_1 tel que : $\overrightarrow{OP_1} = x\vec{i}$.
- On place sur la droite de repère $(O, \vec{j})$ le point P_2 tel que : $\overrightarrow{OP_2} = y\vec{j}$.
- On place sur la droite de repère $(O, \vec{k})$ le point P_3 tel que : $\overrightarrow{OP_3} = z\vec{k}$.
- On construit le point P tel que : $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_1} + \overrightarrow{OP_2}$.
- On construit le point M tel que : $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OP_3}$.

On a : $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OP_1} + \overrightarrow{OP_2} + \overrightarrow{OP_3}$

$= x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

Le dernier point construit est bien le point cherché.



Sur la figure on a : $M\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ \frac{7}{2} \end{pmatrix}$.

Calculs dans un repère

Propriétés

Soit $A\begin{pmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix} x_B \\ y_B \\ z_B \end{pmatrix}$, $C\begin{pmatrix} x_C \\ y_C \\ z_C \end{pmatrix}$ dans $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ et a, b, c trois nombres réels tels que : $a + b + c \neq 0$.

- On a : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}$ dans $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$;
- le milieu de [AB] est $I\begin{pmatrix} \dfrac{x_A + x_B}{2} \\ \dfrac{y_A + y_B}{2} \\ \dfrac{z_A + z_B}{2} \end{pmatrix}$ dans $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$;
- le barycentre de (A, a), (B, b) et (C, c) est $G\begin{pmatrix} \dfrac{ax_A + bx_B + cx_C}{a+b+c} \\ \dfrac{ay_A + by_B + cy_C}{a+b+c} \\ \dfrac{az_A + bz_B + cz_C}{a+b+c} \end{pmatrix}$ dans $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Démonstration guidée

- Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OC}$.
- Justifier que : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$; $\overrightarrow{OI} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$; $\overrightarrow{OG} = \dfrac{1}{a+b+c}(a\overrightarrow{OA} + b\overrightarrow{OB} + c\overrightarrow{OC})$.
- Conclure.

2.3. Travaux dirigés

Soit ABCDEFGH un pavé, I le milieu du segment [EH], J et K les points tels que : $\overrightarrow{AJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{BK} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$. On munit $\mathscr{E}$ du repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.

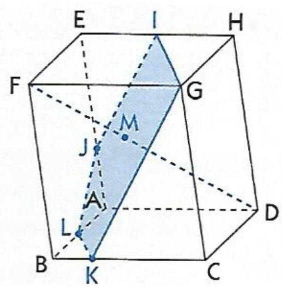
1°) Déterminer les coordonnées des points I, J, K et G, puis celles des vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{GK}$. En déduire que les points I, J, K et G sont coplanaires.

2°) *a)* Déterminer les coordonnées de L, point d'intersection du plan (IJK) et de la droite (AB).
***b)* Déterminer les coordonnées de M, point d'intersection du plan (IJK) et de la droite (DF).**

Solution

1°) On a : $I\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$, $J\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$, $K\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{4} \\ 0 \end{pmatrix}$, $G\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; donc : $\overrightarrow{IJ}\begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{GK}\begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{3}{4} \\ -1 \end{pmatrix}$.

On a : $\overrightarrow{GK} = \frac{3}{2}\overrightarrow{IJ}$, les droites (IJ) et (GK) sont parallèles ;
donc les points I, J, K et G sont coplanaires.



2°) *a)* L appartient à l'axe des abscisses ;
donc son triplet de coordonnées est de la forme : $(x\ ;\ 0\ ;\ 0)$.
Le plan (IJK) coupe les plans parallèles (EFG) et (ABC) suivant les droites parallèles (IG) et (KL).

Les vecteurs $\overrightarrow{IG}\begin{pmatrix}1\\ \frac{1}{2}\\ 0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{KL}\begin{pmatrix}x-1\\ -\frac{1}{4}\\ 0\end{pmatrix}$ sont colinéaires ;

donc il existe un nombre réel λ tel que : $\overrightarrow{KL} = \lambda\,\overrightarrow{IG}$.

$\begin{cases} x-1=\lambda \\ -\frac{1}{4}=\frac{1}{2}\lambda \end{cases} \Leftrightarrow \lambda = -\frac{1}{2}$ et $x=\frac{1}{2}$. Donc : $L\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$.

b) Soit $(x\,;y\,;z)$ le triplet de coordonnées du point M.

On pose : $\vec{u} = 6\,\overrightarrow{JI}$ et $\vec{v} = 6\,\overrightarrow{JL}$; on a : $\vec{u}\begin{pmatrix}0\\ 3\\ 4\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}3\\ 0\\ -2\end{pmatrix}$.

$M \in (IJK) \Leftrightarrow \exists\,(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2, \overrightarrow{GM} = \lambda\vec{u}+\mu\vec{v}$. Donc : $\begin{cases} x-1=3\mu \\ y-1=3\lambda \\ z-1=4\lambda-2\mu \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1+3\mu \\ y=1+3\lambda \\ z=1+4\lambda-2\mu \end{cases}$.

On a : $D\begin{pmatrix}0\\ 1\\ 0\end{pmatrix}$ et $F\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$; donc : $\overrightarrow{DF}\begin{pmatrix}1\\ -1\\ 1\end{pmatrix}$.

$M \in (DF) \Leftrightarrow \exists\,\nu\in\mathbb{R}, \overrightarrow{DM} = \nu\,\overrightarrow{DF}$. Donc : $\begin{cases} x=\nu \\ y-1=-\nu \\ z=\nu \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\nu \\ y=1-\nu \\ z=\nu \end{cases}$.

On en déduit : $\begin{cases} 1+3\mu=\nu \\ 1+3\lambda=1-\nu \\ 1+4\lambda-2\mu=\nu \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda=-\frac{5}{27} \\ \mu=-\frac{4}{27} \\ \nu=\frac{5}{9} \end{cases}$. On a : $M\begin{pmatrix}\frac{5}{9}\\ \frac{4}{9}\\ \frac{5}{9}\end{pmatrix}$.

Exercices

2.a Soit les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\ 3\\ -4\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\ -1\\ 1\end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix}0\\ 1\\ -2\end{pmatrix}$ dans la base $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

1. Calculer les coordonnées des vecteurs : $\vec{u}-2\vec{v}+\vec{w}$, $2\vec{u}+\vec{v}-\vec{w}$, $\vec{u}-\vec{v}+2\vec{w}$.

2. Démontrer que $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires (on pourra exprimer $\vec{w}$ comme combinaison linéaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$).

2.b Soit les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\ 1\\ 0\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\ 0\\ -1\end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix}0\\ 1\\ -2\end{pmatrix}$ dans la base $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

1. Démontrer que $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ est une base de $\mathcal{W}$.

2. Calculer les coordonnées des vecteurs $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ dans cette base.

2.c Soit $A\begin{pmatrix}2\\ -1\\ 1\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}-1\\ 1\\ 3\end{pmatrix}$ et $C\begin{pmatrix}\frac{7}{2}\\ -2\\ 0\end{pmatrix}$ dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

1. Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ dans la base $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. En déduire que les points A, B et C sont alignés.

2. Déterminer les coordonnées du point D tel que : $\overrightarrow{DA} = -3\,\overrightarrow{DB}$.

2.d Soit les points $A\begin{pmatrix}0\\ 1\\ 0\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}-1\\ 0\\ -1\end{pmatrix}$, $C\begin{pmatrix}1\\ 4\\ 0\end{pmatrix}$ et $D\begin{pmatrix}-3\\ 2\\ -5\end{pmatrix}$ dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

1. Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ dans la base $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

2. Calculer les coordonnées du vecteur $5\,\overrightarrow{AB}+2\,\overrightarrow{AC}$ dans la base $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. En déduire que les points A, B, C et D sont coplanaires.

2.e Soit les points $A\begin{pmatrix}-1\\ 2\\ -3\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}0\\ 2\\ -1\end{pmatrix}$ et $C\begin{pmatrix}-1\\ 1\\ 0\end{pmatrix}$ dans le repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

1. Placer les points A, B et C sur une figure.

2. Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{CA}$ dans la base $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

3. Calculer les coordonnées des points I, J et K, milieux respectifs de [BC], [CA] et [AB].

4. Calculer les coordonnées du point G, centre de gravité du triangle ABC.

3 Produit scalaire

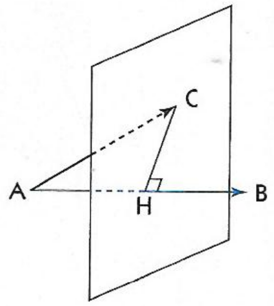
3.1. Définition et propriétés

Extension du produit scalaire à l'espace

Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls de $\mathcal{W}$ et A un point de $\mathcal{E}$. On désigne par B, C les points tels que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{v}$ et par H le projeté orthogonal de C sur la droite (AB).

Il existe au moins un plan contenant A, B, C et H. Dans ce plan, on a :

$\vec{u} \cdot \vec{v} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overline{AB} \times \overline{AH} = AB \times AC \times \cos \widehat{BAC}$.



Ce nombre est indépendant du choix du point A.

En effet, on a aussi : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2\right)$;

or la norme d'un vecteur est indépendante du représentant choisi.

AB et AC étant les normes respectives des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, on en déduit que $\cos \widehat{BAC}$, donc aussi l'angle $\widehat{BAC}$, sont indépendants du choix du point A.

Définition

Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$ deux vecteurs et A, B, C des points tels que : $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{AC} = \vec{v}$.
On appelle produit scalaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ le nombre réel, noté $\vec{u} \cdot \vec{v}$, défini par :

- **$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$, si l'un des vecteurs $\vec{u}$ ou $\vec{v}$ est nul ;**
- **$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\| \cos \widehat{BAC}$, si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non nuls.**

Remarques

- *Le produit scalaire de $\vec{u}$ par lui-même est appelé carré scalaire de $\vec{u}$. On le note : $\vec{u}^2$.*
  On a : $\vec{u}^2 = \|\vec{u}\|^2$; d'où : $\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u}^2}$.
- *On a : $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \iff \vec{u} \perp \vec{v}$.*

Propriétés

Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ de $\mathcal{W}$, pour tout nombre réel k, on a :

(1) $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$; **(2)** $(k\,\vec{u}) \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot (k\,\vec{v}) = k\,(\vec{u} \cdot \vec{v})$;

(3) $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$; **(4)** $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w}$.

Démonstration guidée

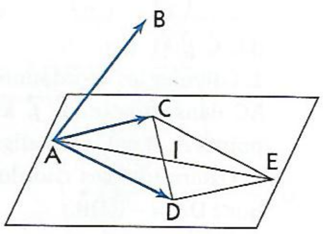
Les propriétés (1) et (2) ne font intervenir qu'un ou deux vecteurs, donc des vecteurs coplanaires ; elles ont été démontrées dans le plan.

Les propriétés (1) et (3) impliquent la propriété (4).

Il suffit donc de démontrer la propriété (3).

Soit A un point de $\mathcal{E}$ et B, C, D, E les points tels que :

$\overrightarrow{AB} = \vec{u}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{v}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{w}$, $\overrightarrow{AE} = \vec{v} + \vec{w}$.



On désigne par I le milieu de [CD].

- Justifier que :

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(AB^2 + AC^2 - BC^2)$ et $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}(AB^2 + AD^2 - BD^2)$.

- Utiliser le théorème de la médiane pour transformer les sommes $AC^2 + AD^2$ et $BC^2 + BD^2$.
- Démontrer que : $\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w} = AB^2 + AI^2 - BI^2$.
- Conclure.

Remarque

L'égalité $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2)$ *et les propriétés précédentes permettent d'établir, comme dans le plan, les égalités suivantes :*

$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2)$;

$\|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2 = (\vec{u} + \vec{v}).(\vec{u} - \vec{v})$.

Exemples

Soit ABCDEFGH un cube d'arête a.

Calculons les produits scalaires : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{EB}.\overrightarrow{BG}$, $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DG}$, $\overrightarrow{EA}.\overrightarrow{CH}$, $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CG}$ et $\overrightarrow{AG}.\overrightarrow{BD}$.

- $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = a \times a\sqrt{2} \times \cos\frac{\pi}{4} = a^2$;
- $\overrightarrow{EB}.\overrightarrow{BG} = a\sqrt{2} \times a\sqrt{2} \times \cos\frac{2\pi}{3} = -a^2$

(EB = BG = EG, donc EBG est un triangle équilatéral) ;

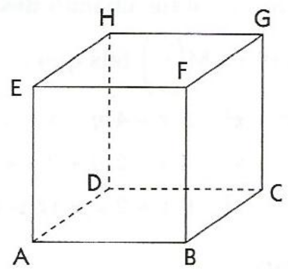
- $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DG} = \overrightarrow{DC}.\overrightarrow{DG} = DC \times DC = a^2$

(C est le projeté orthogonal de G sur la droite (DC)) ;

- $\overrightarrow{EA}.\overrightarrow{CH} = -\overrightarrow{CG}.\overrightarrow{CH} = -CG^2 = -a^2$

(G est le projeté orthogonal de H sur la droite (CG) ;

- $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CG} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AE} = 0$ (vecteurs orthogonaux) ;
- $\overrightarrow{AG}.\overrightarrow{BD} = (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CG}).\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{CG}.\overrightarrow{BD} = 0 + 0 = 0$.



Expressions du produit scalaire et de la norme dans une base orthonormée

Propriété

Soit $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ et $\vec{u}'\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}$ dans une base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On a :

- $\vec{u} \cdot \vec{u}' = xx' + yy' + zz'$;
- $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Démonstration guidée

On a : $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ et $\vec{u}' = x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k}$.

- Développer : $(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) \cdot (x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k})$. En déduire le premier résultat.
- Envisager le cas : $\vec{u}' = \vec{u}$. Conclure.

Remarque

Cette propriété n'est pas applicable lorsque la base n'est pas orthonormée.

Conséquence

Soit $A\begin{pmatrix}x_A\\y_A\\z_A\end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix}x_B\\y_B\\z_B\end{pmatrix}$ dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On a : $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$.

3.2. Travaux dirigés

1. Équation cartésienne d'une sphère

L'espace est muni du repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

1°) Soit $(\mathcal{S})$ la sphère de centre $\Omega\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et de rayon r.

Démontrer que le point $M\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ appartient à $(\mathcal{S})$ si et seulement si : $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2$.

2°) Soit (Σ) l'ensemble des points $M\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ tels que : $x^2 + y^2 + z^2 - 2\alpha\, x - 2\beta\, y - 2\gamma\, z + \delta = 0$ (1), où α, β, γ, δ sont des nombres réels.

***a)* Vérifier que (1) peut s'écrire : $(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \delta$.**

***b)* En déduire, suivant le signe de $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \delta$, la nature et les éléments caractéristiques de (Σ).**

3°) *Application*

***a)* Déterminer une équation de la sphère de diamètre [AB], où $A\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$.**

***b)* Déterminer, dans chacun des cas suivants, la nature et les éléments caractéristiques de l'ensemble (Σ) des points $M\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ tels que :**

- $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 5 = 0$;
- $x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 2y + 2z + 6 = 0$;
- $x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 2z + 12 = 0$.

Solution

1°) On a : $M \in (\mathcal{S}) \iff \Omega M^2 = r^2$

$\iff (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2$.

2°) *a)* On a : $x^2 - 2\alpha\, x = (x-\alpha)^2 - \alpha^2$, $x^2 - 2\beta\, x = (x-\beta)^2 - \beta^2$, $x^2 - 2\gamma\, x = (x-\gamma)^2 - \gamma^2$.

Donc : (1) $\iff (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \delta$.

b) Soit Ω' le point de coordonnées $(\alpha ; \beta ; \gamma)$.

(Σ) est l'ensemble des points $M\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ tels que : $\Omega' M^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \delta$.

Si $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \delta < 0$, aucun point n'appartient à (Σ) ; $(\Sigma) = \varnothing$.

Si $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \delta = 0$, seul Ω' appartient à (Σ) ; $(\Sigma) = \{\Omega'\}$.

Si $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \delta > 0$, (Σ) est la sphère de centre Ω' et de rayon $\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \delta}$.

3°) *a)* Le segment [AB] a pour milieu $I\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}$ et $AB = \sqrt{(1-3)^2 + (5+1)^2 + (3)^2} = 7$.

La sphère de diamètre [AB] est la sphère de centre I et de rayon $\frac{7}{2}$. Elle admet pour équation :

$(x-2)^2 + (y-2)^2 + (z - \frac{3}{2})^2 = (\frac{7}{2})^2 \iff x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 4y - 3z - 2 = 0$.

b) • $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 5 = 0 \iff (x-1)^2 + (y+2)^2 + z^2 = 10$;

donc, (Σ) est la sphère de centre $\Omega_1\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ et de rayon $\sqrt{10}$.

• $x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 2y + 2z + 6 = 0 \iff (x+2)^2 + (y-1)^2 + (z+1)^2 = 0$;

donc : $(\Sigma) = \{\Omega_2\}$, où $\Omega_2\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

• $x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 2z + 12 = 0 \iff (x-3)^2 + y^2 + (z+1)^2 = -2$; donc : $(\Sigma) = \varnothing$.

2. Surfaces de niveau

Soit A et B deux points de $\mathscr{E}$ tels que AB = 6, a et b deux nombres réels non tous nuls.

On se propose de déterminer, pour tout nombre réel k, l'ensemble (Γ_k) des points M de $\mathscr{E}$ tels que : $a\,\mathrm{MA}^2 + b\,\mathrm{MB}^2 = k$.

(Γ_k) est appelé surface de niveau k de l'application $f : \mathrm{M} \mapsto a\,\mathrm{MA}^2 + b\,\mathrm{MB}^2$.

1°) On suppose que : $a + b \neq 0$.

Soit G le barycentre des points pondérés (A, a) et (B, b).

***a)* Démontrer que : $a\,\mathrm{MA}^2 + b\,\mathrm{MB}^2 = (a+b)\,\mathrm{MG}^2 + a\,\mathrm{GA}^2 + b\,\mathrm{GB}^2$.**

***b)* Déterminer (Γ_k) suivant les valeurs de k.**

c) Application

- **Déterminer la surface de niveau 28 de l'application : $\mathrm{M} \mapsto \mathrm{MA}^2 + \mathrm{MB}^2$.**
- **Déterminer la surface de niveau 2 de l'application : $\mathrm{M} \mapsto \dfrac{\mathrm{MA}}{\mathrm{MB}}$.**

2°) On suppose que : $a + b = 0$.

***a)* Démontrer que (Γ_k) est l'ensemble des points M tels que : $\mathrm{MA}^2 - \mathrm{MB}^2 = \dfrac{k}{a}$.**

***b)* I étant le milieu de [AB], démontrer que : $\mathrm{MA}^2 - \mathrm{MB}^2 = 2\,\overrightarrow{\mathrm{IM}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AB}}$.**

***c)* En déduire la nature de (Γ_k).**

Solution

1°) *a)* Cette égalité a déjà été établie dans le plan ; le calcul dans $\mathscr{E}$ est identique.

$$\begin{aligned} a\,\mathrm{MA}^2 + b\,\mathrm{MB}^2 &= a(\overrightarrow{\mathrm{MG}} + \overrightarrow{\mathrm{GA}})^2 + b(\overrightarrow{\mathrm{MG}} + \overrightarrow{\mathrm{GB}})^2 \\ &= (a+b)\,\mathrm{MG}^2 + a\,\mathrm{GA}^2 + b\,\mathrm{GB}^2 + (a\,\overrightarrow{\mathrm{GA}} + b\,\overrightarrow{\mathrm{GB}}) \\ &= (a+b)\,\mathrm{MG}^2 + a\,\mathrm{GA}^2 + b\,\mathrm{GB}^2. \end{aligned}$$

b) On a : $f(\mathrm{M}) = k \iff \mathrm{MG}^2 = \dfrac{k - a\,\mathrm{GA}^2 - b\,\mathrm{GB}^2}{a+b}$.

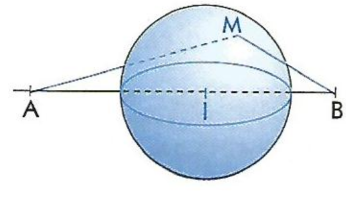
- Si $k < a\,\mathrm{GA}^2 + b\,\mathrm{GB}^2$, il n'y a pas de point solution.
- Si $k = a\,\mathrm{GA}^2 + b\,\mathrm{GB}^2$, G est le seul point solution.
- Si $k > a\,\mathrm{GA}^2 + b\,\mathrm{GB}^2$, (Γ_k) est la sphère de centre G et de rayon $\sqrt{\dfrac{k - a\,\mathrm{GA}^2 - b\,\mathrm{GB}^2}{a+b}}$.

c) Application

- $a = b = 1$, le barycentre introduit précédemment est le milieu I de [AB] et IA = IB = 3.

$\mathrm{MA}^2 + \mathrm{MB}^2 = 28 \iff \mathrm{MI}^2 = 5$.

La surface de niveau 28 de l'application $\mathrm{M} \mapsto \mathrm{MA}^2 + \mathrm{MB}^2$ est la sphère de centre I et de rayon $\sqrt{5}$.



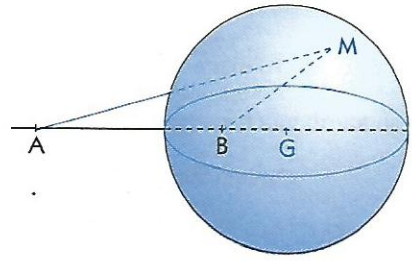
- $\dfrac{\mathrm{MA}}{\mathrm{MB}} = 2 \iff \mathrm{MA}^2 - 4\,\mathrm{MB}^2 = 0$.

Le barycentre introduit précédemment est le point G tel que :

$\overrightarrow{\mathrm{AG}} = \dfrac{4}{3}\,\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ et GA = 8, GB = 2.

$\dfrac{\mathrm{MA}}{\mathrm{MB}} = 2 \iff \mathrm{MG}^2 = \dfrac{\mathrm{GA}^2 - 4\,\mathrm{GB}^2}{3} = 16$.

La surface de niveau 2 de l'application $\mathrm{M} \mapsto \dfrac{\mathrm{MA}}{\mathrm{MB}}$ est la sphère de centre G et de rayon 4.



2°) *a)* $f(\mathrm{M}) = a\,\mathrm{MA}^2 - a\,\mathrm{MB}^2$.

Donc : $f(\mathrm{M}) = k \iff \mathrm{MA}^2 - \mathrm{MB}^2 = \dfrac{k}{a}$.

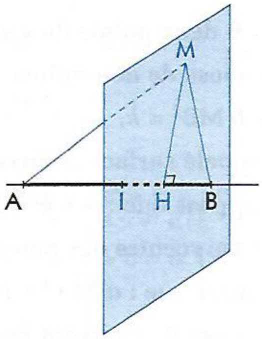
b) $\mathrm{MA}^2 - \mathrm{MB}^2 = (\overrightarrow{\mathrm{MA}} + \overrightarrow{\mathrm{MB}}) . (\overrightarrow{\mathrm{MA}} - \overrightarrow{\mathrm{MB}})$
$= 2\,\overrightarrow{\mathrm{MI}} . \overrightarrow{\mathrm{BA}}$
$= 2\,\overrightarrow{\mathrm{IM}} . \overrightarrow{\mathrm{AB}}$.

c) $f(\mathrm{M}) = k \iff 2\,\overrightarrow{\mathrm{IM}} . \overrightarrow{\mathrm{AB}} = \dfrac{k}{a}$.

On choisit un repère pour la droite (AB).

Soit H le point de (AB) tel que : $\overline{\mathrm{IH}} = \dfrac{k}{2a\,\overline{\mathrm{AB}}}$.

(Γ_k) est le plan perpendiculaire en H à la droite (AB).



Exercices

3.a ABCD est un tétraèdre régulier de côté a.

1. Calculer en fonction de a :
$\overrightarrow{\mathrm{AB}}.\overrightarrow{\mathrm{AC}}$, $\overrightarrow{\mathrm{AB}}.\overrightarrow{\mathrm{AD}}$, $\overrightarrow{\mathrm{AB}}.\overrightarrow{\mathrm{BC}}$, $\overrightarrow{\mathrm{AB}}.\overrightarrow{\mathrm{CD}}$.

2. En déduire que deux arêtes opposées quelconques de ABCD sont orthogonales.

3.b SABCD est une pyramide de sommet S dont la base ABCD est un carré de côté a et les faces des triangles équilatéraux.
Calculer en fonction de a :
$\overrightarrow{\mathrm{SA}}.\overrightarrow{\mathrm{SB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{SA}}.\overrightarrow{\mathrm{SC}}$, $\overrightarrow{\mathrm{SA}}.\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{SA}}.\overrightarrow{\mathrm{BC}}$, $\overrightarrow{\mathrm{SA}}.\overrightarrow{\mathrm{BD}}$.

3.c ABCD est un tétraèdre tel que les faces ABC, DBC sont des triangles rectangles isocèles d'hypoténuse commune (BC) et les deux autres faces des triangles équilatéraux de côté a.

1. Calculer, en fonction de a :
$\overrightarrow{\mathrm{AD}}.\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AB}}.\overrightarrow{\mathrm{CD}}$.

2. Soit I le milieu de [BC]. Calculer $\cos(\widehat{\overrightarrow{\mathrm{IA}}, \overrightarrow{\mathrm{ID}}})$.

3.d SABCD est une pyramide de sommet S dont la base ABCD est un carré de côté a et les faces SAB, SAD des triangles rectangles isocèles de sommet commun A.

1. Calculer, en fonction de a :
$\overrightarrow{\mathrm{SA}}.\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{SA}}.\overrightarrow{\mathrm{BD}}$.

2. Calculer $\cos(\widehat{\overrightarrow{\mathrm{SA}}, \overrightarrow{\mathrm{SC}}})$, puis $\overrightarrow{\mathrm{SA}}.\overrightarrow{\mathrm{SC}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AC}}.\overrightarrow{\mathrm{SC}}$.

3. Calculer en fonction de a :
$\overrightarrow{\mathrm{SB}}.\overrightarrow{\mathrm{BD}}$, $\overrightarrow{\mathrm{SB}}.\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{SB}}.\overrightarrow{\mathrm{BC}}$.

3.e $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est une base orthonormée de $\mathcal{W}$.
Démontrer que pour tout vecteur $\vec{u}$ de $\mathcal{W}$, on a :
$\vec{u} = (\vec{u}.\vec{i})\vec{i} + (\vec{u}.\vec{j})\vec{j} + (\vec{u}.\vec{k})\vec{k}$.

Exercices

APPRENTISSAGE

Calculs vectoriels

1 Soit A, B et C trois points non alignés. Pour tout point M de l'espace, on pose : $\vec{u} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC}$.
1. Démontrer que le vecteur $\vec{u}$ est indépendant du point M.
2. Soit D le point tel que : $\overrightarrow{CD} = \vec{u}$. Démontrer que ACBD est un parallélogramme.

2 Soit ABCD un parallélogramme. À tout point M de l'espace, on associe le point N tel que BMDN soit un parallélogramme.
Démontrer que : $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{NC}$.

3 Soit ABCDEFGH un pavé. On désigne par I, J, K et L les milieux respectifs des arêtes [AB], [BC], [GH] et [EH]. Démontrer que IJKL est un parallélogramme.

4 Soit ABCD un tétraèdre.
On considère les points I, J, K, L tels que :
$\overrightarrow{AI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{DK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DC}$; $\overrightarrow{DL} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DB}$.
1. Démontrer que IJKL est un parallélogramme.
2. Soit M et N les points tels que :
$\overrightarrow{DM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{DN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{DB}$.
Démontrer que IJMN est un trapèze.

5 Soit ABCD un tétraèdre.
1. Démontrer que : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$.
2. Soit S le point tel que : $\overrightarrow{CS} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$.
a) Vérifier que [AS] et [BD] ont même milieu.
b) On désigne par I et J les milieux respectifs de [BD] et [AC]. Démontrer que : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = 2\,\overrightarrow{JI}$.

6 G désigne le barycentre des points pondérés (A, 3), (B, –4), (C, 2) et (D, –2). Exprimer le vecteur $\overrightarrow{AG}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$.

7 Soit ABCD un tétraèdre. On désigne par G le barycentre des points pondérés (A, 2), (B, –3), (C, 1) et (D, 4). À tout point M de l'espace, on associe le vecteur $\vec{u}$ tel que : $\vec{u} = 2\,\overrightarrow{MA} - 3\,\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + 4\,\overrightarrow{MD}$.
Démontrer que : $\vec{u} = 4\,\overrightarrow{MG}$.

Repères de droites et de plans

8 Soit A, B, C et D quatre points non coplanaires.
On pose : $\vec{u} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC}$.
Démontrer que les droites de repères respectifs $(A, \vec{u})$ et $(D, \vec{v})$ sont sécantes en un point I que l'on déterminera.

9 Soit OABC un tétraèdre. On considère les points A', B', C' et O' tels que : $\overrightarrow{OA'} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OB'} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OC'} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OO'} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$.
1. Exprimer chacun des vecteurs $\overrightarrow{AB'}$, $\overrightarrow{AC'}$ et $\overrightarrow{AO'}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OC}$.
2. En déduire que A, O', B' et C' sont coplanaires et que le plan qui contient ces quatre points est parallèle au plan (OBC).
3. Démontrer que OAB'CBC'O'A' est un pavé.

10 Soit OABC un tétraèdre, k un nombre réel et I, J, K les points tels que :
$\overrightarrow{OI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OJ} = \frac{3}{4}\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OK} = k\,\overrightarrow{OC}$.
1. Démontrer que les droites (IJ) et (AB) sont sécantes. On désigne par E leur point d'intersection.
2. Pour quelles valeurs de k les droites (IK) et (AC) sont-elles sécantes ?
On désigne alors par F leur point d'intersection.
3. Pour quelles valeurs de k les droites (EF) et (BC) sont-elles sécantes ?
Déterminer alors leur point d'intersection G.

11 SABCD est une pyramide dont la base ABCD est un parallélogramme.
On pose : $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{AD} = \vec{v}$; on désigne par I, J, K, L, M et N les centres de gravité respectifs des triangles SAB, SBC, SCD, SDA, SAC et SBD.
Exprimer les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$, $\overrightarrow{IK}$, $\overrightarrow{IL}$, $\overrightarrow{IM}$ et $\overrightarrow{IN}$ en fonction de $\vec{u}$ et $\vec{v}$; en déduire que les points I, J, K, L, M et N sont coplanaires.

12 Soit ABCD un tétraèdre. On désigne par I, J, K, L, M, N les milieux respectifs des arêtes [AB], [CD], [AC], [BD], [AD], [BC], par A', B', C', D' les centres de gravité respectifs des triangles BCD, ACD, ABD, ABC et par G l'isobarycentre des points A, B, C, D.
1. Démontrer que les droites (IJ), (KL) et (MN) sont concourantes.
2. Démontrer que les droites (AA'), (BB'), (CC') et (DD') sont concourantes.

13 Soit ABCDEFGH un pavé.
1. Démontrer que les plans (BDE) et (CFH) sont parallèles.
2. On considère les points G_1 et G_2, centres de gravité respectifs des triangles BDE et CFH.
a) Démontrer que : $\overrightarrow{AG_1} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AG}$ et $\overrightarrow{AG_2} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AG}$.
b) Démontrer que la droite (AG) est sécante aux plans (BDE) et (CFH) respectivement en G_1 et G_2.

14 Soit ABCDEFGH un cube.
1. On considère le plan $(\mathcal{P})$ de repère $(A, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{HF})$.
a) Définir $(\mathcal{P})$ par trois de ses points.
b) Déterminer un vecteur directeur d'une droite orthogonale à $(\mathcal{P})$.
2. Mêmes questions si $(\mathcal{P})$ a pour repère :
a) $(A, \overrightarrow{EF}, \overrightarrow{BG})$; *b)* $(A, \overrightarrow{AH}, \overrightarrow{BD})$.

15 Soit ABCD un tétraèdre et k un nombre réel. On désigne par I le point tel que $\vec{AI} = k\,\vec{AC}$, par $(\mathcal{P})$ le plan de repère $(I, \vec{AB}, \vec{CD})$ et par J, K, L les points d'intersection du plan $(\mathcal{P})$ avec les droites (BC), (AD), (BD).
Exprimer chacun des vecteurs $\vec{IJ}$, $\vec{IK}$ et $\vec{IL}$ comme combinaison linéaire des vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{CD}$.

16 Soit A, B deux points de $\mathcal{E}$ et $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ trois vecteurs de $\mathcal{W}$ tels que $\vec{v}, \vec{w}$ ne sont pas colinéaires et $\vec{u}$ est orthogonal à $\vec{v}$ et à $\vec{w}$.
On désigne par $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{P}')$ deux plans de repères respectifs $(A, \vec{u}, \vec{v})$ et $(B, \vec{v}, \vec{w})$.
Démontrer que $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{P}')$ sont perpendiculaires.

Bases et repères

17 L'espace est muni du repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
1. Représenter les points A, B et C de coordonnées respectives (2 ; 1 ; 3), (–1 ; 2 ; 1) et (0 ; 1 ; –3).
2. Construire les points I, J et K, milieux respectifs des segments [BC], [AC] et [AB].
Déterminer les coordonnées de I, J et K.

18 Soit ABCDEFGH un pavé. On désigne par I, J, K, L, M, N les centres respectifs des parallélogrammes ABCD, EFGH, ABFG, DCEH, ADHE, BCGF et par O l'isobarycentre des sommets du pavé.
1. Démontrer que les droites (IJ), (KL) et (MN) sont concourantes en O.
2. Démontrer que O est le centre de chacun des parallélogrammes ACGE et BDHF.
3. Déterminer les coordonnées de O :
a) dans le repère $(A, \vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AE})$;
b) dans le repère $(A, \vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AG})$.

19 Soit ABCDEFGH un cube.
1. On pose : $\vec{u} = \vec{BH}$, $\vec{v} = \vec{EG}$.
a) Déterminer les coordonnées des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans la base $(\vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AE})$;
b) Déterminer les coordonnées d'un vecteur $\vec{w}$ orthogonal à $\vec{u}$ et à $\vec{v}$.
2. Mêmes questions dans chacun des cas suivants :
a) $\vec{u} = \vec{DF}$, $\vec{v} = \vec{BE}$; *b)* $\vec{u} = \vec{BH}$, $\vec{v} = \vec{CE}$.

20 Déterminer les coordonnées du point G, centre de gravité d'un tétraèdre ABCD :
a) dans le repère $(B, \vec{BC}, \vec{BD}, \vec{BA})$;
b) dans le repère $(B, \vec{BC}, \vec{CA}, \vec{AD})$;
c) dans le repère $(C, \vec{CB}, \vec{CA}, \vec{CA'})$, où A' est le centre de gravité du triangle BCD.

Produit scalaire

21 Soit ABCDEFGH un cube.
1. *a)* Déterminer les coordonnées des vecteurs $\vec{AG}$, $\vec{BE}$, $\vec{BD}$ dans le repère $(A, \vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AE})$, puis calculer les produits scalaires $\vec{AG}.\vec{BE}$ et $\vec{AG}.\vec{BD}$.
b) En déduire que la droite (AG) est orthogonale au plan (BDE).
2. Démontrer de manière analogue que la droite (AG) est orthogonale au plan (FCH).

22 Soit ABCD un tétraèdre régulier d'arête a et I, J les milieux respectifs des arêtes [AB], [CD].
On pose : $\vec{AB} = \vec{u}$, $\vec{AC} = \vec{v}$, $\vec{AD} = \vec{w}$.
1. Calculer en fonction de a :
$\|\vec{u}\|$, $\|\vec{v}\|$, $\|\vec{w}\|$, $\vec{u}.\vec{v}$, $\vec{v}.\vec{w}$, $\vec{w}.\vec{u}$.
2. Calculer, en fonction de a, les produits scalaires $\vec{AB}.\vec{CD}$, $\vec{AB}.\vec{IJ}$ et $\vec{CD}.\vec{IJ}$. Que peut-on en déduire pour les droites (AB), (CD) et (IJ) ?
3. Calculer, en fonction de a, la distance IJ.

23 Soit ABCD un tétraèdre régulier. On désigne par I le milieu de l'arête [BC].
1. Calculer $\cos \widehat{IAD}$ et $\cos \widehat{AID}$.
2. À l'aide de la calculatrice, déterminer des valeurs approchées à un degré près des mesures des angles $\widehat{IAD}$ et $\widehat{AID}$.

24 Soit SABCD une pyramide dont la base ABCD est un carré de côté 1 et les faces sont des triangles équilatéraux. On pose : $\vec{AB} = \vec{u}$, $\vec{AD} = \vec{v}$, $\vec{AS} = \vec{w}$.
1. Calculer : $\|\vec{u}\|$, $\|\vec{v}\|$, $\|\vec{w}\|$, $\vec{u}.\vec{v}$, $\vec{v}.\vec{w}$, $\vec{w}.\vec{u}$.
2. Exprimer chacun des vecteurs $\vec{SA}$, $\vec{SB}$, $\vec{SC}$ et $\vec{SD}$ en fonction de $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$.
Établir que les droites (SA) et (SB) sont respectivement perpendiculaires aux droites (SC) et (SD).
3. Déterminer un point I du plan (ABC) tel que la droite (SI) soit orthogonale au plan (SAB).
(On pourra exprimer $\vec{AI}$ en fonction de $\vec{u}$ et $\vec{v}$.)

25 Soit A et B deux points de $\mathcal{E}$ tels que : AB = 8.
Déterminer l'ensemble des points M de $\mathcal{E}$ tels que : $\vec{AM}.\vec{AB} = -12$.

26 Soit ABCDEFGH un cube, I et J les centres respectifs des faces BCGF et CDHG. Calculer une valeur approchée de chacun des angles du triangle AIJ.

27 Soit ABCD un tétraèdre tel que : AB = CD. On désigne par I, J, K et L les milieux respectifs des arêtes [BC], [BD], [CA] et [DA]. Démontrer que : $\vec{IL}.\vec{JK} = 0$.

28 Soit $(\mathcal{P})$ un plan de l'espace, A et B deux points de $(\mathcal{P})$, O un point n'appartenant pas à $(\mathcal{P})$. On désigne par O' le projeté orthogonal de O sur $(\mathcal{P})$.
1. Vérifier que : $\vec{OA}.\vec{OB} = \vec{O'A}.\vec{O'B} + OO'^2$.
2. Démontrer que :
a) si $\widehat{AO'B}$ est droit ou aigu, alors $\widehat{AOB}$ est aigu ;
b) si $\widehat{AOB}$ est droit ou obtus, alors $\widehat{AO'B}$ est obtus.

29 Soit ABCD un tétraèdre.
1. Démontrer que : $\vec{AB}.\vec{CD} + \vec{AC}.\vec{DB} + \vec{AD}.\vec{BC} = 0$.
2. En déduire que si (AB) et (AC) sont orthogonales respectivement à (CD) et (BD), alors (AD) est orthogonale à (BC).

30 Soit ABCD un tétraèdre.
1. *a)* Démontrer que :
$AB^2 - BC^2 + CD^2 - DA^2 = 2\,\vec{AC}.\vec{DB}$.

b) En déduire que les droites (AC) et (DB) sont orthogonales si et seulement si : $AB^2 + CD^2 = AD^2 + BC^2$.
2. Utiliser le résultat précédent pour démontrer que si (AB) et (AC) sont orthogonales respectivement à (CD) et (BD), alors (AD) et (BC) sont orthogonales.

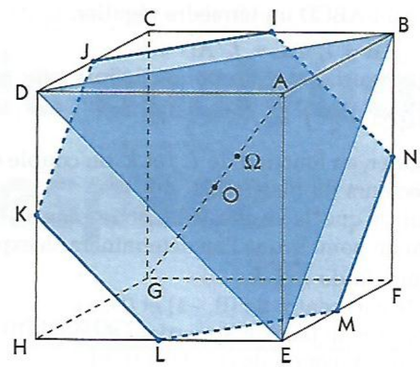
31 Soit ABCDEFGH un cube.
On pose : $\overrightarrow{AB} = \vec{i}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{j}$, $\overrightarrow{AE} = \vec{k}$.
On désigne par I, J et K les points tels que :
$\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\vec{i}$, $\overrightarrow{AJ} = \frac{1}{3}\vec{j}$ et $\overrightarrow{AK} = \frac{2}{3}\vec{k}$.
1. Déterminer un triplet (α, β, γ) de nombres réels tel que $\alpha\vec{i} + \beta\vec{j} + \gamma\vec{k}$ soit un vecteur directeur d'une droite orthogonale au plan (IJK).
2. Déterminer et construire le point d'intersection M du plan (CDG) avec la droite passant par A et orthogonale au plan (IJK).

32 Soit ABCD un tétraèdre régulier d'arête 1. On désigne par G l'isobarycentre des points A, B, C, D et par A', B', C', D' les centres de gravité respectifs des triangles BCD, ACD, ABD, ABC.
1. *a)* Démontrer qu'il existe une sphère (Σ) de centre G, passant par les points A, B, C et D.
b) Déterminer le nombre réel k pour que (Σ) soit l'ensemble des points M tels que :
$MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 = k$.
(Σ) est appelée sphère circonscrite au tétraèdre ABCD.
2. *a)* Démontrer qu'il existe une sphère (Σ') de centre G, passant par les points A', B', C' et D'.
b) Déterminer les intersections de (Σ') avec chacun des plans (BCD), (ACD), (ABD) et (ABC).
c) Déterminer le nombre réel k' pour que (Σ') soit l'ensemble des points M tels que :
$MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 = k'$.
(Σ') est appelée sphère inscrite dans le tétraèdre ABCD.

APPROFONDISSEMENT

33 **1.** Soit $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{D}')$ deux droites de repères respectifs $(A, \vec{u})$ et $(B, \vec{v})$. Déterminer les conditions que doivent vérifier les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\overrightarrow{AB}$ pour que les droites $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{D}')$ soient :
a) confondues ; *b)* strictement parallèles ;
b) sécantes ; *d)* non coplanaires.
2. ABCD est un tétraèdre. Déterminer les positions relatives des droites $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{D}')$ dans chacun des cas suivants.
a) $\mathcal{D}\ (A, \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$; $\mathcal{D}'\ (D, \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC})$.
b) $\mathcal{D}\ (A, \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$; $\mathcal{D}'\ (C, \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD})$.
c) $\mathcal{D}\ (B, \overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{AD})$; $\mathcal{D}'\ (D, 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$.

34 **Section d'un cube par un plan perpendiculaire à une diagonale**
Soit ABCDEFGH un cube d'arête 1. On désigne par I, J, K, L, M, N les milieux respectifs des arêtes [BC], [CD], [DH], [HE], [EF], [FB] et par O le milieu de [AG].
$\mathcal{E}$ est muni du repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.
1. *a)* Déterminer les coordonnées de $\overrightarrow{AG}$, $\overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{BE}$.
b) Démontrer que la droite (AG) est perpendiculaire au plan (BDE).



c) On désigne par Ω le point d'intersection de la droite (AG) et du plan (BDE). Démontrer que le triangle BDE est équilatéral et que Ω est son centre de gravité.
d) Démontrer que : $\overrightarrow{A\Omega} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AG}$.
2. *a)* Exprimer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{OI}$ et $\overrightarrow{OJ}$.
b) Démontrer que le triangle OIJ est équilatéral et que le plan (OIJ) est perpendiculaire à (AG).
c) Démontrer que les points I, J, K, L, M et N sont coplanaires et que IJKLMN est un hexagone régulier.

35 Soit $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
Démontrer que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si les trois déterminants $\begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} a & a' \\ c & c' \end{vmatrix}$ et $\begin{vmatrix} b & b' \\ c & c' \end{vmatrix}$ sont nuls.

Application
Déterminer les triplets (α, β, γ) de nombres réels pour que les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} 2\alpha+2\beta \\ 2\alpha \\ -\beta \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} \gamma \\ -3\gamma \\ 1-\gamma \end{pmatrix}$ soient colinéaires.

36 Soit ABCD un tétraèdre et I, J, K, L, M les milieux respectifs des segments [AB], [AC], [AD], [BC], [BD].
λ étant un nombre réel, on considère les points P et Q tels que : $\overrightarrow{AP} = \lambda\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CQ} = \lambda\overrightarrow{CD}$.
1. *a)* Démontrer que : $\overrightarrow{PQ} = (1 - \lambda)\overrightarrow{AC} + \lambda\overrightarrow{BD}$.
b) En déduire que (PQ) est parallèle à (IKL).
2. On désigne par O le milieu de [PQ].
a) Démontrer que : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = 2\,\overrightarrow{JM}$.
b) Établir la relation : $\overrightarrow{JO} = \lambda\overrightarrow{JM}$.
Quel est l'ensemble des points O quand λ décrit $\mathbb{R}$?
c) En déduire que pour tout point O du segment [JM], il existe un point P de [AB] et un point Q de [CD] tels que O soit le milieu de [PQ].

37 Soit ABCDEFGH un cube d'arête 10.
On pose : $\overrightarrow{AB} = \vec{i}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{j}$, $\overrightarrow{AE} = \vec{k}$.
Soit I, J et K les points tels que :
$\overrightarrow{AI} = \frac{1}{3}\vec{i}$, $\overrightarrow{AJ} = \frac{1}{2}\vec{j}$ et $\overrightarrow{AK} = \frac{2}{3}\vec{k}$.
On désigne par $(\mathcal{P})$ le plan passant par le point B et parallèle au plan (IJK).
1. Représenter en perspective cavalière l'intersection du plan $(\mathcal{P})$ avec le cube.
2. On désigne par M, N, P, Q les points d'intersection respectifs de $(\mathcal{P})$ avec les droites (CD), (DH), (EH), (EF).
Exprimer en fonction de $\vec{i}, \vec{j}$ et $\vec{k}$ les vecteurs $\overrightarrow{DM}, \overrightarrow{DN}$, $\overrightarrow{EP}$ et $\overrightarrow{EQ}$.
3. Représenter en vraie grandeur l'intersection du plan $(\mathcal{P})$ avec le cube.

38 Soit ABCD un tétraèdre régulier.

On pose : $\overrightarrow{AB} = \vec{i}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{j}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{k}$.

On désigne par I, J et K les points définis par :

$\overrightarrow{AI} = \frac{1}{3}\vec{i}$, $\overrightarrow{AJ} = \frac{2}{3}\vec{j}$ et $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{2}\vec{k}$.

1. Déterminer, en fonction de $\vec{i}, \vec{j}$ et $\vec{k}$ un couple de vecteurs directeurs du plan (IJK).

2. Démontrer que la droite (CD) et le plan (IJK) sont sécants en un point E, que l'on déterminera en exprimant $\overrightarrow{AE}$ en fonction de $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$.

3. Soit F le barycentre de (B, –1) et (D, 2).
Démontrer que le point F appartient au plan (IJK).

4. Soit G le barycentre de (I, –1) et (J, 2).
Démontrer que G est le point d'intersection des droites (BC) et (EF).

39 Soit ABCD un tétraèdre tel que la droite (AB) est perpendiculaire au plan (BCD) et le triangle BCD n'est pas rectangle. On désigne par E et F les projetés orthogonaux respectifs de D sur les droites (BC) et (AC).

1. Démontrer que : $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DF} = 0$; en déduire que la droite (AC) est orthogonale au plan (DEF).

2. Soit I et J les orthocentres respectifs des triangles BCD et ACD. Démontrer que : $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{IJ} = 0$; en déduire que la droite (IJ) est orthogonale au plan (ACD).

40 Soit ABCD un tétraèdre régulier d'arête 1. On désigne par H le centre de gravité du triangle BCD et par G le barycentre des points pondérés (A, 3), (B, 1), (C, 1) et (D, 1).

1. Démontrer que G est le milieu de [AH].

2. On désigne par (Σ) l'ensemble des points M tels que : $3MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 = 3$.
Démontrer que (Σ) est une sphère passant par A.

3. Déterminer l'intersection de (Σ) et du plan (BCD).

4. On désigne par (Π) l'ensemble des points M tels que : $MB^2 + MC^2 + MD^2 - 3\,MA^2 = 1$.
Démontrer que (Π) est un plan qui coupe les arêtes [AB], [AC] et [AD] en leurs milieux.

5. Déterminer l'intersection de (Σ) et de (Π).

41 Soit SABC un tétraèdre dont la face ABC est un triangle équilatéral de côté 1 et dont les faces SAB et SAC sont des triangles rectangles et isocèles en A.

1. Calculer une valeur approchée des angles du triangle SBC.

2. Soit H le projeté orthogonal du point A sur le plan (SBC).

a) Démontrer qu'il existe un nombre réel λ tel que : $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AS} + \lambda\,(\overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC})$.

b) Exprimer λ en fonction du produit scalaire $\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{SB}$.

c) Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{SC}.\overrightarrow{BH}$.

Le point H est-il l'orthocentre du triangle SBC ?

3. Démontrer que H est le centre du cercle circonscrit au triangle SBC.

42 Soit ABCD un tétraèdre.

1. *a)* Déterminer l'ensemble (Π) des points M tels que : $(\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}).(\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MD}) = 0$.

b) Déterminer l'ensemble (Σ) des points M tels que : $(\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}).(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MD}) = 0$.

2. L'espace est muni d'un repère orthonormé .

On donne : $A\begin{pmatrix}0\\3\\-1\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix}$, $C\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$, $D\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$.

Déterminer une équation cartésienne de (Π) et une équation cartésienne de (Σ).

43 Soit SABCD une pyramide dont la base ABCD est un carré de côté 1 et telle que les triangles SAC et SBD soient équilatéraux.

On désigne par G le barycentre des points pondérés (S, α), (A, β), (B, β), (C, β), (D, β), où α et β sont deux nombres réels tels que : $\alpha + 4\beta \neq 0$.

1. Démontrer que G est le centre d'une sphère passant par S, A, B, C et D si et seulement si $\alpha = 2\beta$.

2. Déterminer le nombre réel k pour que cette sphère soit l'ensemble des points M tels que :
$2MS^2 + MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 = k$.

44 Soit SABCD une pyramide dont la base ABCD est un carré de centre I et telle que :

$AB = 1$ et $SA = SB = SC = SD = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

On désigne par G le barycentre des points pondérés (S, α), (A, β), (B, β), (C, β), (D, β), où α et β sont deux nombres réels tels que : $\alpha + 4\beta \neq 0$.

1. *a)* Démontrer que G est équidistant des plans (SAB), (SBC), (SCD) et (SDA).

b) Déterminer un couple (α, β) tel que G est équidistant des plans (SAB), (SBC), (SCD), (SDA) et (ABC).

2. On désigne par (Σ) l'ensemble des points M tels que : $\alpha\,MS^2 + \beta(MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2) = k$, où k est un nombre réel.

a) Déterminer l'ensemble des triplets (α, β, k) tels que (Σ) soit la sphère de centre G passant par I.

b) Déterminer alors les intersections de (Σ) avec les plans (SAB), (SBC), (SCD) et (SDA).

(Σ) *est alors la sphère inscrite dans la pyramide SABCD.*

45 Soit ABCD un tétraèdre régulier d'arête 1, I le milieu de [AB] et J le projeté orthogonal de I sur le plan (BCD).

1. Démontrer que l'ensemble des points M du plan (BCD) tels que $MA^2 + MB^2 = 1$ est le cercle de centre J passant par B

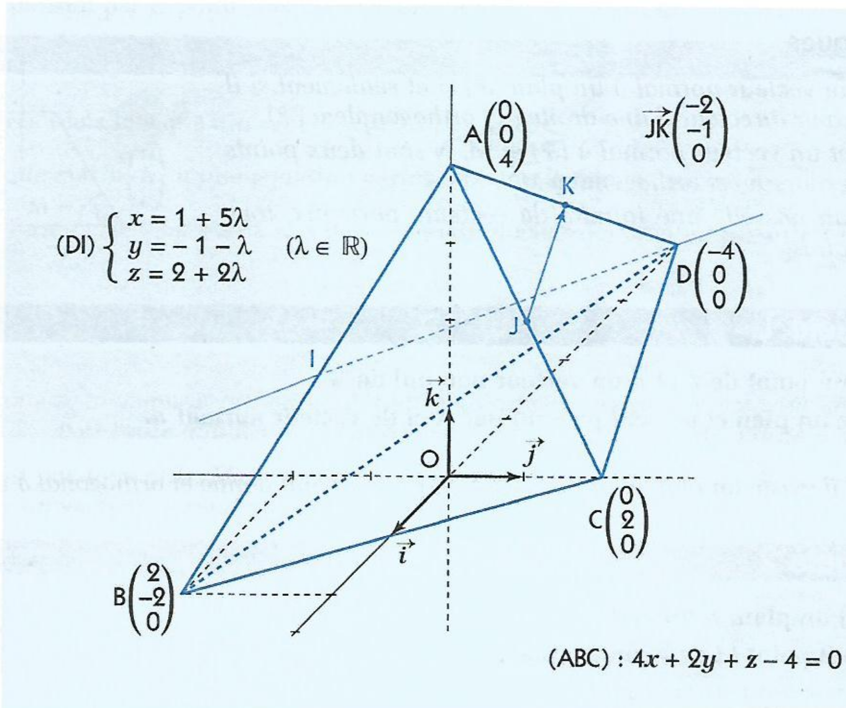
2. Déterminer, suivant le nombre réel k, la nature de l'ensemble des points M du plan (BCD) tels que $MA^2 + MB^2 = k$.

3. Démontrer que la fonction qui, à tout point M du plan (BCD), associe le nombre réel $MA^2 + MB^2$ prend sa valeur minimale au point J.

8 Géométrie analytique de l'espace

Introduction

Dans le plan muni d'un repère, nous savons caractériser les droites par des équations cartésiennes ou des représentations paramétriques. On peut faire de même, non seulement avec les droites, mais aussi avec les plans de l'espace. L'objectif de ce chapitre est d'établir ces caractérisations et de les utiliser pour étudier les positions relatives de droites et de plans.



SOMMAIRE

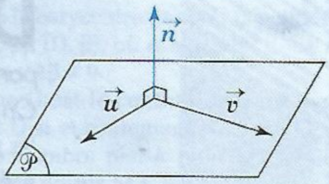
Dans ce chapitre, sauf indication contraire, l'espace $\mathscr{E}$ est muni du repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

1 Équations cartésiennes

1.1. Vecteur normal à un plan

Définition

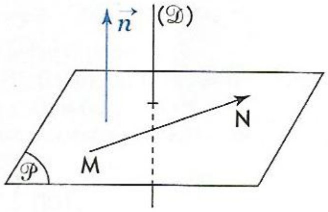
Soit $(\mathscr{P})$ un plan de $\mathscr{E}$, de vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
On appelle vecteur normal à $(\mathscr{P})$ tout vecteur non nul $\vec{n}$ orthogonal à $\vec{u}$ et à $\vec{v}$.



Cette définition est indépendante du choix des vecteurs directeurs de $(\mathscr{P})$.

Remarques

- *$\vec{n}$ est un vecteur normal à un plan $(\mathscr{P})$ si et seulement si il est vecteur directeur d'une droite $(\mathscr{D})$ orthogonale à $(\mathscr{P})$.*
- *Si $\vec{n}$ est un vecteur normal à $(\mathscr{P})$ et M, N sont deux points de $(\mathscr{P})$, alors $\vec{n}$ est orthogonal à $\overrightarrow{MN}$.*
- *Un plan possède une infinité de vecteurs normaux, tous colinéaires.*



Propriété 1

Soit A un point de $\mathscr{E}$ et $\vec{n}$ un vecteur non nul de $\mathscr{W}$.
Il existe un plan et un seul passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$.

En effet, il existe un plan et un seul passant par un point donné et orthogonal à une droite donnée.

Propriété 2

Soit $(\mathscr{P})$ un plan, $\vec{n}$ un vecteur normal à $(\mathscr{P})$ et A un point de $(\mathscr{P})$.
Pour tout point M de $\mathscr{E}$, on a : $M \in (\mathscr{P}) \iff \overrightarrow{AM} \perp \vec{n}$.

Démonstration

Soit $(\mathscr{P})$ le plan passant par A et orthogonal à la droite $(\mathscr{D})$ de repère $(A, \vec{n})$.

On a : $\overrightarrow{AM} \perp \vec{n} \iff M = A$ ou $(AM) \perp (\mathscr{D})$

$\iff M = A$ ou $(AM) \,//\, (\mathscr{P})$

$\iff M \in (\mathscr{P})$.

Remarques

Soit $(\mathscr{P})$ et $(\mathscr{P}')$ deux plans de vecteurs normaux respectifs $\vec{n}$ et $\vec{n}'$. On a :

- *$(\mathscr{P})$ et $(\mathscr{P}')$ sont parallèles si et seulement si $\vec{n}$ et $\vec{n}'$ sont colinéaires.*
- *$(\mathscr{P})$ et $(\mathscr{P}')$ sont perpendiculaires si et seulement si $\vec{n}$ et $\vec{n}'$ sont orthogonaux.*

1.2. Équations cartésiennes d'un plan

Propriété

Soit $(\mathcal{P})$ le plan de $\mathcal{E}$ passant par $A\begin{pmatrix}x_0\\y_0\\z_0\end{pmatrix}$ et de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$.

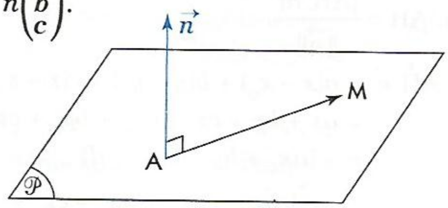
Pour tout point $M\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ de $\mathcal{E}$, on a :

$M \in (\mathcal{P}) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}\cdot\vec{n} = 0$

$\Leftrightarrow a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$

$\Leftrightarrow ax + by + cz + d = 0$

(avec $d = -ax_0 - by_0 - cz_0$).



Réciproquement, soit (Π) un ensemble de points M dont les coordonnées $(x ; y ; z)$ vérifient une équation de la forme : $ax + by + cz + d = 0$ (1).

Si a, b et c ne sont pas tous nuls, il existe un point A dont les coordonnées $(x_0 ; y_0 ; z_0)$ vérifient :

$$ax_0 + by_0 + cz_0 + d = 0 \quad (2).$$

De (1) et (2), on déduit : $a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$.

(Π) est donc l'ensemble des points M tel que : $\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n} = 0$, avec $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$;

c'est-à-dire Π est le plan passant par le point A et de vecteur normal $\vec{n}$.

Propriété

Soit a, b et c des nombres réels tels que : $(a ; b ; c) \neq (0 ; 0 ; 0)$.

- **Tout plan de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ a une équation cartésienne de la forme : $ax + by + cz + d = 0$.**
- **Toute équation de la forme : $ax + by + cz + d = 0$ est l'équation cartésienne d'un plan de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$.**

Remarques

- *Dans n'importe quel repère, même non orthonormé, tout plan admet une équation cartésienne de la forme $ax + by + cz + d = 0$ et toute équation de cette forme est l'équation cartésienne d'un plan, lorsque a, b et c ne sont pas tous nuls. Mais, lorsque le repère n'est pas orthonormé, le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ n'est généralement pas un vecteur normal au plan.*
- *Si $ax + by + cz + d = 0$ est une équation cartésienne de $(\mathcal{P})$, pour tout nombre réel k non nul, $k(ax + by + cz + d) = 0$ est aussi une équation cartésienne de $(\mathcal{P})$.*

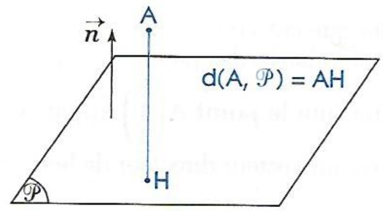
Exemples

- $2x - y + z - 3 = 0$ est une équation du plan passant par le point $A\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$ et de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$.
- Le plan passant par l'origine du repère et de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\-2\\-3\end{pmatrix}$, a pour équation cartésienne : $x - 2y - 3z = 0$.

Distance d'un point à un plan

Soit $(\mathcal{P})$ le plan d'équation $ax + by + cz + d = 0$ et $A\begin{pmatrix}x_0\\y_0\\z_0\end{pmatrix}$.

On se propose de calculer la distance de A à $(\mathcal{P})$.
On sait que cette distance est égale à AH, où H est le projeté orthogonal de A sur $(\mathcal{P})$.



Soit $(x\,;y\,;z)$ les coordonnées du point H. On a : $\overrightarrow{AH}\begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \\ z-z_0 \end{pmatrix}$.

$\overrightarrow{AH}$, vecteur normal à $(\mathcal{P})$, est colinéaire à $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$; donc : $|\overrightarrow{AH}.\vec{n}| = AH\,\|\vec{n}\|$.

D'où, $AH = \dfrac{|\overrightarrow{AH}.\vec{n}|}{\|\vec{n}\|}$.

$$\begin{aligned} \text{Or : } \overrightarrow{AH}.\vec{n} &= a(x-x_0) + b(y-y_0) + c(z-z_0) \\ &= ax + by + cz - (ax_0 + by_0 + cz_0) \\ &= -\,(ax_0 + by_0 + cz_0 + d) \qquad \text{(H appartient à } (\mathcal{P})\text{, donc : } ax + by + cz + d = 0\text{).} \end{aligned}$$

Donc : $AH = \dfrac{|\overrightarrow{AH}.\vec{n}|}{\|\vec{n}\|} = \dfrac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$.

Propriété

Soit $A\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$ un point de $\mathcal{E}$ et $(\mathcal{P})$ le plan d'équation cartésienne $ax + by + cz + d = 0$.

La distance du point A au plan $(\mathcal{P})$ est : $d(A, \mathcal{P}) = \dfrac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$.

Exemples

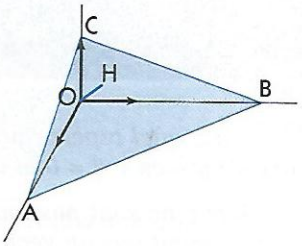
- Soit $(\mathcal{P})$ le plan d'équation cartésienne $2x - 2y + z - 5 = 0$ et $A\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$$d(A, \mathcal{P}) = \frac{|2\times 1 - 2\times(-2) + 1\times 1 - 5|}{\sqrt{2^2+2^2+1^2}} = \frac{2}{3}.$$

- Soit OABC un tétraèdre tel que : $A\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $C\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

On vérifie que le plan (ABC) a pour équation cartésienne $3x + 2y + 6z - 6 = 0$.
La distance du point O au plan (ABC) est OH tel que :

$$OH = \frac{|-6|}{\sqrt{3^2+2^2+6^2}} = \frac{6}{7}.$$

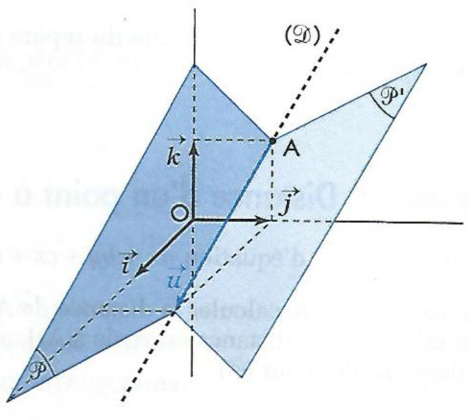


1.3. Système d'équations cartésiennes d'une droite

Introduction

Soit $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{P}')$ deux plans de $\mathcal{E}$ d'équations cartésiennes respectives $x + 2y + 2z - 4 = 0$ et $x - y + 2z - 1 = 0$.

- Déterminer deux vecteurs $\vec{n}$ et $\vec{n}'$ normaux respectivement aux plans $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{P}')$.
- Vérifier que ces vecteurs ne sont pas colinéaires ; en déduire la position relative des plans $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{P}')$.
- Vérifier que le point $A\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ appartient à $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{P}')$ et que $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de leur droite d'intersection $(\mathcal{D})$.



• En déduire que $(A, \vec{u})$ est un repère de $(\mathscr{D})$.

La droite $(\mathscr{D})$ est l'ensemble des points M dont les coordonnées $(x\ ;\ y\ ;\ z)$ vérifient le système des équations cartésiennes des plans $(\mathscr{P})$ et $(\mathscr{P}')$.

On dit que : $\begin{cases} x + 2y + 2z - 4 = 0 \\ x - y + 2z - 1 = 0 \end{cases}$ est un système d'équations cartésiennes de la droite $(\mathscr{D})$.

Propriété

Plus généralement, toute droite $(\mathscr{D})$ de l'espace peut être considérée comme étant l'intersection de deux plans sécants $(\mathscr{P})$ et $(\mathscr{P}')$.
Chacun de ces plans admet une équation cartésienne ; le système formé par ces deux équations est appelé système d'équations cartésiennes de la droite $(\mathscr{D})$.

Pour qu'un système de deux équations soit un système d'équations cartésiennes d'une droite, il faut que les deux équations qui le composent soient celles de deux plans sécants , c'est-à-dire que leurs vecteurs normaux soient non colinéaires.

Propriété

• Toute droite de l'espace est caractérisée par un système de deux équations cartésiennes de plans de la forme : $\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0. \end{cases}$

• Si $ax + by + cz + d = 0$ et $a'x + b'y + c'z + d' = 0$ sont les équations cartésiennes respectives de deux plans sécants, alors $\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases}$ **est un système d'équations cartésiennes de la droite d'intersection de ces deux plans.**

Remarques

- *Cette propriété reste valable lorsque le repère n'est pas orthonormé.*
- *Le choix des deux plans dont l'intersection est une droite donnée n'étant pas unique, ainsi que le choix des équations caractérisant ces deux plans, une droite admet plusieurs systèmes d'équations cartésiennes.*

Exemples

• Soit A et B les points de coordonnées respectives $(1\ ;\ 1\ ;\ 0)$ et $(0\ ;\ 1\ ;\ 1)$.

Vérifier que $\begin{cases} x - 2y + z + 1 = 0 \\ x + y + z - 2 = 0 \end{cases}$ est un système d'équations cartésiennes de la droite (AB).

• $\begin{cases} x - y - 2z + 1 = 0 \\ 2x - 2y - 4z + 1 = 0 \end{cases}$ n'est pas un système d'équations cartésiennes de droite ; en effet, les deux équations qui le composent sont celles de deux plans parallèles admettant un même vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

• $\begin{cases} x - y = 0 \\ x - z = 0 \end{cases}$ est un système d'équations cartésiennes de la droite passant par O et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Exercices

1.a **1.** Déterminer une équation cartésienne des plans de repères $(O, \vec{i}, \vec{j})$, $(O, \vec{i}, \vec{k})$ et $(O, \vec{j}, \vec{k})$.
2. Déterminer une équation cartésienne des plans de repères $(A, \vec{i}, \vec{j})$, $(A, \vec{i}, \vec{k})$ et $(A, \vec{j}, \vec{k})$ avec $A\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$.

1.b Soit le point $A\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$. Déterminer un système d'équations cartésiennes des droites de repères respectifs $(A, \vec{i})$, $(A, \vec{j})$ et $(A, \vec{k})$.

1.c Soit les points $A\begin{pmatrix}-2\\0\\0\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}0\\3\\0\end{pmatrix}$ et $C\begin{pmatrix}0\\0\\4\end{pmatrix}$.
Déterminer une équation cartésienne du plan (ABC).

1.d Soit $A\begin{pmatrix}-1\\3\\-5\end{pmatrix}$, $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-5\\2\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}-3\\5\\2\end{pmatrix}$ et $(\mathscr{P})$ le plan de repère $(A, \vec{u}, \vec{v})$.
1. Déterminer un vecteur $\vec{n}$ orthogonal à $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
2. En déduire une équation cartésienne de $(\mathscr{P})$.

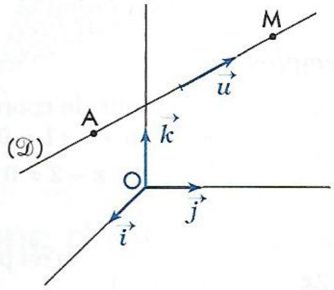
1.e Démontrer que $\begin{cases} 2x + z - 5 = 0 \\ 2x + y + z - 4 = 0 \end{cases}$ est un système d'équations cartésiennes de la droite de repère$(A, \vec{u})$, où $A\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix}$.

1.f Déterminer un repère de la droite $(\mathscr{D})$ qui a pour système d'équations cartésiennes
$\begin{cases} x - 2z + 3 = 0 \\ x + y - 2 = 0. \end{cases}$

1.g Soit ABCDEFGH un cube, I, J et K les mileux respectifs des arêtes [AB], [AD] et [AE].
On pose : $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{v}$, $\overrightarrow{AE} = \vec{w}$.
1. Déterminer une équation cartésienne du plan (IJK) dans le repère $(A, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$.
2. Déterminer un système d'équations cartésiennes des droites (IJ), (JK) et (KI) dans ce repère.

2 Représentations paramétriques

2.1. Représentations paramétriques d'une droite



Soit le point $A\begin{pmatrix}x_0\\y_0\\z_0\end{pmatrix}$, le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ et la droite $(\mathscr{D})$ de repère $(A, \vec{u})$.

Pour tout point $M\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ de $\mathscr{E}$, on a : $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x - x_0\\y - y_0\\z - z_0\end{pmatrix}$.

$(\mathscr{D})$ est l'ensemble des points M tels que : $\overrightarrow{AM} = \lambda\vec{u}$, où $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\overrightarrow{AM} = \lambda\vec{u} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = x_0 + \lambda a \\ y = y_0 + \lambda b \quad (\lambda \in \mathbb{R}). \\ z = z_0 + \lambda c \end{cases}$$

Définition

L'espace est muni du repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Soit $(\mathscr{D})$ la droite passant par $A\begin{pmatrix}x_0\\y_0\\z_0\end{pmatrix}$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$.

On dit que le système $\begin{cases} x = x_0 + \lambda a \\ y = y_0 + \lambda b \quad (\lambda \in \mathbb{R}) \\ z = z_0 + \lambda c \end{cases}$ est une représentation paramétrique de $(\mathscr{D})$.

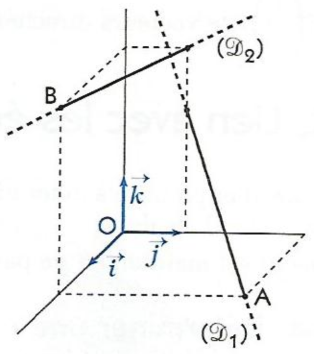
Remarques

- *Dans cette représentation paramétrique, λ est l'abscisse de M dans le repère $(A, \vec{u})$ de $(\mathcal{D})$.*
- *Le choix de A et de $\vec{u}$ n'étant pas unique, une droite admet plusieurs représentations paramétriques.*

Exemples

- La droite $(\mathcal{D}_1)$ passant par le point $A\begin{pmatrix}2\\3\\0\end{pmatrix}$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}$ a pour représentation paramétrique

$$\begin{cases} x = 2 - \lambda \\ y = 3 - \lambda \\ z = \lambda \end{cases} \quad (\lambda \in \mathbb{R}).$$

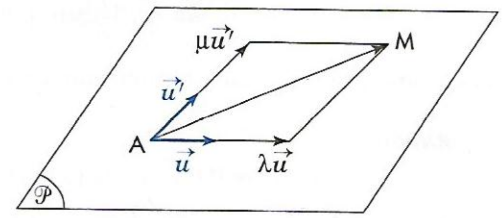


- Le système $\begin{cases} x = 2 - 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = 3 \end{cases}$ $(\lambda \in \mathbb{R})$ est une représentation paramétrique de la droite $(\mathcal{D}_2)$ passant par le point $B\begin{pmatrix}2\\0\\3\end{pmatrix}$ et de vecteur directeur $\vec{v}\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}$.

2.2. Représentations paramétriques d'un plan

Soit le point $A\begin{pmatrix}x_0\\y_0\\z_0\end{pmatrix}$, les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$, $\vec{u}'\begin{pmatrix}a'\\b'\\c'\end{pmatrix}$, et le plan $(\mathcal{P})$ de repère $(A, \vec{u}, \vec{u}')$.

Pour tout point $M\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ de $\mathcal{E}$ on a : $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x - x_0\\y - y_0\\z - z_0\end{pmatrix}$.



$(\mathcal{P})$ est l'ensemble des points M tels que : $\overrightarrow{AM} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{u}'$, où $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\mu \in \mathbb{R}$.

$$\overrightarrow{AM} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{u}' \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = x_0 + \lambda a + \mu a' \\ y = y_0 + \lambda b + \mu b' \\ z = z_0 + \lambda c + \mu c' \end{cases} \quad ((\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2).$$

Définition

L'espace est muni du repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Soit $(\mathcal{P})$ le plan passant par $A\begin{pmatrix}x_0\\y_0\\z_0\end{pmatrix}$ et de vecteurs directeurs $\vec{u}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ et $\vec{u}'\begin{pmatrix}a'\\b'\\c'\end{pmatrix}$.

On dit que le système $\begin{cases} x = x_0 + \lambda a + \mu a' \\ y = y_0 + \lambda b + \mu b' \\ z = z_0 + \lambda c + \mu c' \end{cases}$ $((\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2)$ est une représentation paramétrique de $(\mathcal{P})$.

Remarques

- *Dans cette représentation paramétrique, λ et μ sont les coordonnées de M dans le repère $(A, \vec{u}, \vec{u}')$ de $(\mathcal{P})$.*
- *Le choix de A, $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ n'étant pas unique, un plan admet plusieurs représentations paramétriques.*

Exemples

- Soit $A\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ et $C\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$. Le plan (ABC) admet pour repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$, avec $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$.

Le système $\begin{cases} x = \lambda + \mu \\ y = 1 - \lambda \\ z = 1 - \mu \end{cases}$ $((\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2)$ est donc une représentation paramétrique de ce plan.

• Le système $\begin{cases} x = 1 + 2\lambda - \mu \\ y = -3 + 2\lambda \\ z = 2 + 3\mu \end{cases}$ $((\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2)$ est une représentation paramétrique du plan passant par le point $E\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$, de vecteurs directeurs $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$.

2.3. Lien avec les équations cartésiennes

Nous venons d'apprendre à déterminer des équations cartésiennes et des représentations paramétriques de droites et de plans de $\mathscr{E}$.

Notre objectif est maintenant de passer d'un mode de détermination à l'autre.

Déterminer une représentation paramétrique d'un plan défini par une équation cartésienne

Soit $(\mathscr{P})$ le plan d'équation cartésienne $2x + y + 2z - 4 = 0$.
Déterminer une représentation paramétrique de $(\mathscr{P})$.

Solution

1^re^ méthode

On pose : $x = \lambda$ et $z = \mu$. On en déduit que : $y = 4 - 2\lambda - 2\mu$.

Donc une représentation paramétrique de $(\mathscr{P})$ est : $\begin{cases} x = \lambda \\ y = 4 - 2\lambda - 2\mu \\ z = \mu \end{cases}$ $((\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2)$.

2^e^ méthode

On détermine un repère $(\Omega, \vec{u}, \vec{v})$ de $(\mathscr{P})$; Ω est un point de $(\mathscr{P})$, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs non colinéaires et orthogonaux au vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, normal à $(\mathscr{P})$.

On a, par exemple : $\Omega\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{u}\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Donc une représentation paramétrique de $(\mathscr{P})$ est : $\begin{cases} x = 1 + \mu \\ y = 2\lambda - 4\mu \\ z = 1 - \lambda + \mu \end{cases}$ $((\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2)$.

3^e^ méthode

On détermine trois points non alignés de $(\mathscr{P})$, par exemple les points d'intersection A, B, C de $(\mathscr{P})$ avec les axes du repère.

Le point A de la droite de repère $(O, \vec{i})$ est tel que :
$y = z = 0$; d'où : $x = 2$.

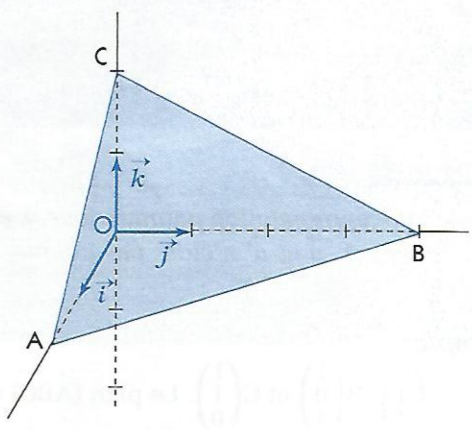
De même, on aura pour B : $x = z = 0$, $y = 4$
pour C : $x = y = 0$, $z = 2$.

On a donc : $A\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$, $C\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.

$(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ est un repère du plan $(\mathscr{P})$.

Une représentation paramétrique de $(\mathscr{P})$ est donc :

$\begin{cases} x = 2 - 2\lambda - 2\mu \\ y = 4\lambda \\ z = 2\mu \end{cases}$ $((\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2)$.



Déterminer une équation cartésienne d'un plan défini par une représentation paramétrique

Soit $(\mathcal{P})$ le plan de représentation paramétrique $\begin{cases} x = 3 + \lambda - 3\mu \\ y = 2\lambda + 3\mu \\ z = 2 - 2\lambda \end{cases}$ $((\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2)$.

Déterminer une équation cartésienne de $(\mathcal{P})$.

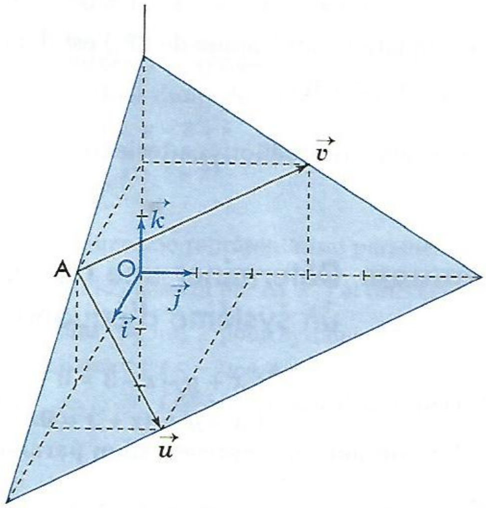
Solution

1re méthode

Pour trouver une équation cartésienne du plan $(\mathcal{P})$, il suffit d'éliminer λ et μ dans le système d'équations paramétriques.

On obtient : $x + y = 3 + 3\lambda$ et $z = 2 - 2\lambda$.

On en déduit que : $2(x + y) + 3z = 2(3 + 3\lambda) + 3(2 - 2\lambda) = 12$.
Donc, une équation cartésienne de $(\mathcal{P})$ est :
$2x + 2y + 3z - 12 = 0$.



2e méthode

On détermine un point et un vecteur normal de $(\mathcal{P})$.
$A\begin{pmatrix}3\\0\\2\end{pmatrix} \in (\mathcal{P})$; $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-3\\3\\0\end{pmatrix}$ sont des vecteurs directeurs de $(\mathcal{P})$.

$\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à $(\mathcal{P})$ s'il est orthogonal à $\vec{u}$ et à $\vec{v}$.

On a : $\begin{cases} \vec{u}.\vec{n} = 0 \\ \vec{v}.\vec{n} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + 2b - 2c = 0 \\ -3a + 3b = 0 \end{cases}$.

Ce système admet une infinité de solutions, par exemple :
$a = 2$, $b = 2$ et $c = 3$.

On en déduit que : $2(x - 3) + 2y + 3(z - 2) = 0$.

Donc, une équation cartésienne de $(\mathcal{P})$ est :
$2x + 2y + 3z - 12 = 0$.

Déterminer un système d'équations cartésiennes d'une droite définie par une représentation paramétrique

Soit $(\mathcal{D})$ la droite de représentation paramétrique $\begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = -1 + 2\lambda \end{cases}$ $(\lambda \in \mathbb{R})$.

Déterminer un système d'équations cartésiennes de $(\mathcal{D})$.

Solution

1re méthode

De la représentation paramétrique de $(\mathcal{D})$, on déduit, par élimination du paramètre λ, trois relations entre les coordonnées x, y et z d'un point M de $(\mathcal{D})$:

$2y + z - 1 = 0$; $2x - z - 3 = 0$; $x + y - 2 = 0$.

Ces relations sont des équations cartésiennes de trois plans sécants deux à deux suivant $(\mathcal{D})$.
On en déduit trois systèmes d'équations cartésiennes de la droite $(\mathcal{D})$:

$\begin{cases} 2y + z - 1 = 0 \\ 2x - z - 3 = 0 \end{cases}$; $\begin{cases} 2y + z - 1 = 0 \\ x + y - 2 = 0 \end{cases}$; $\begin{cases} 2x - z - 3 = 0 \\ x + y - 2 = 0 \end{cases}$.

2^e méthode

$(\mathscr{D})$ a pour repère $(A, \vec{u})$, où $A\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$.

$\vec{n}_1\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}$ et $\vec{n}_2\begin{pmatrix}4\\2\\-1\end{pmatrix}$ sont deux vecteurs non colinéaires et orthogonaux à $\vec{u}$.

Soit $(\mathscr{P}_1)$ et $(\mathscr{P}_2)$ les plans passant par le point A, de vecteurs normaux respectifs $\vec{n}_1$ et $\vec{n}_2$.

Pour tout point $M\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ de $\mathscr{E}$, on a :

$$\begin{aligned} M \in (\mathscr{P}_1) &\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\vec{n}_1 = 0 \\ &\Leftrightarrow (x-1)-(y-1)-(z+1) = 0 \\ &\Leftrightarrow x - y - z - 1 = 0 \end{aligned}$$

Une équation cartésienne de $(\mathscr{P}_1)$ est donc :
$x - y - z - 1 = 0$;

$$\begin{aligned} M \in (\mathscr{P}_2) &\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\vec{n}_2 = 0 \\ &\Leftrightarrow 4(x-1)+2(y-1)-(z+1) = 0 \\ &\Leftrightarrow 4x + 2y - z - 7 = 0 \end{aligned}$$

Une équation cartésienne de $(\mathscr{P}_2)$ est donc :
$4x + 2y - z - 7 = 0$.

Un système d'équations cartésiennes de $(\mathscr{D})$ est donc : $\begin{cases} x - y - z - 1 = 0 \\ 4x + 2y - z - 7 = 0 \end{cases}$.

Déterminer une représentation paramétrique d'une droite définie par un système d'équations cartésiennes

1. Démontrer que $\begin{cases} x + y - z - 3 = 0 \\ x - y + 3z + 3 = 0 \end{cases}$ est un système d'équations cartésiennes d'une droite $(\mathscr{D})$.

2. Déterminer une représentation paramétrique de $(\mathscr{D})$.

Solution

1. Le système est composé des équations de deux plans, de vecteurs normaux : $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$ et $\vec{n}'\begin{pmatrix}1\\-1\\3\end{pmatrix}$.

Ces vecteurs ne sont pas colinéaires, donc les plans sont sécants suivant une droite $(\mathscr{D})$.

2. *1^re méthode*

On pose : $z = \lambda$ et on exprime x et y en fonction de λ.

On obtient : $\begin{cases} x + y = \lambda + 3 \\ x - y = -3\lambda - 3 \\ z = \lambda \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\lambda \\ y = 3 + 2\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$

Une représentation paramétrique de $(\mathscr{D})$ est donc : $\begin{cases} x = -\lambda \\ y = 3 + 2\lambda \\ z = \lambda \end{cases} \quad (\lambda \in \mathbb{R})$.

2^e méthode

On détermine deux points de $(\mathscr{D})$, par exemple : $A\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix}2\\-1\\-2\end{pmatrix}$.

On en déduit que $(A, \overrightarrow{AB})$, où $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\-2\\-1\end{pmatrix}$, est un repère de $(\mathscr{D})$.

Une représentation paramétrique de $(\mathscr{D})$ est donc : $\begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 1 - 2\lambda \\ z = -1 - \lambda \end{cases} \quad (\lambda \in \mathbb{R})$.

Exercices

2.a **1.** Déterminer une représentation paramétrique de chaque axe du repère.
2. Déterminer une représentation paramétrique des plans de repères $(O, \vec{i}, \vec{j})$, $(O, \vec{j}, \vec{k})$ et $(O, \vec{k}, \vec{i})$.

2.b Soit le point $A\begin{pmatrix}1\\-3\\2\end{pmatrix}$ et les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ tels que $\vec{u} = \vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{v} = \vec{i} - \vec{j}$ et $\vec{w} = \vec{j} + 2\vec{k}$.
1. Déterminer une représentation paramétrique de la droite de repère $(A, \vec{u})$.
2. Déterminer une représentation paramétrique du plan de repère $(A, \vec{v}, \vec{w})$.

2.c **1.** Déterminer un repère de la droite de représentation paramétrique
$$\begin{cases} x = 3 + 2\lambda \\ y = 2 + \lambda \\ z = -1 - \lambda \end{cases} \quad (\lambda \in \mathbb{R}).$$
2. Déterminer un repère du plan de représentation paramétrique
$$\begin{cases} x = 2 - \lambda + 3\mu \\ y = 1 + \lambda - 2\mu \\ z = -2\lambda - \mu \end{cases} \quad ((\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.)$$

2.d **1.** Déterminer une représentation paramétrique des plans d'équations cartésiennes :
a) $x - z + 2 = 0$; *b)* $2x - y + 3z + 1 = 0$;
c) $x - 3y + 2z - 2 = 0$; *d)* $2x + 3y + 8 = 0$.
2. Déterminer une représentation paramétrique de la droite qui a pour système d'équations cartésiennes :
$$\begin{cases} x - y - 2z + 3 = 0 \\ x + y + z - 2 = 0. \end{cases}$$

2.e Déterminer un système d'équations cartésiennes de la droite de représentation paramétrique : $\begin{cases} x = -2 + \lambda \\ y = 1 + 3\lambda \\ z = 3 - 2\lambda \end{cases}$ $(\lambda \in \mathbb{R})$.

2.f Déterminer une représentation paramétrique du plan $(\mathscr{P})$ passant par $A\begin{pmatrix}-1\\2\\-1\end{pmatrix}$ et orthogonal à la droite $(\mathscr{D})$ qui a pour système d'équations cartésiennes : $\begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ 2x - y + z - 1 = 0. \end{cases}$

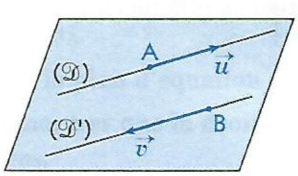
3 Positions relatives de droites et plans

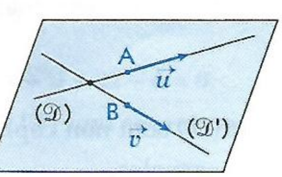
Sur des exemples, nous allons étudier des cas de parallélisme, d'orthogonalité, ou des intersections de droites et de plans, ceux-ci étant déterminés tantôt par des équations cartésiennes, tantôt par des représentations paramétriques. L'objectif de la leçon n'est pas de dresser un catalogue exhaustif de toutes les situations qui peuvent se présenter, mais d'acquérir une maîtrise de l'outil analytique en géométrie de l'espace.

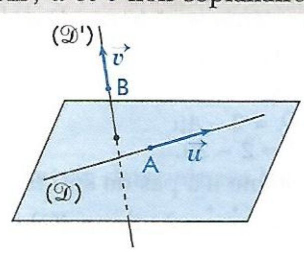
3.1. Positions relatives de deux droites

Introduction

Soit $(\mathscr{D})$ et $(\mathscr{D}')$ deux droites de $\mathscr{E}$, de repères respectifs $(A, \vec{u})$ et $(B, \vec{v})$.

<table>
<tr><td rowspan="2">$\vec{u}$ et $\vec{v}$ colinéaires</td><td colspan="2">$\vec{u}$ et $\vec{v}$ non colinéaires</td></tr>
<tr><td>$\overrightarrow{AB}$, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ coplanaires</td><td>$\overrightarrow{AB}$, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non coplanaires</td></tr>
<tr><td>

$(\mathscr{D})$ et $(\mathscr{D}')$ sont parallèles
[$(\mathscr{D}) = (\mathscr{D}')$ lorsque, de plus, $\overrightarrow{AB}$ colinéaire à $\vec{u}$ et $\vec{v}$]</td><td>

$(\mathscr{D})$ et $(\mathscr{D}')$ sont sécantes</td><td>

$(\mathscr{D})$ et $(\mathscr{D}')$ sont non coplanaires</td></tr>
</table>

Remarque

Si $\vec{u}.\vec{v} = 0$ alors $(\mathscr{D})$ et $(\mathscr{D}')$ sont orthogonales.

Exemples

Soit $(\mathscr{D})$, $(\mathscr{D}')$, $(\mathscr{D}'')$ les droites de représentations paramétriques respectives :

$\begin{cases} x = 3 \\ y = 1 + \lambda \\ z = -2\lambda \end{cases} (\lambda \in \mathbb{R})$, $\begin{cases} x = 2\mu \\ y = 2 - 4\mu \\ z = 2 - 2\mu \end{cases} (\mu \in \mathbb{R})$, $\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 - 2\nu \\ z = -1 + 4\nu \end{cases} (\nu \in \mathbb{R})$.

1°) Démontrer que les droites $(\mathscr{D})$ et $(\mathscr{D}'')$ sont strictement parallèles.

2°) Démontrer que les droites $(\mathscr{D}')$ et $(\mathscr{D}'')$ sont sécantes en un point A dont on calculera les coordonnées.

3°) *a)* Démontrer que les droites $(\mathscr{D})$ et $(\mathscr{D}')$ sont non coplanaires.

***b)* Démontrer que les droites $(\mathscr{D})$ et $(\mathscr{D}')$ sont orthogonales.**

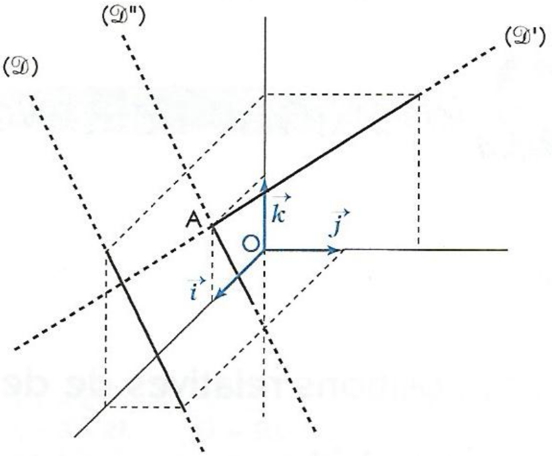
Solution

1°) Les droites $(\mathscr{D})$ et $(\mathscr{D}'')$ ont pour vecteurs directeurs respectifs $\vec{u}\begin{pmatrix}0\\1\\-2\end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix}0\\-2\\4\end{pmatrix}$.

Ces vecteurs sont colinéaires, donc $(\mathscr{D})$ et $(\mathscr{D}'')$ sont parallèles.

De plus, tout point de $(\mathscr{D})$ a pour abscisse 3 et tout point de $(\mathscr{D}'')$ a pour abscisse 1.

Donc, les droites $(\mathscr{D})$ et $(\mathscr{D}'')$ sont strictement parallèles.



2°) Les droites $(\mathscr{D}')$ et $(\mathscr{D}'')$ ont pour vecteurs directeurs respectifs $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\-4\\-2\end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix}0\\-2\\4\end{pmatrix}$.

Ces vecteurs sont non colinéaires, donc $(\mathscr{D}')$ et $(\mathscr{D}'')$ sont sécantes ou non coplanaires.

$(\mathscr{D}')$ et $(\mathscr{D}'')$ ont un point commun si et seulement s'il existe deux nombres réels μ et ν tels que :

$\begin{cases} 2\mu = 1 \\ 2 - 4\mu = 1 - 2\nu \\ 2 - 2\mu = -1 + 4\nu. \end{cases}$

Ce système admet un couple solution : $\left(\frac{1}{2} ; \frac{1}{2}\right)$; donc $(\mathscr{D}')$ et $(\mathscr{D}'')$ sont sécantes en $A\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$.

3. *a)* Les droites $(\mathscr{D})$ et $(\mathscr{D}')$ ont pour vecteurs directeurs respectifs $\vec{u}\begin{pmatrix}0\\1\\-2\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\-4\\-2\end{pmatrix}$.

Ces vecteurs sont non colinéaires, donc $(\mathscr{D})$ et $(\mathscr{D}')$ sont sécantes ou non coplanaires.

$(\mathscr{D})$ et $(\mathscr{D}')$ ont un point commun si et seulement s'il existe deux nombres réels λ et μ tels que :

$\begin{cases} 3 = 2\mu \\ 1 + \lambda = 2 - 4\mu \\ -2\lambda = 2 - 2\mu. \end{cases}$

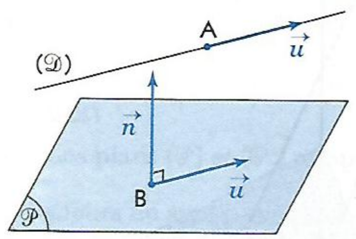
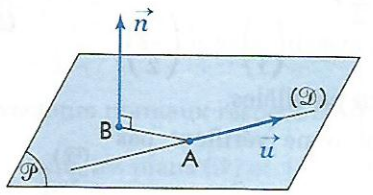
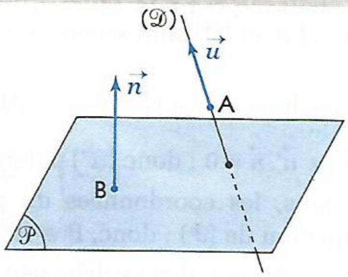
Ce système n'a pas de solution, donc $(\mathscr{D})$ et $(\mathscr{D}')$ sont non coplanaires.

b) On a : $\vec{u}.\vec{v} = 0$; donc, $(\mathscr{D})$ et $(\mathscr{D}')$ sont orthogonales.

3.2. Positions relatives d'une droite et d'un plan

Introduction

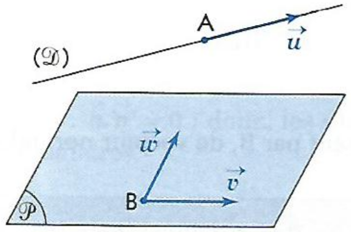
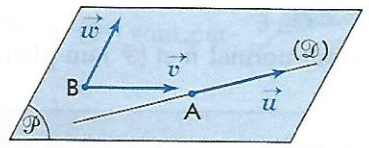
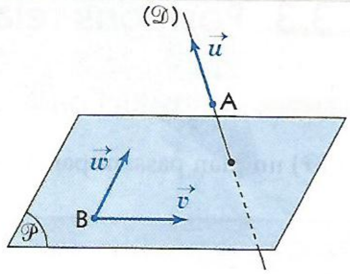
Soit ($\mathscr{D}$) une droite de repère $(A,\vec{u})$ et ($\mathscr{P}$) un plan passant par B, de vecteur normal $\vec{n}$.

$\vec{u}.\vec{n} = 0$		$\vec{u}.\vec{n} \neq 0$
$\overrightarrow{AB}.\vec{n} \neq 0$	$\overrightarrow{AB}.\vec{n} = 0$	
		
($\mathscr{D}$) et ($\mathscr{P}$) sont strictement parallèles	($\mathscr{D}$) est incluse dans ($\mathscr{P}$)	($\mathscr{D}$) et ($\mathscr{P}$) sont sécants

Remarque

Si $\vec{u}$ et $\vec{n}$ sont colinéaires, alors ($\mathscr{D}$) et ($\mathscr{P}$) sont orthogonaux.

Soit ($\mathscr{D}$) une droite de repère $(A,\vec{u})$ et ($\mathscr{P}$) un plan de repère $(B,\vec{v},\vec{w})$.

$\vec{u},\vec{v}$ et $\vec{w}$ coplanaires		$\vec{u},\vec{v}$ et $\vec{w}$ non coplanaires
$\overrightarrow{AB}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ non coplanaires	$\overrightarrow{AB}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ coplanaires	
		
($\mathscr{D}$) et ($\mathscr{P}$) sont strictement parallèles	($\mathscr{D}$) est incluse dans ($\mathscr{P}$)	($\mathscr{D}$) et ($\mathscr{P}$) sont sécants

Remarque

Si $\vec{u}.\vec{v} = \vec{u}.\vec{w} = 0$, alors ($\mathscr{D}$) et ($\mathscr{P}$) sont orthogonaux.

Exemples

Soit ($\mathscr{D}$) et ($\mathscr{D}$') les droites de représentations paramétriques respectives :

$$\begin{cases} x = 2 - 2\lambda \\ y = 2\lambda \\ z = 2 - 3\lambda \end{cases} \quad (\lambda \in \mathbb{R}) \quad \text{et} \quad \begin{cases} x = 1 - \mu \\ y = 2 - 2\mu \\ z = 1 + 2\mu \end{cases} \quad (\mu \in \mathbb{R}).$$

Soit ($\mathscr{P}$) le plan d'équation cartésienne $2x + y + 2z - 4 = 0$.

1°) Démontrer que la droite ($\mathscr{D}$) et le plan ($\mathscr{P}$) sont sécants en un point A dont on déterminera les coordonnées.

2°) Démontrer que la droite ($\mathscr{D}$') et le plan ($\mathscr{P}$) sont strictement parallèles.

3°) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (Δ) passant par A et orthogonale à ($\mathscr{P}$).

Solution

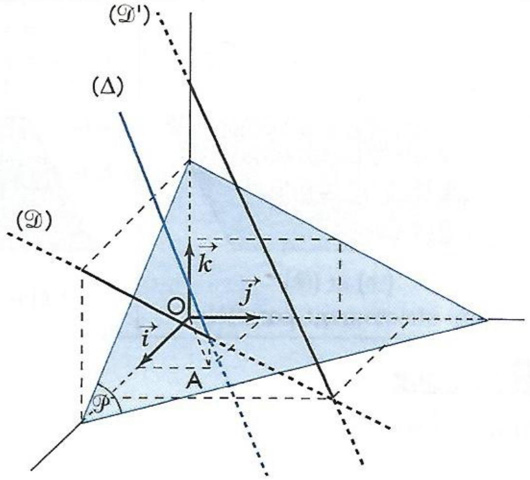
1°) $\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\2\\-3\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite $(\mathcal{D})$ et $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan $(\mathcal{P})$.

On a : $\vec{u}.\vec{n} \neq 0$; donc, $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{P})$ sont sécants.

Les coordonnées de leur point d'intersection vérifient les équations de $(\mathcal{D})$ et de $(\mathcal{P})$.

On a : $2(2-2\lambda) + (2\lambda) + 2(2-3\lambda) - 4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = \frac{1}{2}$.

Donc, $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{P})$ sont sécants en $A\begin{pmatrix}1\\1\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}$.



2°) La droite $(\mathcal{D}')$ a pour repère $(B, \vec{u}')$, avec $B\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{u}'\begin{pmatrix}-1\\-2\\2\end{pmatrix}$.

On a : $\vec{u}'.\vec{n} = 0$; donc $(\mathcal{D}')$ et $(\mathcal{P})$ sont parallèles.

De plus, les coordonnées du point B ne vérifient pas l'équation de $(\mathcal{P})$; donc, $B \notin (\mathcal{P})$.

$(\mathcal{D}')$ et $(\mathcal{P})$ sont donc strictement parallèles.

3°) $(A, \vec{n})$ est un repère de la droite (Δ).

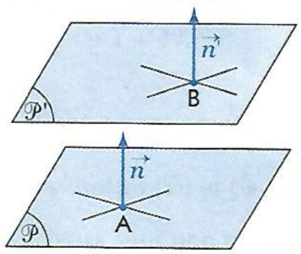
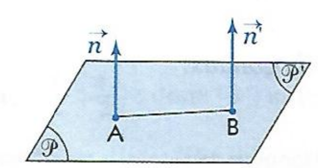
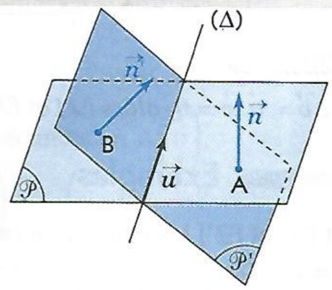
Cette droite a donc pour représentation paramétrique

$$\begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = \frac{1}{2} + 2\lambda \end{cases} \quad (\lambda \in \mathbb{R}).$$

3.3. Positions relatives de deux plans

Introduction

Soit $(\mathcal{P})$ un plan passant par A, de vecteur normal $\vec{n}$ et $(\mathcal{P}')$ un plan passant par B, de vecteur normal $\vec{n}'$.

$\vec{n}$ et $\vec{n}'$ colinéaires		$\vec{n}$ et $\vec{n}'$ non colinéaires
$\vec{AB}.\vec{n} \neq 0$ (et $\vec{AB}.\vec{n}' \neq 0$)	$\vec{AB}.\vec{n} = \vec{AB}.\vec{n}' = 0$	
		
$(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{P}')$ sont strictement parallèles	$(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{P}')$ sont confondus	$(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{P}')$ sont sécants

Remarque

Si $\vec{n}.\vec{n}' = 0$ alors $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{P}')$ sont orthogonaux.

Exemples

Soit $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{P}')$ les plans d'équations cartésiennes respectives $2x + y + 2z - 6 = 0$ et $2x - 2y - z + 3 = 0$.

1°) *a)* Démontrer que les plans $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{P}')$ sont sécants et déterminer une représentation paramétrique de leur droite d'intersection (Δ).

***b)* Démontrer que les plans $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{P}')$ sont perpendiculaires.**

2°) Déterminer une représentation paramétrique du plan (Π) passant par le point $A\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}$ et parallèle au plan $(\mathcal{P})$.

Solution

1°) *a)* Les plans $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{P}')$ ont pour vecteurs normaux respectifs $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$ et $\vec{n}'\begin{pmatrix}2\\-2\\-1\end{pmatrix}$.

Ces vecteurs ne sont pas colinéaires ; donc, les plans $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{P}')$ sont sécants.

Leur droite d'intersection (Δ) a pour système d'équations cartésiennes $\begin{cases} 2x + y + 2z - 6 = 0 \\ 2x - 2y - z + 3 = 0. \end{cases}$

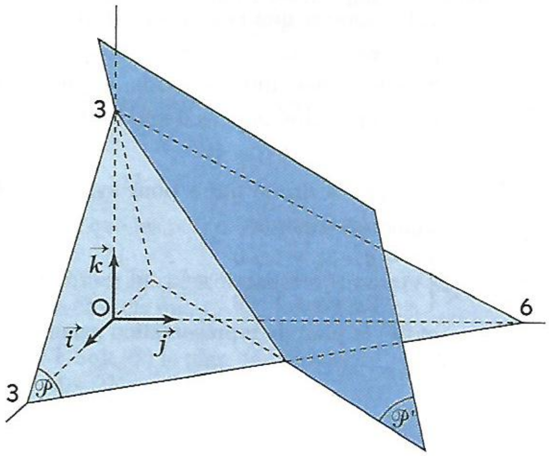
Pour déterminer une représentation paramétrique de cette droite, on peut poser $z = \lambda$ dans le système précédent et exprimer x et y en fonction de λ.

On obtient : $\begin{cases} 2x + y = 6 - 2\lambda \\ 2x - 2y = -3 + \lambda \\ z = \lambda \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\lambda \\ y = 3 - \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$.

Donc, une représentation paramétrique de (Δ) est :

$$\begin{cases} x = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\lambda \\ y = 3 - \lambda \\ z = \lambda \end{cases} \quad (\lambda \in \mathbb{R}).$$

b) On a : $\vec{n}.\vec{n}' = 0$; donc, les plans $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{P}')$ sont perpendiculaires.



2°) Pour être parallèles, les plans (Π) et $(\mathcal{P})$ doivent avoir le même vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$.

On en déduit une équation cartésienne du plan (Π) :

$2x + (y - 2) + 2(z - 1) = 0$;

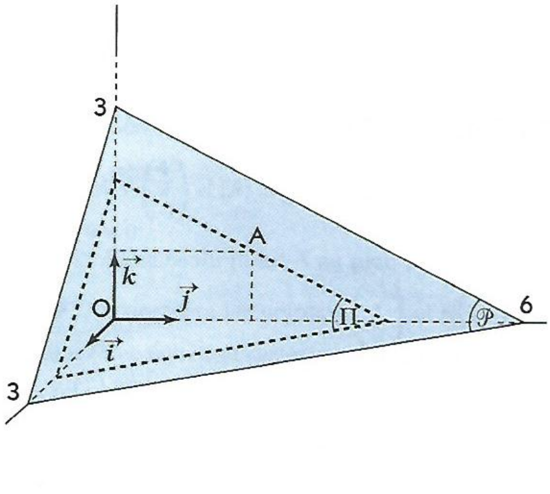
c'est-à-dire : $2x + y + 2z - 4 = 0$.

Pour déterminer une représentation paramétrique de (Π), on peut poser : $x = \lambda$ et $z = \mu$.

On en déduit que : $y = 4 - 2\lambda - 2\mu$.

Donc, une représentation paramétrique de (Π) est :

$$\begin{cases} x = \lambda \\ y = 4 - 2\lambda - 2\mu \\ z = \mu \end{cases} \quad ((\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2)$$



Exercices

3.a Soit $(\mathscr{D})$ la droite de représentation paramétrique $\begin{cases} x = 1 - 2\lambda \\ y = 2 + \lambda \\ z = -1 - 3\lambda \end{cases} \quad (\lambda \in \mathbb{R})$

et $(\mathscr{D}')$ la droite qui a pour système d'équations cartésiennes

$$\begin{cases} x + y - z - 6 = 0 \\ 2x - y - z + 1 = 0. \end{cases}$$

Démontrer que ces droites sont sécantes en un point dont on déterminera les coordonnées.

3.b Soit $(\mathscr{D})$ et $(\mathscr{D}')$ les droites qui ont pour systèmes d'équations cartésiennes respectifs :

$$\begin{cases} x + y - z + 3 = 0 \\ x + z \quad = 1 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} 2x + y = 2 \\ y - 2z = 0. \end{cases}$$

1. Démontrer que ces droites sont strictement parallèles.

2. Déterminer une équation cartésienne du plan déterminé par ces deux droites.

3.c Soit $(\mathscr{D})$ la droite qui a pour système d'équations cartésiennes

$$\begin{cases} x + y - 2z + 1 = 0 \\ x - 2y + z + 1 = 0 \end{cases}$$

et $(\mathscr{P})$ le plan de représentation paramétrique

$$\begin{cases} x = \lambda + \mu \\ y = 2 - \lambda \\ z = -1 - 2\mu \end{cases} \quad ((\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2).$$

Démontrer que $(\mathscr{D})$ et $(\mathscr{P})$ sont sécants en un point dont on déterminera les coordonnées.

3.d Soit $(\mathscr{P})$ et $(\mathscr{P}')$ les plans de représentations paramétriques respectives :

$$\begin{cases} x = -1 + 2\lambda + \mu \\ y = 1 + \lambda - \mu \\ z = 1 - 2\lambda + \mu \end{cases} \quad ((\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2).$$

$$\text{et} \begin{cases} x = 2 - \lambda - 2\mu \\ y = 1 + \lambda - \mu \\ z = 2\lambda - \mu \end{cases} \quad ((\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2)..$$

1. Déterminer une équation cartésienne de chacun des plans $(\mathscr{P})$ et $(\mathscr{P}')$ et démontrer qu'ils sont sécants.

2. Déterminer une représentation paramétrique de leur droite d'intersection.

3.e Soit $(\mathscr{P})$ le plan d'équation cartésienne $x - 2y + 2z = 6$.

1. Déterminer une représentation paramétrique de la droite d'intersection (Δ) de ce plan avec le plan de repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

2. Déterminer une équation cartésienne du plan $(\mathscr{P}')$ perpendiculaire à $(\mathscr{P})$ et contenant (Δ).

Exercices

Dans les exercices qui suivent, sauf indication contraire, l'espace $\mathcal{E}$ est muni du repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

APPRENTISSAGE

Équations cartésiennes de droites et plans

1 On considère les points $A\begin{pmatrix}5\\2\\3\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}4\\-2\\1\end{pmatrix}$ et $C\begin{pmatrix}2\\4\\-5\end{pmatrix}$.
Déterminer une équation cartésienne du plan passant par le point C et orthogonal à la droite (AB).

2 On considère les points $A\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$ et $C\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$.
1. Déterminer une équation cartésienne du plan (ABC).
2. Déterminer une équation cartésienne du plan passant par O et parallèle au plan (ABC).

3 **1.** Déterminer le nombre réel k pour que le plan $(\mathcal{P}_k)$ d'équation cartésienne $2x - y + z - k = 0$ passe par le point A de coordonnées $(-2 ; 0 ; -4)$.
2. Démontrer que les plans $(\mathcal{P}_k)$ sont parallèles entre eux.

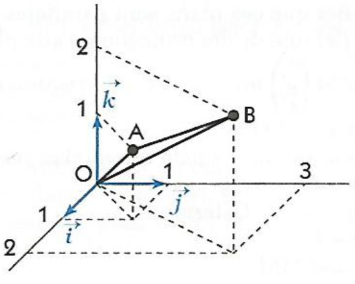
4 Soit $(\mathcal{P})$ le plan d'équation cartésienne $2x - y + 3z - 6 = 0$.
1. Déterminer trois points de $(\mathcal{P})$ dont les coordonnées $(x ; y ; z)$ sont des nombres entiers relatifs.
2. Placer ces points sur une figure.

5 Déterminer un système d'équations cartésiennes de la droite passant par les points $A\begin{pmatrix}-2\\-1\\2\end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix}$.

6 On considère les points $A\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix}2\\3\\2\end{pmatrix}$.
1. Déterminer un système d'équations cartésiennes de la droite (AB).
2. Déterminer les coordonnées des points d'intersection de (AB) avec chacun des plans de repères $(O, \vec{i}, \vec{j})$, $(O, \vec{j}, \vec{k})$, $(O, \vec{k}, \vec{i})$.

Représentations paramétriques

7



1. Déterminer une représentation paramétrique de chacune des droites (OA), (OB) et (AB).
2. Déterminer une représentation paramétrique du plan (OAB).

8 Déterminer l'ensemble des points $M\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ tels que :

a) $\begin{cases} x = -3 + 2\lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = -\lambda \end{cases}$ $(\lambda \in \mathbb{R})$;

b) $\begin{cases} x = -3 + 2\lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = -\lambda \end{cases}$ $(\lambda \in \mathbb{R}^+)$.

9 Soit $(\mathcal{P})$ le plan de représentation paramétrique
$\begin{cases} x = -1 - 3\lambda \\ y = -1 - 2\lambda + 2\mu \\ z = 1 + 6\mu \end{cases}$ $((\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2)$.
1. Déterminer les coordonnées des points d'intersection de $(\mathcal{P})$ avec les axes du repère.
2. Déterminer une équation cartésienne de $(\mathcal{P})$.

10 Soit $(\mathcal{D})$ la droite de représentation paramétrique
$\begin{cases} x = -5 + 3\lambda \\ y = 5 - 4\lambda \\ z = -15 + 12\lambda \end{cases}$ $(\lambda \in \mathbb{R})$.
1. Vérifier que les points $A\begin{pmatrix}-2\\1\\-3\end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix}1\\-3\\9\end{pmatrix}$ appartiennent à la droite $(\mathcal{D})$.
2. Déterminer les coordonnées des points M_1 et M_2 de la droite $(\mathcal{D})$ tels que : $AM_1 = AM_2 = 13$.

11 Soit $(\mathcal{P})$ le plan de représentation paramétrique
$\begin{cases} x = -1 + 2\lambda - \mu \\ y = -\lambda + \mu \\ z = 2 + \lambda - 2\mu \end{cases}$ $((\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2)$.
1. Démontrer que les points $A\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}2\\-2\\5\end{pmatrix}$ et $C\begin{pmatrix}-3\\1\\1\end{pmatrix}$ appartiennent au plan $(\mathcal{P})$.
2. Déterminer λ et μ pour que le point de paramètres λ et μ soit le centre gravité du triangle ABC.

Distance d'un point à un plan

12 Soit $A\begin{pmatrix}4\\2\\-1\end{pmatrix}$ et $(\mathcal{P})$ le plan d'équation cartésienne $3x - 4y + 6 = 0$.
Calculer la distance du point A au plan $(\mathcal{P})$.

13 On considère les points $A\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix}-2\\0\\3\end{pmatrix}$.
Déterminer une équation cartésienne de l'ensemble des points $M\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ tels que : MA = MB.
Quelle est la nature de cet ensemble ?

14 Soit $(\mathcal{P})$ le plan d'équation $x + 4y - z - 4 = 0$ et $(\mathcal{D})$ la droite qui a pour système d'équations
$\begin{cases} x - y = 0 \\ y - z = 0. \end{cases}$
Déterminer un point M de $(\mathcal{D})$ tel que : $d(M, \mathcal{P}) = 2$.

15 On considère les points $A\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ et $C\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$.
Calculer la distance du point O au plan (ABC).

Positions relatives de droites et de plans

16 Soit $(\mathcal{P}_1)$ et $(\mathcal{P}_2)$ les plans d'équations respectives $x+y+z=0$ et $x+y-2z+1=0$.
Démontrer que $(\mathcal{P}_1)$ et $(\mathcal{P}_2)$ sont sécants et déterminer une représentation paramétrique de leur droite d'intersection.

17 Soit $(\mathcal{D}_1)$ et $(\mathcal{D}_2)$ les droites de représentations paramétriques respectives
$\begin{cases} x=-\lambda \\ y=\lambda \\ z=\lambda \end{cases}$ $(\lambda \in \mathbb{R})$ et $\begin{cases} x=2-2\mu \\ y=1-\mu \\ z=-\mu \end{cases}$ $(\mu \in \mathbb{R})$.
1. Démontrer que $(\mathcal{D}_1)$ et $(\mathcal{D}_2)$ sont non coplanaires.
2. Déterminer une équation cartésienne du plan $(\mathcal{P})$ contenant $(\mathcal{D}_2)$ et parallèle à $(\mathcal{D}_1)$.

18 Soit $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{D}')$ les droites de représentations paramétriques respectives :
$\begin{cases} x=2-3\lambda \\ y=5-\lambda \\ z=-3+2\lambda \end{cases}$ $(\lambda \in \mathbb{R})$ et $\begin{cases} x=2+\mu \\ y=1+\mu \\ z=-1-\mu \end{cases}$ $(\mu \in \mathbb{R})$.
Démontrer que $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{D}')$ sont sécantes et déterminer une équation cartésienne du plan déterminé par ces deux droites.

19 Soit $(\mathcal{P})$ le plan d'équation cartésienne $x+y+z=0$.
1. Déterminer une équation cartésienne du plan passant par le point $A\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$ et parallèle à $(\mathcal{P})$.
2. *a)* Déterminer une représentation paramétrique de la droite $(\mathcal{D})$ passant par A et orthogonale à $(\mathcal{P})$.
b) Déterminer le point d'intersection de $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{P})$.

20 Soit $(\mathcal{P})$ le plan d'équation $x-y+3=0$ et $(\mathcal{D})$ la droite qui a pour système d'équations
$\begin{cases} x-z-2=0 \\ 2x+y-3z+1=0. \end{cases}$
1. Démontrer que $(\mathcal{D})$ est parallèle à $(\mathcal{P})$.
2. Déterminer une équation cartésienne du plan (Π) contenant $(\mathcal{D})$ et perpendiculaire à $(\mathcal{P})$.
3. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (Δ), intersection de $(\mathcal{P})$ et (Π).

21 Soit $(\mathcal{D})$ la droite de représentation paramétrique
$\begin{cases} x=-1+\lambda \\ y=3-2\lambda \\ z=-1+3\lambda \end{cases}$ $(\lambda \in \mathbb{R})$ et $(\mathcal{D}')$ la droite qui a pour système d'équations $\begin{cases} x-y+2z-3=0 \\ x+y-z=0. \end{cases}$
1. Démontrer que ces droites ne sont pas coplanaires.
2. Déterminer une équation cartésienne du plan $(\mathcal{P})$ contenant $(\mathcal{D})$ et parallèle à $(\mathcal{D}')$.

22 Soit $(\mathcal{D})$ la droite qui a pour système d'équations : $\begin{cases} x-y+z=0 \\ x+y-z=0. \end{cases}$
1. Déterminer un système d'équations cartésiennes de la droite $(\mathcal{D}')$ passant par le point $A\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix}$ et parallèle à $(\mathcal{D})$.
2. Déterminer une équation cartésienne du plan $(\mathcal{P})$ contenant $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{D}')$.

23 Soit $(\mathcal{P})$ le plan de repère $(A, \vec{u}, \vec{v})$, où $A\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}$, $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-3\\2\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\-1\\3\end{pmatrix}$ et $(\mathcal{D})$ la droite qui a pour système d'équations cartésiennes : $\begin{cases} x-2y+z+1=0 \\ x+y+z=0. \end{cases}$
Déterminer l'intersection de $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{D})$.

24 Soit $(\mathcal{D})$ la droite admettant pour système d'équations cartésiennes : $\begin{cases} x+y+z=3 \\ x+2y+3z=6. \end{cases}$
1. Déterminer une équation cartésienne du plan $(\mathcal{P})$ passant par le point $A\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ et orthogonal à $(\mathcal{D})$.
2. Déterminer l'intersection de $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{D})$.

25 Déterminer un système d'équations cartésiennes de la droite $(\mathcal{D})$ passant par le point $A\begin{pmatrix}-1\\-1\\2\end{pmatrix}$ et orthogonale au plan $(\mathcal{P})$ d'équation $2x-y-2z+1=0$.

26 Soit $(\mathcal{P})$ le plan d'équation $2x+3y+z+1=0$ et $(\mathcal{P}')$ le plan de représentation paramétrique
$\begin{cases} x=1+2\lambda+\mu \\ y=2-\lambda+\mu \\ z=-\lambda-5\mu \end{cases}$ $((\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2)$.
Démontrer que ces plans sont parallèles.

27 Soit $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{D}')$ les droites qui ont respectivement pour systèmes d'équations cartésiennes
$\begin{cases} 4x-y-z+2=0 \\ y-z-2=0 \end{cases}$ et $\begin{cases} x+y+1=0 \\ x-2z=0. \end{cases}$
Démontrer que ces droites sont orthogonales. Sont-elles sécantes ? Si oui, déterminer leur point d'intersection.

APPROFONDISSEMENT

28 $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{P}')$ sont les plans d'équations respectives $x+y-z=0$ et $2x-y+z-3=0$.
1. Démontrer que ces plans sont perpendiculaires.
2. Calculer les distances respectives du point $A\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$ à $(\mathcal{P})$ et à $(\mathcal{P}')$.
3. En déduire la distance du point A à la droite (Δ), intersection des plans $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{P}')$.

29 Soit $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{P}')$ les plans d'équations respectives $2x-4y+2z+3=0$ et $x-2y+z-3=0$.
1. Justifier que ces plans sont parallèles.
2. Soit $(\mathcal{D})$ une droite orthogonale aux plans $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{P}')$, $M\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ et $M'\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}$ les points d'intersection de $(\mathcal{D})$ respectivement avec $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{P}')$.
a) Démontrer qu'il existe un nombre réel k tel que :
$\begin{cases} x'=x+k \\ y'=y-2k \\ z'=z+k. \end{cases}$ Déterminer k.
b) Calculer MM'.

30 Soit a et b deux nombres réels.

1. On considère le système :

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ ax + y + z + b = 0. \end{cases}$$

Pour quelles valeurs de a ce système est-il un système d'équations cartésiennes d'une droite ?

2. Cette condition étant réalisée, on désigne par $(\mathscr{D})$ une telle droite et on considère la droite $(\mathscr{D}')$ de représentation paramétrique : $\begin{cases} x = 1 \\ y = -3 + b\lambda \\ z = -1 + \lambda. \end{cases} \quad (\lambda \in \mathbb{R}).$

Pour quelles valeurs de a et b les droites $(\mathscr{D})$ et $(\mathscr{D}')$ sont-elles parallèles ? sécantes ? non coplanaires ?

31 Projection orthogonale d'un angle droit

$(\mathscr{P})$ est le plan d'équation $x + y + z = 0$.

Etant donné un point M, on désigne par M' le projeté orthogonal de M sur $(\mathscr{P})$.

1. Soit $M\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $M'\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$.

Démontrer que : $\begin{cases} x' = \frac{1}{3}(2x - y - z) \\ y' = \frac{1}{3}(-x + 2y - z) \\ z' = \frac{1}{3}(-x - y + 2z). \end{cases}$

2. On donne les points $A\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$ et $C\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$.

On désigne par A', B' et C' les projetés orthogonaux respectifs de A, B et C sur $(\mathscr{P})$.

a) Démontrer que la droite (AB) est parallèle au plan $(\mathscr{P})$.

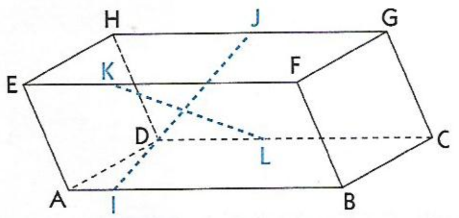
b) Calculer les coordonnées des points A', B' et C' et démontrer que $\widehat{BAC}$ et $\widehat{B'A'C'}$ sont des angles droits.

32 ABCDEF est un prisme à base triangulaire. On désigne par G le centre de gravité du triangle ABC et par G' celui du triangle DEF.

1. Déterminer une représentation paramétrique des droites (AG') et (DG) dans le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$.

2. Démontrer que les droites (AG') et (DG) sont sécantes en un point dont on déterminera les coordonnées dans le repère précédent.

33 Soit ABCDEFGH un pavé.



On désigne par I, J, K et L les points définis par :

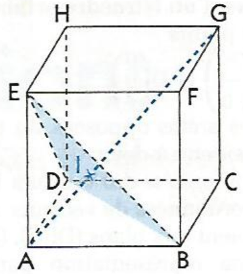
$\overrightarrow{AI} = \frac{1}{6}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{HJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{HG}$, $\overrightarrow{EK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{DL} = \alpha\,\overrightarrow{DC}$ $(\alpha \in \mathbb{R})$.

1. Déterminer une représentation paramétrique des droites (IJ) et (KL) dans le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.

2. Déterminer le nombre réel α pour que les droites (IJ) et (KL) soient sécantes.

34 Soit ABCDEFGH un cube.

1. Déterminer, dans le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$, une équation cartésienne du plan (BDE) et une représentation paramétrique de la droite (AG).



2. Démontrer que la droite (AG) est orthogonale au plan (BDE) et le coupe en un point I tel que : $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AG}$.

35 Soit ABCDEFGH un pavé.

On pose : $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{v}$, $\overrightarrow{AE} = \vec{w}$.

1. Déterminer, en fonction de $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ un couple de vecteurs directeurs des plans (GDB) et (CFA), ainsi qu'un vecteur directeur de l'intersection de ces deux plans.

2. Déterminer une représentation paramétrique de (GDB) et (CFA), ainsi que de la droite d'intersection de ces deux plans.

36 Faisceaux de plans

$(\mathscr{P})$ est le plan d'équation cartésienne :

$x - 2y - 2z + 3 = 0$.

Soit A et B deux points distincts de $\mathscr{E}$.

1. On suppose que la droite (AB) et le plan $(\mathscr{P})$ ne sont pas orthogonaux.

Démontrer qu'il existe un unique plan (Π) passant par A, B et perpendiculaire à $(\mathscr{P})$.

Application

Soit $A\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$. Déterminer une équation cartésienne de (Π).

2. On suppose que la droite (AB) et le plan $(\mathscr{P})$ sont orthogonaux.

a) Démontrer que tout plan (Π) passant par A et B est perpendiculaire à $(\mathscr{P})$.

b) Soit $A\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$. Démontrer que tout plan (Π) a une équation cartésienne de la forme :

$\lambda(2x + y - 12) + \mu(2x + z - 10) = 0$, où $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

L'ensemble des plans (Π), contenant une même droite (AB), est appelé faisceau de plans.

37 Perpendiculaire commune à deux droites

$(\mathscr{D})$ et $(\mathscr{D}')$ sont les droites de repères respectifs $(A, \vec{u})$ et $(B, \vec{v})$ avec : $A\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\vec{u}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer une représentation paramétrique de $(\mathscr{D})$ et $(\mathscr{D}')$ et démontrer que ces droites sont non coplanaires.

2. Démontrer qu'il existe un unique point I de $(\mathscr{D})$ et un unique point J de $(\mathscr{D}')$ tels que la droite (IJ) soit perpendiculaire aux droites $(\mathscr{D})$ et $(\mathscr{D}')$.

Déterminer les coordonnées de ces deux points.

3. Soit M et N deux points respectifs de $(\mathscr{D})$ et $(\mathscr{D}')$.

On pose : $\overrightarrow{IM} = \alpha\,\vec{u}$ et $\overrightarrow{JN} = \beta\,\vec{v}$.

a) Calculer MN^2 en fonction de α et β.

b) En déduire que la valeur minimale de la distance MN est obtenue lorsque M est en I et N en J.

IJ est appelée distance entre les droites $(\mathscr{D})$ et $(\mathscr{D}')$.

38 **Hauteurs d'un tétraèdre orthocentrique**
On considère les points
$A\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}0\\5\\0\end{pmatrix}$, $C\begin{pmatrix}-3\\-1\\0\end{pmatrix}$ et $D\begin{pmatrix}0\\0\\4\end{pmatrix}$.
1. Vérifier que les arêtes opposées du tétraèdre ABCD sont orthogonales deux à deux.
2. Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{DB}$ et $\overrightarrow{DC}$; en déduire les coordonnées de vecteurs $\overrightarrow{n_1}$, $\overrightarrow{n_2}$ et $\overrightarrow{n_3}$ normaux respectivement aux plans (DBC), (DCA) et (DAB).
3. Déterminer une représentation paramétrique des hauteurs (AA'), (BB') et (CC') du tétraèdre ABCD.
4. Démontrer que les droites (AA'), (BB') et (CC') passent par un point H situé appartenant à la droite de repère $(O, \vec{k})$.
En déduire que les hauteurs de ce tétraèdre sont concourantes.

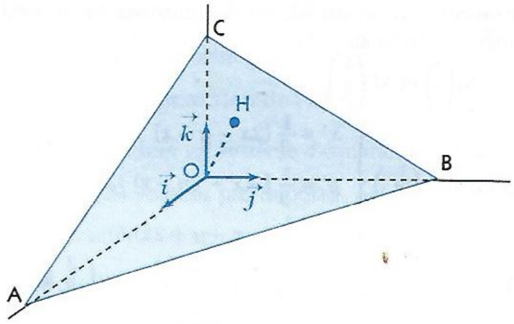
39 **Sphère circonscrite à un tétraèdre**
Soit ABCD un tétraèdre tel que :
$A\begin{pmatrix}0\\0\\4\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}2\\-2\\0\end{pmatrix}$, $C\begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix}$ et $D\begin{pmatrix}-4\\0\\0\end{pmatrix}$.
1. Soit I, J, K les milieux respectifs des arêtes [AB], [AC], [AD] et $(\mathcal{P}_1)$, $(\mathcal{P}_2)$, $(\mathcal{P}_3)$ les plans médiateurs respectifs de ces arêtes.
a) Calculer les coordonnées des points I, J, K, puis des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ et déterminer une équation cartésienne de $(\mathcal{P}_1)$, $(\mathcal{P}_2)$ et $(\mathcal{P}_3)$.
b) Démontrer que ces plans ont un seul point commun Ω, dont on calculera les coordonnées.
2. Démontrer que Ω est le centre d'une sphère dont on calculera le rayon et qui passe par les sommets A, B, C et D du tétraèdre.

40 On considère le point $A\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}$ et le vecteur $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$.
Déterminer une équation cartésienne de l'ensemble des points M vérifiant : $\overrightarrow{AM}.\vec{v} = 3$.
Quelle est la nature de cet ensemble ?

41 On considère les points $A\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix}$.
Déterminer une équation cartésienne de l'ensemble des points M vérifiant : $MA^2 - MB^2 = 6$.
Quelle est la nature de cet ensemble ?

42 On considère les points $A\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix}$ et $C\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$.
Déterminer une équation cartésienne de l'ensemble des points M vérifiant : $MA^2 + MB^2 - 2\,MC^2 = 12$.
Quelle est la nature de cet ensemble ?

43 Soit OABC un tétraèdre dont les arêtes issues de O sont deux à deux perpendiculaires (on dit que OABC est un tétraèdre trirectangle en O).

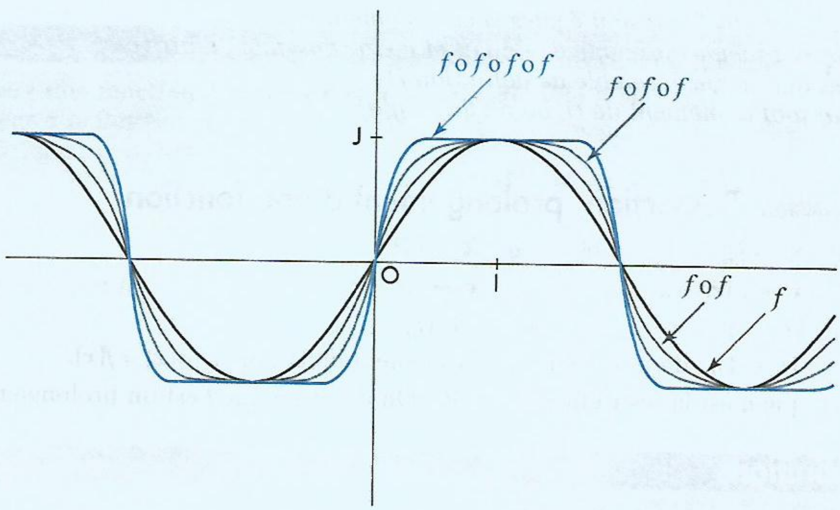


L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
Les points A, B et C ont pour coordonnées respectives $(a\ ;\ 0\ ;\ 0)$, $(0\ ;\ b\ ;\ 0)$ et $(0\ ;\ 0\ ;\ c)$, avec $abc \neq 0$.
1. Démontrer que le plan (ABC) admet pour équation : $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} + \dfrac{z}{c} = 1$.
2. Soit H le projeté orthogonal de O sur le plan (ABC). Déterminer les coordonnées de H et vérifier que H est l'orthocentre du triangle ABC.
3. Démontrer que : $\dfrac{1}{OH^2} = \dfrac{1}{OA^2} + \dfrac{1}{OB^2} + \dfrac{1}{OC^2}$.

9 Fonctions

Introduction

L'objectif de ce chapitre est de préciser les notions de fonction et d'application que nous retrouverons en analyse, en géométrie et dans les problèmes de dénombrement. Sans en faire une étude exhaustive, nous définirons les injections, les surjections et la composition des fonctions. Nous terminerons en étudiant quelques aspects particuliers des fonctions numériques d'une variable réelle.



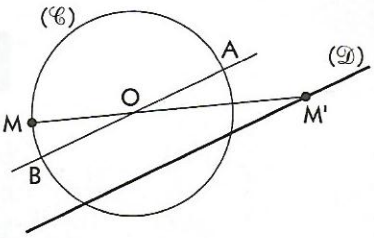
SOMMAIRE

1 Généralités

1.1. Fonctions et applications

Introduction

$(\mathscr{C})$ est un cercle de centre O et $(\mathscr{D})$ une droite ne passant pas par O.
À tout point M de $(\mathscr{C})$, on associe, lorsqu'il existe, le point M' de $(\mathscr{D})$ tel que O, M et M' sont alignés.
On désigne par A et B les points d'intersection de $(\mathscr{C})$ avec la droite parallèle à $(\mathscr{D})$ passant par O.



- Soit $f : \begin{array}{l}(\mathscr{C}) \to (\mathscr{D}) \\ M \mapsto M'\end{array}$; f est une fonction dont l'ensemble de définition n'est pas l'ensemble de départ.

- Soit $g : \begin{array}{l}(\mathscr{C})\backslash\{A, B\} \to (\mathscr{D}) \\ M \mapsto M'\end{array}$; g est une fonction dont l'ensemble de définition est l'ensemble de départ.

On dit que g est une application de $(\mathscr{C})\backslash\{A, B\}$ vers $(\mathscr{D})$.

Remarque

Deux fonctions f et g sont égales si et seulement si :
– elles ont même ensemble de départ et même ensemble d'arrivée ;
– elles ont même ensemble de définition D ;
– pour tout a, élément de D, on a : $f(a) = g(a)$.

Restriction, prolongement d'une fonction

Soit $f : \begin{array}{l}\mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \sqrt{|x| - 2}\end{array}$ et $g : \begin{array}{l}\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}. \\ x \mapsto \sqrt{x - 2}\end{array}$

On a : $D_f =]-\infty ; -2] \cup [2 ; +\infty[$ et $D_g = [2 ; +\infty[$;
Donc : $D_g \subset D_f$; de plus, pour tout x élément de D_g, on a : $g(x) = f(x)$.
On dit que g est la restriction de f à $\mathbb{R}_+$. On dit aussi que f est un prolongement de g à $\mathbb{R}$.

Définitions

Soit f une fonction de E vers F et E' une partie de E.
- **On appelle restriction de f à E' la fonction $g : \begin{array}{l}E' \to F \\ a \mapsto f(a).\end{array}$**
- **f est alors appelé prolongement de g à E.**

Remarque

Si l'ensemble de définition de f est D_f, alors celui de g est $D_f \cap E'$.

1.2. Composition des fonctions

Définition

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

$x \mapsto x^2 - 1$ $\qquad$ $x \mapsto \dfrac{2x+1}{x}$.

On se propose de calculer $g[f(x)]$.

Ce calcul est possible si et seulement si $f(x)$ appartient à D_g.

On a : $f(x) \in D_g \iff x^2 - 1 \neq 0$

$\iff x \in \mathbb{R}\setminus\{-1 ; 1\}$.

Pour tout x élément de $\mathbb{R}\setminus\{-1 ; 1\}$, on a : $g[f(x)] = \dfrac{2(x^2-1)+1}{x^2-1} = \dfrac{2x^2-1}{x^2-1}$.

On définit ainsi une fonction, appelée composée de f par g et notée $g \circ f$, telle que : $g \circ f(x) = \dfrac{2x^2-1}{x^2-1}$.

Son ensemble de définition est : $D_{g \circ f} = \mathbb{R}\setminus\{-1 ; 1\}$.

On peut illustrer la composition des deux fonctions par le schéma ci-contre.

$$\begin{tikzcd}
\boxed{x} \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "g \circ f"'] & \boxed{f(x)} \arrow[r, "g"] & \boxed{g[f(x)]}
\end{tikzcd}$$

On détermine de manière analogue $f \circ g$.

$D_{f \circ g} = \mathbb{R}^*$ et, pour tout x élément de $\mathbb{R}^*$, on a : $f \circ g(x) = f[g(x)] = \left(\dfrac{2x^2-1}{x}\right)^2 - 1 = \dfrac{4x^2+3x+1}{x}$.

On remarque que : $g \circ f \neq f \circ g$.

Définition

Soit E, F, G trois ensembles, f une fonction de E vers F et g une fonction de F vers G.
On appelle composée de f par g la fonction de E vers G, notée $g \circ f$ et définie, pour tout élément a de E tel que $a \in D_f$ et $f(a) \in D_g$, par : $g \circ f(a) = g[f(a)]$.

Remarque

Soit f une fonction de E vers F, Id_E et Id_F les applications identiques[1] respectives des ensembles E et F.
On a : $f \circ Id_E = Id_F \circ f = f$.

Propriété

Soit f, g et h les fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définies par : $f(x) = \sin x$, $g(x) = x^2 + 2$ et $h(x) = -3x - 1$.

- Déterminer la fonction $g \circ f$, puis la fonction $h \circ (g \circ f)$.
- Déterminer la fonction $h \circ g$, puis la fonction $(h \circ g) \circ f$.
- En déduire que : $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

Plus généralement, nous admettons la propriété suivante.

Propriété

Soit f une fonction de E vers F, g une fonction de F vers G et h une fonction de G vers H.
On a : $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

On dit que la composition des fonctions est associative.
On note : $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f = h \circ g \circ f$.

[1]. *L'application identique (ou identité) d'un ensemble E est l'application de E vers E qui, à tout élément de E associe ce même élément. On la note généralement Id_E.*

Exercices

1.a Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :
$f(x) = |x - 2|$.
Parmi les fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ suivantes, déterminer celles qui sont égales à f.

a) $g(x) = \dfrac{|6x - 12|}{6}$; *b)* $h(x) = \dfrac{(x-2)^2}{|x-2|}$;

c) $k(x) = \left|\dfrac{x^2 + x - 6}{x + 3}\right|$; *d)* $l(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 4}$.

1.b Parmi les fonctions suivantes, préciser celles qui sont des applications.

a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto |x|$; *b)* $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x - \sqrt{x}$;

c) $h : [2 ; +\infty] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sqrt{x - 2}$; *d)* $k : [0 ; +\infty[\to \mathbb{R}$, $x \mapsto \dfrac{1}{x - 1}$.

1.c Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :
$f(x) = |x - 1| + 2|3 - x|$.
Déterminer l'application affine g qui a même restriction que f sur l'intervalle $[1 ; 3]$.

1.d On considère les fonctions f et g de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définies par : $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}}$ et $g(x) = \sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$.
1. Déterminer les ensembles de définition des fonctions f et g.
2. Déterminer la plus grande partie E de $\mathbb{R}$ sur laquelle f et g ont la même restriction.

1.e Soit a et b deux nombres réels. On considère les fonctions f et g de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définies par :
$f(x) = -2x + 3$ et $g(x) = ax + b$.
1. Pour tout nombre réel x, calculer $g \circ f(x)$ et $f \circ g(x)$.
2. Déterminer un couple (a, b) de nombres réels tel que : $g \circ f = f \circ g$.

1.f Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.
$(x, y) \mapsto (-x + 3y, 3x - 4y)$
Pour tout couple (x, y) de nombres réels, déterminer $f \circ f(x, y)$.

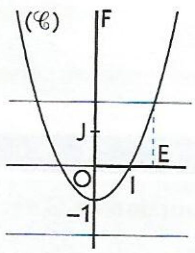
2 Applications particulières

2.1. Injections, surjections

Introduction

Soit $(\mathscr{C})$ la courbe d'équation : $y = x^2 - 1$.
Dans chacun des cas suivants, f est l'application de E vers F définie par : $f(x) = x^2 - 1$.
On se propose de déterminer, graphiquement et selon les ensembles E et F, le nombre d'antécédents par f d'un nombre réel m.

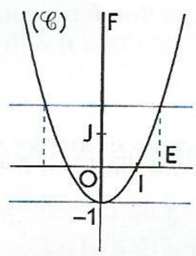
1^er^ cas : $E = \mathbb{R}_+$, $F = \mathbb{R}$



- Si $m < -1$, m n'a pas d'antécédent dans $\mathbb{R}_+$.
- Si $m \geq -1$, m a un antécédent dans $\mathbb{R}_+$.

Tout élément de $\mathbb{R}$ a donc au plus un antécédent dans $\mathbb{R}_+$.
On dit que l'application f est une injection.

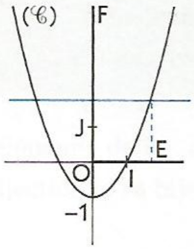
2^e^ cas : $E = \mathbb{R}$, $F = [-1 ; +\infty[$



- Si $m = -1$, m a un antécédent dans $\mathbb{R}$.
- Si $m \geq -1$, m a deux antécédents dans $\mathbb{R}$.

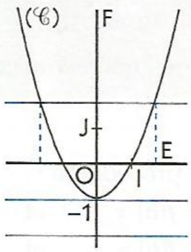
Tout élément de $[-1 ; +\infty[$ a donc au moins un antécédent dans $\mathbb{R}$.
On dit que l'application f est une surjection.

3^e *cas* : $E = \mathbb{R}_+$, $F = [-1\ ;+\infty[$



Tout élément de $[-1\ ;+\infty[$ a un antécédent unique dans $\mathbb{R}_+$.
On dit que l'application f est une bijection.

4^e *cas* : $E = \mathbb{R}$, $F = \mathbb{R}$



• Si $m < -1$, m n'a pas d'antécédent dans $\mathbb{R}$, donc f n'est pas une surjection.
• Si $m = -1$, m a un antécédent dans $\mathbb{R}$.
• Si $m \geq -1$, m a deux antécédents dans $\mathbb{R}$, donc f n'est pas une injection.

Définitions et propriété

Définitions

Soit f une application de E vers F.
- **On dit que f est une injection (ou f est injective) si tout élément de F a au plus un antécédent par f.**
- **On dit que f est une surjection (ou f est surjective) si tout élément de F a au moins un antécédent par f.**

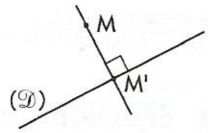
Remarque

Une application f de E vers F est surjective si et seulement si $f(E) = F$.

Exemples

• Soit l'application $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$.
$$x \mapsto \frac{1}{x}$$
0 n'a pas d'antécédent par f ; donc f n'est pas surjective.
Pour tout nombre réel y non nul, $\frac{1}{y}$ est l'unique antécédent de y par f.
Donc tout élément y de $\mathbb{R}$ a au plus un antécédent par f ; f est injective.

• La projection orthogonale est une application surjective mais non injective.



Propriété

Soit f une application de E vers F.
f est injective si et seulement si, pour tous éléments a et b de E, on a : $f(a) = f(b) \Rightarrow a = b$.

Cette propriété est une conséquence directe de la définition.

Remarque

Cette propriété peut également s'énoncer de la façon suivante.
« f est injective si et seulement si, pour tous éléments a et b de E, on a : $a \neq b \Rightarrow f(a) \neq f(b)$. »

L

Soit (p) et (q) deux propositions.

Les implications $[(p) \Rightarrow (q)]$ et $[(\text{non } q) \Rightarrow (\text{non } p)]$ sont équivalentes.

On dit que l'une est la contraposée de l'autre.

Exemple

Dans la propriété précédente :

(p) : « $f(a) = f(b)$ » et (q) : « $a = b$ » ;

(non p) : « $f(a) \neq f(b)$ » et (non q) : « $a \neq b$ ».

Donc : $[f(a) = f(b) \Rightarrow a = b]$ équivaut à $[a \neq b \Rightarrow f(a) \neq f(b)]$.

2.2. Bijections

Propriété

Soit O un point du plan, k un nombre réel non nul et h l'homothétie de centre O et de rapport k.
Tout point M' du plan a pour antécédent le point M tel que : $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{k}\overrightarrow{OM'}$; h est donc surjective.

De plus, pour tous points M et N, d'images respectives M' et N', on a :

$$\begin{aligned} M \neq N \quad &\Rightarrow \overrightarrow{MN} \neq \vec{0} \\ &\Rightarrow \overrightarrow{M'N'} \neq \vec{0} \qquad (\text{car } \overrightarrow{M'N'} = k\,\overrightarrow{MN}) \\ &\Rightarrow M' \neq N'. \end{aligned}$$

h est donc injective.

Par ailleurs, on sait que h est une bijection.

Propriété

Soit f une application de E vers F.
f est une bijection (ou est bijective) si et seulement si elle est injective et surjective.

En effet, f est bijective si et seulement si tout élément de F a un unique antécédent par f dans E, c'est-à-dire si et seulement si tout élément de F a au plus et au moins un antécédent par f.

Bijection réciproque d'une bijection

Soit une bijection $f : E \to F$.
$x \mapsto y$

On a : – d'une part, tout élément x de E a une image unique y par f dans F ;
– d'autre part, tout élément y de F a un antécédent unique x par f dans E.

Donc, la correspondance $F \to E$ est une application bijective.
$y \mapsto x$

Cette application, notée f^{-1}, est appelée bijection réciproque de f.

Remarques

- *Pour tout x élément de E et tout y élément de F, on a : $y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$.*
- *Si f^{-1} est la bijection réciproque de f, alors f est la bijection réciproque de f^{-1}.*
- *On a : $f^{-1} \circ f = Id_E$ et $f \circ f^{-1} = Id_F$.*

Exemples

• La translation de vecteur $\vec{u}$ est une bijection du plan dans lui-même ; sa bijection réciproque est la translation de vecteur $-\vec{u}$.

• Soit l'application $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$.
$x \mapsto x^2$

Pour tous x et y éléments de $\mathbb{R}_+$, on a : $y = x^2 \Leftrightarrow x = \sqrt{y}$.

Donc, f est une bijection et sa bijection réciproque est $f^{-1} : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$.
$x \mapsto \sqrt{x}$

Propriété

Soit f une bijection de E vers F et g une application de F vers E.
Si $f \circ g = \mathrm{Id}_F$ ou $g \circ f = \mathrm{Id}_E$, alors g est la bijection réciproque de f.

Démonstration

Soit f^{-1} la bijection réciproque de f.

On a : $f \circ g = \mathrm{Id}_F \Rightarrow f^{-1} \circ (f \circ g) = f^{-1} \circ \mathrm{Id}_F$
$\Rightarrow (f^{-1} \circ f) \circ g = f^{-1}$
$\Rightarrow \mathrm{Id}_E \circ g = f^{-1}$
$\Rightarrow g = f^{-1}$.

On démontre de manière analogue que : $g \circ f = \mathrm{Id}_E \Rightarrow g = f^{-1}$.

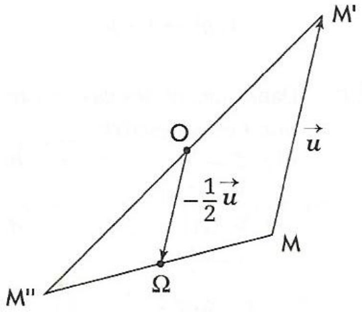
Composée de deux bijections

Soit s la symétrie de centre O et t la translation de vecteur $\vec{u}$.
Pour tout point M du plan, on désigne par M' et M'' les points tels que : M' = t(M) et M'' = s(M').

• Justifier que s et t sont des bijections du plan dans lui-même et déterminer leurs bijections réciproques s^{-1} et t^{-1}.

• Démontrer que le point Ω, tel que $\overrightarrow{O\Omega} = -\frac{1}{2}\vec{u}$, est le milieu du segment [MM''].

• En déduire la nature et les éléments caractéristiques de s o t.
• Justifier que s o t est une bijection ; déterminer $(s \circ t)^{-1}$.
• Démontrer que : $(s \circ t)^{-1} = t^{-1} \circ s^{-1}$.



Propriété

Soit f une bijection de E vers F et g une bijection de F vers G.
$g \circ f$ est une bijection de E vers G et on a : $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

Démonstration

• Démontrons que $g \circ f$ est surjective.
Soit z un élément de G.
g est surjective, donc z a un antécédent y dans F par g.
f est surjective, donc y a un antécédent x dans E par f.
Donc, x est un antécédent de z dans E par $g \circ f$; $g \circ f$ est surjective.

• Démontrons que $g \circ f$ est injective.
Soit x et x' deux éléments de E tels que : $g \circ f(x) = g \circ f(x')$.
g est injective, donc : $g[f(x)] = g[f(x')] \Rightarrow f(x) = f(x')$;
f est injective, donc : $f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$.
Donc : $g \circ f(x) = g \circ f(x') \Rightarrow x = x'$; $g \circ f$ est injective.

On en déduit que $g \circ f$ est une bijection de E vers G.

• Démontrons que $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

On a : $(g \circ f) \circ (f^{-1} \circ g^{-1}) = g \circ (f \circ f^{-1}) \circ g^{-1}$

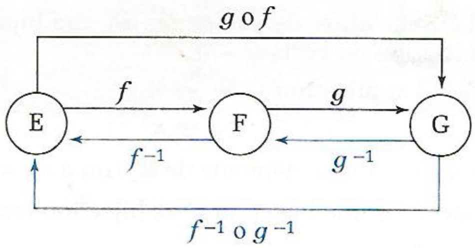
$= g \circ (\mathrm{Id}_F \circ g^{-1})$

$= g \circ g^{-1}$

$= \mathrm{Id}_G$.

D'après la propriété précédente, la bijection réciproque de $g \circ f$ est $f^{-1} \circ g^{-1}$.

Ce résultat est illustré par le schéma ci-contre.



Exercices

2.a Soit f l'application de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{N}$ qui, à tout nombre entier naturel, associe la somme de ses chiffres.
L'application f est-elle injective ? surjective ?

2.b Dans chacun des cas suivants, dire si l'application f est injective.

a) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$; $x \mapsto 2x - 3$

b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $x \mapsto 2x^2 + 1$

c) $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. $(x, y) \mapsto x + y$

2.c Dans chacun des cas suivants, dire si l'application f est surjective.

a) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$; $x \mapsto 2|x|$

b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$; $x \mapsto 2x^2 + 1$

c) $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$; $x \mapsto \dfrac{x+1}{x-1}$

d) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. $x \mapsto \sqrt{x}$

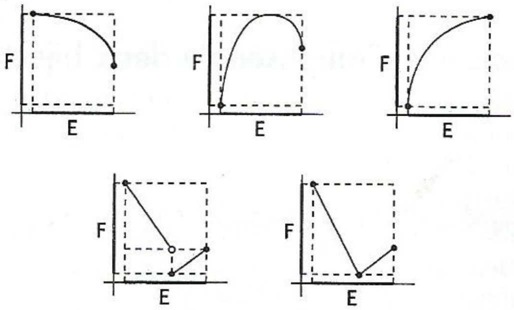
2.d Soit a, b deux nombres réels et f l'application de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, définie par : $f(x) = ax + b$.
Démontrer que f est bijective si et seulement si a est non nul ; déterminer alors sa bijection réciproque.

2.e Dans chacun des cas suivants, démontrer que l'application f est bijective et déterminer sa bijection réciproque.

a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $x \mapsto \dfrac{2}{5}x + 5$

b) $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R} \setminus \{-2\}$. $x \mapsto \dfrac{2x+1}{1-x}$

2.f Soit E et F deux intervalles fermés de $\mathbb{R}$. On donne ci-dessous les représentations graphiques d'applications de E vers F. Dans chaque cas, dire si l'application est injective, surjective ou bijective.



2.g Soit f une fonction numérique d'une variable réelle définie sur un intervalle K.
Démontrer que si f est strictement croissante sur K, alors f est une bijection de K sur $f(\mathrm{K})$.

2.h Donner la représentation graphique d'une fonction :

a) surjective et non injective ;

b) injective et non surjective.

3 Fonctions numériques

3.1. Opérations sur les fonctions

Soit f et g les fonctions définies par : $f(x) = \dfrac{1}{x+2}$ et $g(x) = \dfrac{x-1}{x-3}$.

On a : $D_f = \mathbb{R}\backslash\{-2\}$ et $D_g = \mathbb{R}\backslash\{3\}$.

• On considère la fonction s définie par : $s(x) = f(x) + g(x)$.
Soit x un élément de $\mathbb{R}$; s est définie en x si et seulement si f et g sont définies en x.
Donc : $D_s = \mathbb{R}\backslash\{-2\,;\,3\}$.

Pour tout x élément de D_s, on a : $s(x) = \dfrac{1}{x+2} + \dfrac{x-1}{x-3} = \dfrac{x^2+2x-5}{(x+2)(x-3)}$.

On dit que la fonction s est la somme des fonctions f et g. On note : $s = f + g$.

• On considère la fonction p définie par : $p(x) = f(x) \times g(x)$.
Soit x un élément de $\mathbb{R}$; p est définie en x si et seulement si f et g sont définies en x.
Donc : $D_p = \mathbb{R}\backslash\{-2\,;\,3\}$.

Pour tout x élément de D_p, on a : $p(x) = \dfrac{1}{x+2} \times \dfrac{x-1}{x-3} = \dfrac{x-1}{(x+2)(x-3)}$.

On dit que la fonction p est le produit des fonctions f et g. On note : $p = fg$.

• On considère la fonction q définie par : $q(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$.
Soit x un élément de $\mathbb{R}$; q est définie en x si et seulement si f et g sont définies en x et si, de plus, $g(x) \neq 0$. Donc : $D_q = \mathbb{R}\backslash\{-2\,;\,3\,;\,1\}$.

Pour tout x élément de D_q, on a : $q(x) = \dfrac{\dfrac{1}{x+2}}{\dfrac{x-1}{x-3}} = \dfrac{x-3}{(x-1)(x+2)}$.

On dit que la fonction q est le quotient des fonctions f et g. On note : $q = \dfrac{f}{g}$.

Plus généralement, f et g étant deux fonctions d'ensembles de définition respectifs D_f et D_g, on retiendra les résultats suivants.

	Notation	Ensemble de définition	Formule explicite
Somme	$f+g$	$D_f \cap D_g$	$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$
Produit	fg	$D_f \cap D_g$	$(fg)(x) = f(x) \times g(x)$
Quotient	$\dfrac{f}{g}$	$(D_f \cap D_g)\backslash\{x \in \mathbb{R}, g(x) = 0\}$	$\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$

Remarques

On définit aussi les fonctions suivantes.

– Produit d'une fonction par un nombre réel k : $(kf)(x) = k \times f(x)$, avec $D_{kf} = D_f$.

– Puissance $n^{\text{ième}}$ ($n \in \mathbb{N}^*$) d'une fonction : $(f^n)(x) = [f(x)]^n$, avec $D_{f^n} = D_f$.

– Inverse d'une fonction : $\left(\dfrac{1}{f}\right)(x) = \dfrac{1}{f(x)}$, avec $D_{\frac{1}{f}} = D_f \setminus \{x \in \mathbb{R}, f(x) = 0\}$.

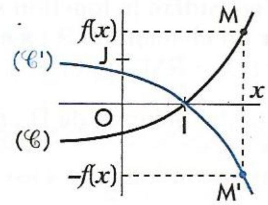
– Racine carrée d'une fonction : $\left(\sqrt{f}\right)(x) = \sqrt{f(x)}$, avec $D_{\sqrt{f}} = D_f \setminus \{x \in \mathbb{R}, f(x) < 0\}$.

3.2. Fonctions associées

Le plan est muni du repère orthogonal (O, I, J).
Soit f une fonction, $(\mathscr{C})$ sa représentation graphique, a et b deux nombres réels.
Les fonctions $x \mapsto -f(x)$, $x \mapsto f(-x)$, $x \mapsto |f(x)|$, $x \mapsto f(x-a)$, $x \mapsto f(x) + b$ sont dites associées à f.
L'objet de ce paragraphe est de montrer comment les courbes représentatives des fonctions associées à f se déduisent de $(\mathscr{C})$.

Fonctions $x \mapsto -f(x)$ et $x \mapsto f(-x)$

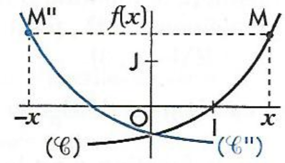
Soit x un élément de D_f et M le point de $(\mathscr{C})$ d'abscisse x.



• Le point $M'\begin{pmatrix} x \\ -f(x) \end{pmatrix}$ est le symétrique de $M\begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix}$ par rapport à (OI).

Donc, la courbe représentative $(\mathscr{C}')$ de la fonction $x \mapsto -f(x)$ se déduit de $(\mathscr{C})$ par la symétrie orthogonale d'axe (OI).

• Le point $M''\begin{pmatrix} -x \\ f(x) \end{pmatrix}$ est le symétrique de $M\begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix}$ par rapport à (OJ).



Or $f(-(-x)) = f(x)$; donc, M'' appartient à la courbe représentative $(\mathscr{C}'')$ de la fonction $x \mapsto f(-x)$.
Donc, $(\mathscr{C}'')$ se déduit de $(\mathscr{C})$ par la symétrie orthogonale d'axe (OJ).

Propriétés

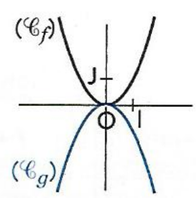
Le plan est muni du repère orthogonal (O, I, J).

• La courbe représentative de la fonction $x \mapsto -f(x)$ se déduit de celle de la fonction f par la symétrie orthogonale d'axe (OI).

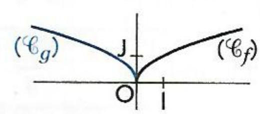
• La courbe représentative de la fonction $x \mapsto f(-x)$ se déduit de celle de la fonction f par la symétrie orthogonale d'axe (OJ).

Exemples

• Soit à tracer la courbe représentative $(\mathscr{C}_g)$ de la fonction g définie par : $g(x) = -x^2$.
On trace la courbe représentative $(\mathscr{C}_f)$ de la fonction f définie par : $f(x) = x^2$.
$(\mathscr{C}_g)$ se déduit de $(\mathscr{C}_f)$ par la symétrie orthogonale d'axe (OI).



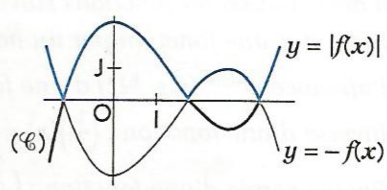
• Soit à tracer la courbe représentative $(\mathscr{C}_g)$ de la fonction g définie par : $g(x) = \sqrt{-x}$.
On trace la courbe représentative $(\mathscr{C}_f)$ de la fonction f définie par : $f(x) = \sqrt{x}$.
$(\mathscr{C}_g)$ se déduit de $(\mathscr{C}_f)$ par la symétrie orthogonale d'axe (OJ).



Fonction $x \mapsto |f(x)|$

Pour tout x élément de D_f, on a : $\begin{cases} |f(x)| = f(x), \text{ si } f(x) \geq 0 \\ |f(x)| = -f(x), \text{ si } f(x) < 0 \end{cases}$.

Donc, la courbe représentative de la fonction $x \mapsto |f(x)|$ est la réunion des parties des courbes d'équations respectives $y = f(x)$ et $y = -f(x)$, situées « au-dessus » de (OI).

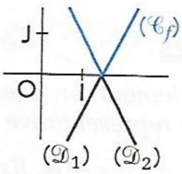


Exemples

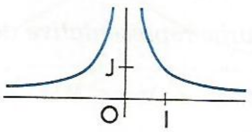
• Soit f la fonction définie par : $f(x) = |2x - 3|$.

On trace les droites $(\mathscr{D}_1)$ et $(\mathscr{D}_2)$ d'équations respectives $y = 2x - 3$ et $y = -2x + 3$.

La représentation graphique $(\mathscr{C}_f)$ de la fonction f est la réunion de deux demi-droites situées « au-dessus » de (OI).



• On construit de manière analogue la courbe représentative de la fonction $x \mapsto \left|\frac{1}{x}\right|$.

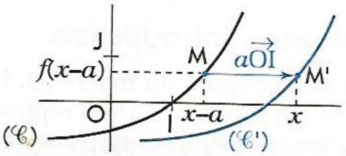


Fonctions $x \mapsto f(x - a)$ et $x \mapsto f(x) + b$

• Soit x un nombre réel, tel que $x - a$ appartient à D_f, et M le point de $(\mathscr{C})$ d'abscisse $x - a$.

Le point $M'\begin{pmatrix} x \\ f(x-a) \end{pmatrix}$ est l'image de $M\begin{pmatrix} x-a \\ f(x-a) \end{pmatrix}$ par la translation de vecteur $a\overrightarrow{OI}$.

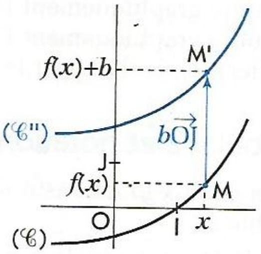
Donc, la courbe représentative $(\mathscr{C}')$ de la fonction $x \mapsto f(x - a)$ se déduit de $(\mathscr{C})$ par la translation de vecteur $a\overrightarrow{OI}$.



• Soit x un élément de D_f et M le point de $(\mathscr{C})$ d'abscisse x.

Le point $M''\begin{pmatrix} x \\ f(x)+b \end{pmatrix}$ est l'image de $M\begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix}$ par la translation de vecteur $b\overrightarrow{OJ}$.

Donc, la courbe représentative $(\mathscr{C}'')$ de la fonction $x \mapsto f(x) + b$ se déduit de $(\mathscr{C})$ par la translation de vecteur $b\overrightarrow{OJ}$.



Les deux résultats précédents justifient la propriété suivante.

Propriété

La courbe représentative de la fonction $x \mapsto f(x - a) + b$ se déduit de celle de la fonction f par la translation de vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.

Exemples

• Soit g la fonction définie par : $g(x) = -\frac{2}{3}x^2 + 4x - 4$.

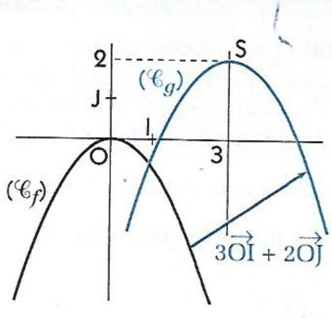
On a : $\forall\, x \in \mathbb{R},\ g(x) = -\frac{2}{3}(x - 3)^2 + 2$. (2)

On considère la fonction f définie par : $f(x) = -\frac{2}{3}x^2$.

On désigne par $(\mathscr{C}_f)$ et $(\mathscr{C}_g)$ les courbes représentatives respectives des fonctions f et g.

$(\mathscr{C}_g)$ se déduit de $(\mathscr{C}_f)$ par la translation de vecteur $3\overrightarrow{OI} + 2\overrightarrow{OJ}$.

$(\mathscr{C}_g)$ est une parabole de sommet $S\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ et d'axe la droite d'équation $x = 3$.



• Soit g la fonction définie par : $g(x) = \frac{2x + 1}{-x + 1}$.

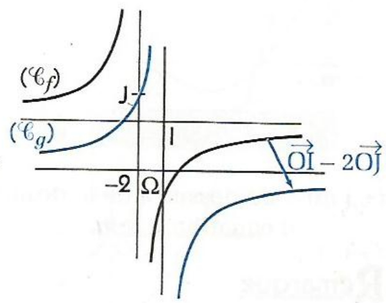
On a : $\forall\, x \in \mathbb{R}\setminus\{1\},\ g(x) = -2 + \frac{-3}{x - 1}$.

On considère la fonction f définie par : $f(x) = -\frac{3}{x}$.

On désigne par $(\mathscr{C}_f)$ et $(\mathscr{C}_g)$ les courbes représentatives respectives des fonctions f et g.

$(\mathscr{C}_g)$ se déduit de $(\mathscr{C}_f)$ par la translation de vecteur $\overrightarrow{OI} - 2\overrightarrow{OJ}$.

$(\mathscr{C}_g)$ est une hyperbole de centre $\Omega\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.



(2). *Le symbole $\forall$ signifie : « quel que soit ». Ainsi, « $\forall\, x \in \mathbb{R},\ g(x) = -\frac{2}{3}(x - 3)^2 + 2$ » signifie : « quel que soit x élément de $\mathbb{R}$, on a : $g(x) = -\frac{2}{3}(x - 3)^2 + 2$ ».*

Remarques

Plus généralement, on a les résultats suivants.

- *La courbe représentative de la fonction* $f : x \mapsto ax^2 + bx + c \ (a \neq 0)$ *est une parabole.*

En effet, on a : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}$.

- *La courbe représentative de la fonction* $f : x \mapsto \frac{ax+b}{cx+d}$ $(c \neq 0$ *et* $ad - bc \neq 0)$ *est une hyperbole.*

En effet, on a : $\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{-\frac{d}{c}\}, f(x) = \frac{a}{c} + \frac{k}{x + \frac{d}{c}}$, *où* $k = \frac{bc - ad}{c^2}$.

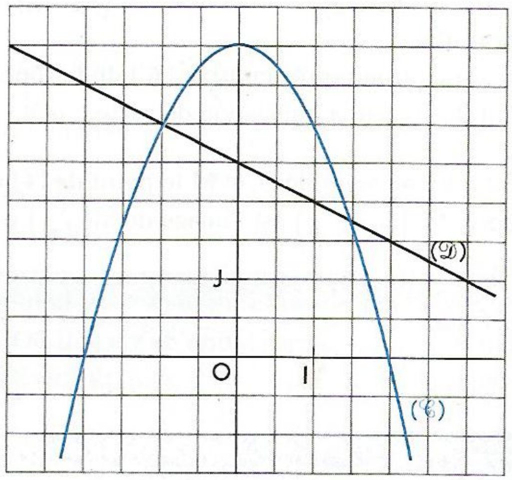
3.3. Comparaison de fonctions

Introduction

Le plan est muni du repère (O, I, J).

($\mathscr{C}$) et ($\mathscr{D}$) sont les courbes représentatives respectives des fonctions f et g définies par : $f(x) = -x^2 + 4$ et $g(x) = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$.

- Résoudre graphiquement l'équation : $f(x) = g(x)$.
- Résoudre graphiquement l'inéquation : $f(x) \leq g(x)$.
- Vérifier les résultats par le calcul.



Vocabulaire et notation

Soit f et g deux fonctions numériques définies sur un ensemble E.

f est inférieure ou égale à g sur E signifie que, pour tout x élément de E, on a : $f(x) \leq g(x)$.

On écrit : $f \leq g$ sur E.

Minoration, majoration

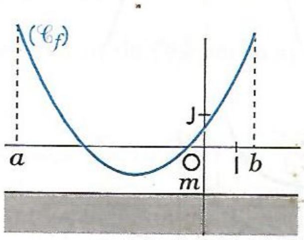
Définitions

Soit f une fonction définie sur un ensemble E.

- **f est minorée sur E s'il existe un nombre réel m tel que, pour tout x élément de E, on a : $f(x) \geq m$.**
- **f est majorée sur E s'il existe un nombre réel M tel que, pour tout x élément de E, on a : $f(x) \leq$ M.**
- **f est bornée sur E si elle est à la fois minorée et majorée sur E.**

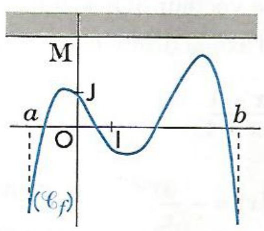
On dit que m *est un minorant de* f *sur E et M un majorant de* f *sur E.*

f est minorée par m sur $[a ; b]$



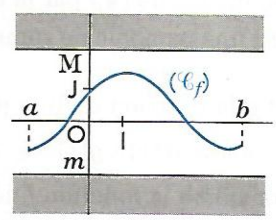
($\mathscr{C}_f$) est « au-dessus » de la droite d'équation $y = m$.

f est majorée par M sur $[a ; b]$



($\mathscr{C}_f$) est « au-dessous » de la droite d'équation $y =$ M.

f est bornée sur $[a ; b]$



($\mathscr{C}_f$) est « entre » les droites d'équations $y = m$ et $y =$ M.

Remarque

Une fonction est positive (respectivement négative) sur un ensemble si elle admet 0 pour minorant (respectivement majorant) sur cet ensemble.

Exemples

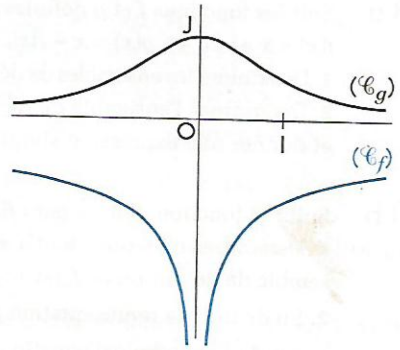
Soit f et g les fonctions définies par : $f(x) = -\frac{1}{\sqrt{|x|}}$ et $g(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

• On a : $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $f(x) \leq 0$; donc, f est négative sur $\mathbb{R}^*$.

Tout nombre réel positif est un majorant de f sur $\mathbb{R}^*$.

f n'admet pas de minorant sur $\mathbb{R}^*$.

En effet, pour tout nombre réel m, on peut trouver des nombres réels x tels que : $f(x) < m$; il suffit pour cela de choisir x dans l'intervalle $]0 ; \frac{1}{m^2}[$ ou dans l'intervalle $]-\frac{1}{m^2} ; 0[$.



• On a : $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) \geq 0$; donc, g est positive sur $\mathbb{R}$.

Tout nombre réel négatif est un minorant de g sur $\mathbb{R}$.

De plus, on a : $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) \leq 1$; donc, g est majorée sur $\mathbb{R}$.

On a : $\forall x \in \mathbb{R}$, $0 \leq g(x) \leq 1$; donc, g est bornée sur $\mathbb{R}$.

3.4. Représentations graphiques de deux bijections réciproques

Soit f la fonction définie par : $f(x) = 2x - 3$.

• Démontrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ et déterminer sa bijection réciproque f^{-1}.

• Tracer $(\mathscr{C}_f)$ et $(\mathscr{C}_{f^{-1}})$, courbes représentatives respectives de f et f^{-1}, dans le plan muni d'un repère orthonormé.

• Démontrer que ces deux courbes sont sécantes en un point de la droite (Δ) d'équation : $y = x$.

• Déterminer les coordonnées du point A de $(\mathscr{C}_f)$ d'abscisse 2 et du point A' de $(\mathscr{C}_{f^{-1}})$ d'abscisse $f(2)$.

• Démontrer que A et A' sont symétriques par rapport à (Δ).

• En déduire que $(\mathscr{C}_f)$ et $(\mathscr{C}_{f^{-1}})$ sont symétriques par rapport à (Δ).

Propriété

Soit f une bijection de E vers F, E et F étant des parties de $\mathbb{R}$.

Dans le plan muni d'un repère orthonormé, les courbes représentatives respectives de f et f^{-1} sont symétriques par rapport à la première bissectrice.

Démonstration

On désigne respectivement par $(\mathscr{C}_f)$ et $(\mathscr{C}_{f^{-1}})$ les courbes représentatives de f et f^{-1}.
Soit a et b deux nombres réels, A et A' les points de coordonnées respectives (a, b) et (b, a).

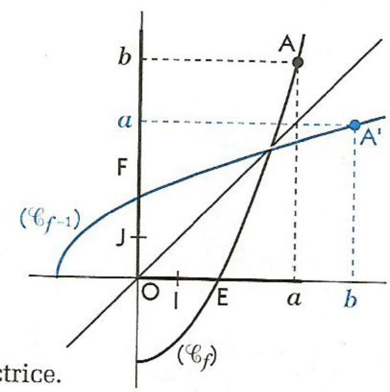
• Démontrons que A et A' sont symétriques par rapport à la droite (Δ) d'équation : $y = x$.
– Si $a = b$, A et A' sont confondus et appartiennent à (Δ).
– Si $a \neq b$, A et A' sont distincts ; soit M un point de coordonnées (x, y).

On a : $MA^2 = MA'^2 \Leftrightarrow (x-a)^2 + (y-b)^2 = (x-b)^2 + (y-a)^2$
$\Leftrightarrow (a-b)(y-x) = 0$
$\Leftrightarrow y = x$.

La médiatrice du segment [AA'] est donc la droite (Δ).
Dans tous les cas, A et A' sont symétriques par rapport à (Δ).

• Démontrons que $(\mathscr{C}_f)$ et $(\mathscr{C}_{f^{-1}})$ sont symétriques par rapport à (Δ).

$$\text{On a : } A \in (\mathscr{C}_f) \Leftrightarrow \begin{cases} a \in E \\ b = f(a) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b \in F \\ a = f^{-1}(b) \end{cases} \Leftrightarrow A' \in (\mathscr{C}_{f^{-1}}).$$



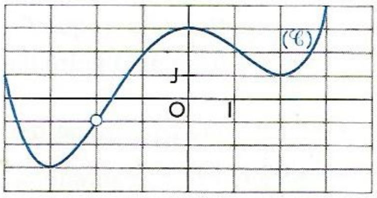
Donc, $(\mathscr{C}_f)$ et $(\mathscr{C}_{f^{-1}})$ sont symétriques par rapport à la première bissectrice.

Exercices

3.a Soit les fonctions f et g définies par :
$f(x) = x + \sqrt{x}$ et $g(x) = x - \sqrt{|x|}$.
1. Déterminer les ensembles de définition de f et g.
2. Déterminer l'ensemble de définition de $f + g$ et donner une expression simple de $(f + g)(x)$.

3.b Soit f la fonction définie par : $f(x) = \dfrac{2x-1}{x-1}$.
1. Démontrer que, pour tout x élément de l'ensemble de définition de f, on a : $f(x) = \dfrac{1}{x-1} + 2$.
2. En déduire la représentation graphique de f à partir de l'hyperbole d'équation : $y = \dfrac{1}{x}$.

3.c $(\mathscr{C})$ est la courbe représentative dans le plan muni du repère (O, I, J) d'une fonction f dont l'ensemble de définition est : $[-4\,;-2[\,\cup\,]-2\,;3]$.



Tracer la courbe représentative et déterminer l'ensemble de définition de chacune des fonctions suivantes.
a) $x \mapsto f(-x)$; *b)* $x \mapsto |f(x)|$;
c) $x \mapsto f(x+2)$; *d)* $x \mapsto f(x-2) - 3$.

3.d Soit f la fonction définie par : $f(x) = (x+4)^2 - 7$.
1. Tracer la courbe représentative de la fonction f.
2. f est-elle minorée sur $\mathbb{R}$? Justifier la réponse.

3.e Le plan est muni d'un repère orthonormé.
On considère les applications
$f : [-2\,;1] \to [1\,;10]$
$\quad x \mapsto (x-1)^2 + 1$
et $g : [1\,;10] \to [-2\,;1]$.
$\quad x \mapsto 1 - \sqrt{x-1}$
1. Tracer la courbe représentative de f. En déduire que f est bijective.
2. Démontrer que g est la bijection réciproque de f.
3. Tracer la courbe représentative de g sur le même graphique que celle de f.

Exercices

APPRENTISSAGE

Généralités

1 On considère les fonctions
$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto -|x|$ $\quad x \mapsto -\dfrac{x^2}{|x|}$.

1. f et g sont-elles égales ?
2. Déterminer la plus grande partie E de $\mathbb{R}$ sur laquelle f et g ont la même restriction.

2 On considère la fonction $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto |x^2 - 5x + 6|$.
Déterminer un polynôme du second degré P ayant même restriction que f à l'intervalle $[2 ; 3]$.

3 On considère la fonction $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto \dfrac{3x^2 - 2x - 1}{x - 1}$.
1. Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ de f.
2. Déterminer une application affine ayant même restriction que f à $\mathcal{D}_f$

4 On considère la fonction $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x - \mathrm{E}(x)}}$,
où E désigne la fonction partie entière.
1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Soit n un nombre entier et g la restriction de f à l'intervalle $]n ; n+1[$.
a) Démontrer que g est une application.
b) Pour tout x élément de $]n ; n+1[$, déterminer une expression de $g(x)$ dans laquelle ne figure pas la fonction partie entière.

5 Soit f l'application de $\mathbb{R} \setminus \{-\frac{3}{2} ; -1 ; 1\}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \dfrac{2x^3 + 3x^2 - 2x - 3}{(x+1)(3 - x - 2x^2)}$.
Déterminer une fonction constante qui est un prolongement à $\mathbb{R}$ de la fonction f.

6 **1.** Soit s_O la symétrie de centre O.
Déterminer l'application $s_O \circ s_O$.
2. Soit $t_{\vec{u}}$ et $t_{\vec{v}}$ les translations de vecteurs respectifs $\vec{u}$ et $\vec{v}$. Déterminer l'application $t_{\vec{v}} \circ t_{\vec{u}}$.

7 Soit O et O' deux points du plan.
1. On désigne par s_O et $s_{O'}$ les symétries de centres respectifs O et O'.
Démontrer que l'application $s_O \circ s_{O'}$ est la translation de vecteur $2\overrightarrow{O'O}$.
2. Écrire la translation de vecteur $2\overrightarrow{OO'}$ comme composée de deux symétries centrales.

8 Dans chacun des cas suivants, déterminer l'ensemble de définition de la fonction $g \circ f$, puis calculer $g \circ f(x)$.

a) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$;
$x \mapsto 5 + 2x$ $\quad x \mapsto \dfrac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$

b) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ et $g: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.
$x \mapsto (2x, 1 - x)$ $\quad (x, y) \mapsto \left(\dfrac{1}{x}, \dfrac{1 - x}{y}\right)$

9 Soit f l'application de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \frac{1}{2}x - 3$.
Trouver toutes les applications affines g telles que : $g \circ f = f \circ g$.

10 Soit f, g et h les fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définies par : $f(x) = 2x - 1$; $g(x) = x^2 - 2$; $h(x) = \dfrac{1}{x - 3}$.
1. Déterminer l'ensemble de définition de $h \circ g \circ f$, puis calculer $h \circ g \circ f(x)$.
2. Déterminer l'ensemble de définition de $g \circ h \circ f$, puis calculer $g \circ h \circ f(x)$.

11 On considère la fonction $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto \dfrac{1}{(x - 1)^2}$.
Déterminer trois fonctions élémentaires u, v et w telles que : $f = u \circ v \circ w$.

Applications particulières

12 Soit f l'application de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{N}$ définie par :
$$\begin{cases} f(n) = \dfrac{n}{2}, \text{ si } n \text{ est pair} \\ f(n) = \dfrac{n+1}{2}, \text{ si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$
Cette application est-elle injective ? Est-elle surjective ?

13 Soit $E = \{0 ; 1\}$. À tout couple (a, b) d'éléments de E, on associe le nombre $a + b - ab$.
1. Vérifier qu'on établit ainsi une application de $E \times E$ dans E.
2. Cette application est-elle injective ? Est-elle surjective ?

14 Soit f une application d'un ensemble E dans lui-même telle que : $f \circ f = f$.
Démontrer que si f est bijective, alors $f = \mathrm{Id}_E$.

15 Dans chacun des cas suivants, dire si l'application f est injective, surjective ou bijective.
a) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$, où E désigne la fonction partie entière ;
$x \mapsto \mathrm{E}(x)$

b) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $x \mapsto 2x^2 + 3x$

c) $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$; $(x, y) \mapsto (x - y, 3 + y)$

d) $f: \mathbb{R} \setminus \{2\} \to \mathbb{R}$; $x \mapsto \dfrac{x + 1}{x - 2}$

e) $f:]0 ; \pi] \to [0 ; 1]$. $x \mapsto \sin x$

16 Dans chacun des cas suivants, démontrer que l'application f est bijective et déterminer sa bijection réciproque.
a) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $x \mapsto 5 - 3x$

b) $f: \mathbb{R} \setminus \{2\} \to \mathbb{R} \setminus \{2\}$; $x \mapsto \dfrac{4x - 1}{2x - 4}$

c) $f : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}\times\mathbb{R}$.
$(x, y) \mapsto (x - 2y, x + 3y)$

17 Dans chacun des cas suivants, dire si l'application f est bijective.

a) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$; $x \mapsto 2x$ *b)* $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}\backslash\{1\}$; $x \mapsto 1 + \dfrac{1}{x}$

c) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $x \mapsto x^2 + x$ *d)* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\times\mathbb{R}$; $x \mapsto (2x, 3x)$.

18 Soit (Δ) une droite du plan, de vecteur directeur $\vec{u}$. On désigne par t la translation de vecteur $\vec{u}$, par s la symétrie orthogonale d'axe (Δ) et par f la composée s o t.
1. Démontrer que f est une bijection.
2. Exprimer f^{-1}, bijection réciproque de f, comme composée d'une symétrie orthogonale par une translation.

19 Soit O un point du plan.
1. Démontrer que, pour tout point M distinct de O, il existe un unique point M' appartenant à la droite (OM) tel que : $\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{OM'} = 2$.
Démontrer que M' est distinct de O.
2. On considère l'application f qui, à tout point M distinct de O, associe le point M' défini à la question 1.
Démontrer que f est une bijection du plan privé de O dans lui-même et déterminer sa bijection réciproque.

Fonctions numériques

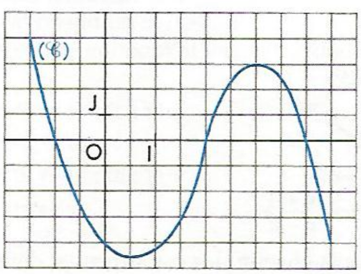
20 Soit f et g deux fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.
Dans chacun des cas suivants, déterminer les fonctions $2f - 3g$, $f \times g$ et $\dfrac{f}{g}$, après avoir précisé leurs ensembles de définition respectifs.

a) $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$ et $g(x) = \dfrac{x(x-1)}{x+1}$;

b) $f(x) = \dfrac{-4x}{x^2-4}$ et $g(x) = \dfrac{x(x-2)}{x+2}$;

c) $f(x) = \dfrac{1 + \frac{1}{x}}{1 - \frac{1}{x}}$ et $g(x) = \dfrac{x - \frac{1}{x}}{x^2 + \frac{1}{x}}$.

21 Le plan est muni du repère orthogonal (O, I, J). $(\mathscr{C})$ est la courbe représentative d'une fonction f, d'ensemble de définition $\left[-\dfrac{3}{2} ; \dfrac{9}{2}\right]$.



1. Construire la courbe représentative $(\mathscr{C}_g)$ de la fonction $g : x \mapsto f(x + \frac{3}{2}) - 2$.
2. *a)* Construire la courbe représentative $(\mathscr{C}_h)$ de la fonction $h : x \mapsto f(-x)$.
b) Déduire de $(\mathscr{C})$ et de $(\mathscr{C}_h)$ la représentation graphique de la fonction $x \mapsto f(|x|)$

22 Le plan est muni du repère orthogonal (O, I, J).
Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2 - 2x$ et $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative.
1. *a)* Démontrer que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = (x-1)^2 - 1$.
b) En déduire que $(\mathscr{C})$ est l'image de la parabole d'équation $y = x^2$ par une transformation simple que l'on déterminera. Construire $(\mathscr{C})$.
2. On considère les fonctions f_1, f_2, f_3 et f_4 définies par :
$f_1(x) = f(-x)$, $f_2(x) = -f(-x)$, $f_3(x) = |f(x)|$
et $f_4(x) = f(x+1) + 2$.
Construire la courbe représentative de chacune des fonctions f_1, f_2, f_3 et f_4.

23 Le plan est muni du repère orthogonal (O, I, J).
Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{2x-5}{x-3}$ et $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative.
1. *a)* Déterminer l'ensemble de définition D_f de f.
b) Déterminer les nombres réels a et b tels que, pour tout x élément de D_f, on a : $f(x) = \dfrac{a}{x-3} + b$.
2. En déduire que $(\mathscr{C})$ est une hyperbole dont on déterminera le centre. Construire $(\mathscr{C})$.

24 Le plan est muni du repère orthogonal (O, I, J).
Dans chacun des cas suivants, tracer la courbe représentative de la fonction f et en déduire la courbe représentative de la fonction g.
a) $f(x) = -3x^2$ et $g(x) = -3x^2 + 2x + 1$;
b) $f(x) = \dfrac{1}{2x}$ et $g(x) = \dfrac{3-4x}{2x-1}$;
c) $f(x) = \sqrt{x}$ et $g(x) = 3 - \sqrt{2-x}$;
d) $f(x) = \sqrt{x}$ et $g(x) = 3 - \sqrt{|2-x|}$.

25 Une fonction f, d'ensemble de définition $[-4 ; 6]$, admet le tableau de variation ci-dessous.

x	-4	0	1	3	6
$f(x)$	0 ↘	-2 ↘	-5 ↗	1 ↘	-1

Dans chacun des cas suivants, dresser le tableau de variation de la fonction g.
a) $g(x) = -f(x)$; *b)* $g(x) = 3f(x) - 4$;
c) $g(x) = f(x-3)$; *d)* $g(x) = f(1-3x)$.

26 Le plan est muni du repère (O, I, J).
Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = x^3$.
1. Construire $(\mathscr{C})$, courbe représentative de f.
2. Dans chacun des cas suivants, déduire de $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de la fonction g.
a) $g(x) = x^3 + 1$;
b) $g(x) = (x-1)(x^2 + x + 1)$;
c) $g(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$;
d) $g(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 2$.

27 Soit f et g les fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définies par : $f(x) = \dfrac{x-1}{2x-1}$ et $g(x) = \dfrac{x+3}{2x+1}$.
1. Comparer f et g sur chacun des intervalles $\left]-\infty ; -\dfrac{1}{2}\right[$ et $\left]\dfrac{1}{2} ; +\infty\right[$.

2. Résoudre sur $\left[-\frac{1}{2}\ ;\ 0\right]$ l'inéquation : $f(x) \leq g(x)$.

28 Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :
$f(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2+3}$.
1. Déterminer les nombres réels a et b tels que, pour tout nombre réel x, on a : $f(x) = \dfrac{a}{x^2+3} + b$.
2. En déduire que f est bornée sur $\mathbb{R}$.

29 Une fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ admet le tableau de variation ci-dessous.

x	$-\infty$		-1		0		3		$+\infty$
$f(x)$		↘	-4	↗	1	↘	0	↘	

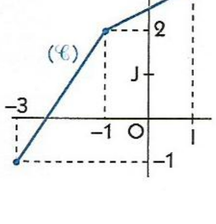
1. Démontrer que f est minorée sur $]-\infty\ ;-1[$ et majorée sur $]-1\ ;+\infty[$.
2. Démontrer que f est bornée sur $]-1\ ;3[$.

30 Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :
$f(x) = \dfrac{\sin x + 3\cos x}{x^2+1}$.
Démontrer que f est bornée sur $\mathbb{R}$.

31 Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = 2x - 1$.
1. M étant un nombre réel quelconque, démontrer qu'il existe au moins un nombre réel x tel que : $f(x) > M$.
f est-elle majorée sur $\mathbb{R}$?
2. m étant un nombre réel quelconque, démontrer qu'il existe au moins un nombre réel x tel que : $f(x) < m$.
f est-elle minorée sur $\mathbb{R}$?

32 Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :
$f(x) = \dfrac{2x}{x+3}$.
1. *a)* Déterminer les nombres réels a et b tels que, pour tout x élément de $\mathbb{R}\backslash\{-3\}$, on a : $f(x) = a + \dfrac{b}{x+3}$.
b) M étant un nombre réel quelconque, démontrer qu'il existe au moins un nombre réel x tel que : $f(x) > M$.
f est-elle majorée sur $\mathbb{R}$?
c) m étant un nombre réel quelconque, démontrer qu'il existe au moins un nombre réel x tel que : $f(x) < m$.
f est-elle minorée sur $\mathbb{R}$?
d) Démontrer que f est bornée sur $[-1\ ;1]$.
2. Soit g la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :
$g(x) = \dfrac{2\cos x}{3+\cos x}$.
a) Déterminer D_g, ensemble de définition de g.
b) Démontrer que g est bornée sur D_g.

33 Le plan est muni du repère orthonormé (O, I, J).
$(\mathscr{C})$ est la courbe représentative d'une fonction f, affine par intervalles, d'ensemble de définition $[-3\ ;1]$.



1. Définir explicitement cette fonction.
2. Démontrer que f est une bijection de $[-3\ ;1]$ vers $[-1\ ;3]$.
3. Construire la courbe représentative de sa bijection réciproque.

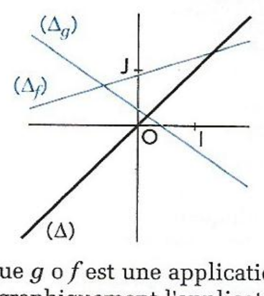
34 Le plan est muni du repère orthonormé (O, I, J).
Soit l'application $f : [-\frac{1}{2} ;+\infty[\to \mathbb{R}$.
$x \mapsto \sqrt{2x+1}$
1. Démontrer que f est bijective et déterminer sa bijection réciproque f^{-1}.
2. Construire la courbe représentative de f^{-1}.
En déduire la courbe représentative de f.

35 Le plan est muni du repère orthonormé (O, I, J).
Soit f et g les fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définies par :
$f(x) = 2x + 1$ et $\begin{cases} g(x) = -\dfrac{x}{2}, \text{ si } x \leq 0 \\ g(x) = -3x, \text{ si } x > 0 \end{cases}$
1. *a)* Démontrer que f et g sont des bijections de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ et déterminer leurs bijections réciproques f^{-1} et g^{-1}.
b) Tracer les courbes représentatives de f, g, f^{-1} et g^{-1}.
2. *a)* Déterminer l'application $g \circ f$ et sa bijection réciproque $(g \circ f)^{-1}$.
b) Tracer les courbes représentatives de $g \circ f$ et de $(g \circ f)^{-1}$.

APPROFONDISSEMENT

36 Soit f, g et h trois fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.
1. Démontrer que les fonctions $(f+g) \circ h$ et $(f \circ h) + (g \circ h)$ sont égales.
2. On suppose que f, g et h sont définies par :
$f(x) = \dfrac{2x+1}{x-2}$, $g(x) = \dfrac{x-3}{x-1}$ et $h(x) = x^2$.
Déterminer les fonctions $h \circ (f+g)$ et $(h \circ f) + (h \circ g)$; ces fonctions sont-elles égales ?

37 Le plan est muni du repère orthonormé (O, I, J).
(Δ_f) et (Δ_g) sont les représentations graphiques de deux applications affines f et g ; (Δ) est la droite d'équation $y = x$.



1. Démontrer que $g \circ f$ est une application affine.
2. Représenter graphiquement l'application $g \circ f$.

38 Soit f une application d'un ensemble E vers un ensemble F et A, B deux parties de E.
1. Démontrer que : $A \subset B \Rightarrow f(A) \subset f(B)$.
2. Démontrer que : $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.
3. *a)* Démontrer que : $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.
b) Démontrer que si f est injective,
alors $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$.
4. On suppose que $E = F = \mathbb{R}$, $A = [-3\ ;1]$, $B = [0\ ;5]$ et f est définie par : $f(x) = |x|$.
A-t-on $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$?

39 **1.** Soit E et F deux intervalles de $\mathbb{R}$, f une application de E vers F et g une application de F vers $\mathbb{R}$.
Démontrer que :
a) si f est croissante sur E et g est croissante sur F, alors $g \circ f$ est croissante sur E ;
b) si f est croissante sur E et g est décroissante sur F, alors $g \circ f$ est décroissante sur E ;
c) si f est décroissante sur E et g est croissante sur F, alors $g \circ f$ est décroissante sur E ;
d) si f est décroissante sur E et g est décroissante sur F, alors $g \circ f$ est croissante sur E.
2. On considère les fonctions f et g de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définies par : $f(x) = x^3$ et $g(x) = -2(x-1)^2 + 3$.
a) Démontrer que f est croissante sur $\mathbb{R}$ et que g est croissante sur $]-\infty\,;1[$, décroissante sur $]1\,;+\infty[$.
b) Déterminer $g \circ f$ et établir son tableau de variation.
c) Déterminer $f \circ g$ et établir son tableau de variation.

40 **1.** Soit f une application de E vers E.
Démontrer que si $f \circ f = \mathrm{Id}_E$, alors f est bijective et $f^{-1} = f$.
2. Le plan est muni du repère orthonormé (O, I, J).
Soit g l'application de $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ vers lui-même, définie par $g(x) = \dfrac{x+3}{x-1}$, et $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative.
a) Déterminer $g \circ g$.
b) Démontrer que : $\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$, $g(x) = 1 + \dfrac{4}{x-1}$.
c) Tracer la courbe $(\mathscr{C})$.
d) Justifier que la droite d'équation $y = x$ est un axe de symétrie de $(\mathscr{C})$.
Une application f de E vers E qui vérifie $f \circ f = \mathrm{Id}_E$ est dite involutive.

41 Soit E, F deux ensembles finis et f une application de E vers F. On désigne par n et p les nombres respectifs d'éléments de E et F.
Démontrer que :
a) si f est injective, alors on a : $n \leq p$;
b) si f est surjective, alors on a : $n \geq p$;
c) si f est bijective, alors on a : $n = p$;
d) si f est injective et si $n = p$, alors f est bijective ;
e) si f est surjective et si $n = p$, alors f est bijective.

42 Le plan est muni du repère orthogonal (O, I, J).
Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, définie par
$f(x) = -2x^2 + 5x$, et $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative.
1. *a)* Déterminer les nombres réels a, b et c tels que, pour tout nombre réel x, on a : $f(x) = a(x+b)^2 + c$.
b) Construire $(\mathscr{C})$.
(Prendre pour unités : 4 cm en abscisses et 2 cm en ordonnées).
2. Résoudre graphiquement :
a) l'équation $|-2x^2 + 5x| = 3$;
b) l'inéquation $|-2x^2 + 5x| > 3$.

43 Soit f et g les fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définies par :

$$\begin{cases} f(x) = x^2, \text{ si } x \leq 2 \\ f(x) = -2x, \text{ si } x > 2 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} g(x) = x^2 + 2x, \text{ si } x \leq 0 \\ g(x) = 2x, \text{ si } x > 0 \end{cases}$$

Déterminer les fonctions $f + g$, $f \times g$, $-2f + 3g$ et $f \circ g$.

44 On considère les applications f_1, f_2, f_3, f_4, f_5 et f_6 de $\mathbb{R}\backslash\{0\,;1\}$ vers lui-même définies par :

$$f_1(x) = x \quad ; \quad f_2(x) = 1 - x \quad ; \quad f_3(x) = \frac{1}{x} \quad ;$$
$$f_4(x) : \frac{x}{x-1} \quad ; \quad f_5(x) = \frac{x-1}{x} \quad ; \quad f_6(x) = \frac{1}{1-x} \quad .$$

1. Démontrer que ces six applications sont bijectives et déterminer leurs bijections réciproques.

2. Compléter le tableau suivant.

$\circ$	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6
f_1						
f_2						
f_3						
f_4						
f_5						
f_6						

L'application $f_5 \circ f_1$, par exemple, apparaîtra à la cinquième ligne de la première colonne.

45 Soit $(\mathscr{D})$ et (Δ) deux droites perpendiculaires du plan, sécantes en O. On désigne par Id l'application identique du plan, par s_O la symétrie de centre O, par $s_{\mathscr{D}}$ et s_Δ les symétries orthogonales d'axes respectifs $(\mathscr{D})$ et (Δ).

Compléter le tableau suivant.

$\circ$	Id	s_O	$s_{\mathscr{D}}$	s_Δ
Id				
s_O				
$s_{\mathscr{D}}$				
s_Δ				

L'application Id $\circ$ s_Δ, par exemple, apparaîtra à la première ligne de la quatrième colonne.

10

Équations, Inéquations, Systèmes linéaires

Carl Friedrich GAUSS

Pour envoyer une sonde spatiale vers la Lune, il faut déterminer sa trajectoire. La mécanique permet d'écrire des équations régissant cette trajectoire, dont la résolution approchée se ramène à celle d'un système d'équations linéaires pouvant comporter plusieurs milliers d'équations et d'inconnues.

Les ordinateurs permettent de résoudre de tels systèmes en utilisant un algorithme de calcul à partir de la méthode du « pivot de Gauss ».

Cette méthode, mise au point par le mathématicien allemand Carl Friedrich GAUSS (1777-1855) est illustrée ci-dessous avec un système de quatre équations à quatre inconnues.

$$\left\{\begin{aligned} x + y + z + t &= -1 \\ 4x + 3y + 2z + t &= -5 \\ 8x + 4y + 2z + t &= -8 \\ 32x + 12y + 4z + t &= -30 \end{aligned}\right. \iff \left\{\begin{aligned} x + y + z + t &= -1 \\ y + 2z + 3t &= 1 \\ 2z + 5t &= 4 \\ t &= 2 \end{aligned}\right.$$

Pour terminer la résolution du système « triangulaire », il suffit de commencer par la dernière équation, puis de remonter de proche en proche jusqu'à la première.

SOMMAIRE

1 Problèmes du second degré

1.1. Équations du second degré

Racines d'un polynôme du second degré

• Dans chacun des cas suivants :
– écrire $P(x)$ sous forme canonique ;
– factoriser $P(x)$, lorsque cela est possible ;
– déterminer les racines éventuelles du polynôme P.

a) $P(x) = 5x^2 - 2x + 3$; *b)* $P(x) = -2x^2 + 3x + 1$; *c)* $P(x) = 4x^2 - 4\sqrt{3}x + 3$.

• Cas général

Soit P le polynôme du second degré défini par : $P(x) = ax^2 + bx + c$, $(a \neq 0)$.

On a : $P(x) = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right)$

$$= a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right)$$

$$= a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right).$$

On pose : $\Delta = b^2 - 4ac$.

On obtient : $P(x) = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right)$.

– Si $\Delta < 0$, alors on a : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} > 0$.

Donc, P n'a pas de racine ; on a vu en classe de seconde que, dans ce cas, P n'est pas factorisable.

– Si $\Delta = 0$, alors $P(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$.

Donc, P a une seule racine : $-\frac{b}{2a}$.

– Si $\Delta > 0$, alors on a : $P(x) = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\sqrt{\Delta}^2}{4a^2}\right)$

$$= a\left(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)$$

$$= a\left(x - \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x - \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}\right).$$

Donc, P a deux racines distinctes x_1 et x_2 telles que : $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$.
On a : $P(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$.

Propriété

Soit P le polynôme du second degré défini par : $P(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$.

On pose : $\Delta = b^2 - 4ac$.

• **Si $\Delta < 0$, alors P n'a pas de racine et n'est pas factorisable.**

• **Si $\Delta = 0$, alors P a une racine unique $-\frac{b}{2a}$ et $P(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$.**

• **Si $\Delta > 0$, alors P a deux racines distinctes x_1 et x_2 telles que : $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$; on a : $P(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$.**

Vocabulaire

Le nombre réel Δ, tel que $\Delta = b^2 - 4ac$, est appelé discriminant du polynôme P.

Remarques

- *Lorsque $\Delta = 0$, les calculs faits pour $\Delta > 0$ restent valables ; on trouve alors : $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$; l'unique racine $-\frac{b}{2a}$ est appelée racine double de P.*
- *Si les coefficients a et c sont de signes contraires, alors on a : $b^2 - 4ac > 0$; donc, P a deux racines distinctes.*

Exemples

- Soit P le polynôme du second degré défini par : $P(x) = x^2 + 2x - 35$.

On a : $\Delta = 144$; donc, P a deux racines distinctes x_1 et x_2 telles que :

$x_1 = \frac{-2-12}{2} = -7$ et $x_2 = \frac{-2+12}{2} = 5$; on a : $P(x) = (x+7)(x-5)$.

- Soit Q le polynôme du second degré défini par : $Q(x) = 2x^2 + 2\sqrt{6}x + 3$.

On a : $\Delta = 0$; donc, Q a une seule racine : $-\frac{\sqrt{6}}{2}$; on a : $Q(x) = 2\left(x + \frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2 = (x\sqrt{2} + \sqrt{3})^2$.

- Soit R le polynôme du second degré défini par : $R(x) = 2x^2 + 3x + 2$.

On a : $\Delta = -7$; donc, R n'a pas de racine et n'est pas factorisable.

Résolution d'une équation du second degré

Une équation, d'inconnue x, du type $ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ est appelée équation du second degré.
Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ équivaut à déterminer les racines du polynôme du second degré P défini par : $P(x) = ax^2 + bx + c$.

Le nombre réel Δ, tel que $\Delta = b^2 - 4ac$, est aussi appelé discriminant de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$.

- Si $\Delta < 0$, alors l'équation n'a pas de solution.
- Si $\Delta = 0$, alors l'équation a une solution double : $-\frac{b}{2a}$.
- Si $\Delta > 0$, alors l'équation a deux solutions distinctes : $\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$.

Exemples

- Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $2x^2 + 3x + 4 = 0$.

On a : $\Delta = -23$.
Donc, cette équation n'a pas de solution.

- Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $(\sqrt{2} - 1)x^2 + 2x + \sqrt{2} + 1 = 0$.

On a : $\Delta = 4 - 4(\sqrt{2} - 1)(\sqrt{2} + 1) = 0$.
Donc, cette équation a une solution double : $-\frac{1}{\sqrt{2}-1} = -\sqrt{2} - 1$.

- Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $x^2 + (\sqrt{3} - 2)x - 2\sqrt{3} = 0$.

On a : $\Delta = (\sqrt{3} - 2)^2 + 8\sqrt{3} = (\sqrt{3} + 2)^2$.
Donc, cette équation a deux solutions distinctes x_1 et x_2 telles que :

$x_1 = \frac{-(\sqrt{3}-2)-(\sqrt{3}+2)}{2} = -\sqrt{3}$ et $x_2 = \frac{-(\sqrt{3}-2)+(\sqrt{3}+2)}{2} = 2$.

Remarques

- *Le calcul de Δ n'est pas toujours indispensable pour résoudre une équation du second degré.*
  Par exemple, soit l'équation : $2x^2 + 5x = 0$.
  On a : $2x^2 + 5x = 0 \iff x(2x+5) = 0$.
  Donc, cette équation a deux solutions distinctes : 0 et $-\frac{5}{2}$.
- *On peut parfois simplifier les calculs en posant : $b' = \frac{b}{2}$.*
  On a : $\Delta = b^2 - 4ac = 4(b'^2 - ac)$.
  On utilise alors le discriminant réduit Δ' tel que : $\Delta' = b'^2 - ac$.
  - Si $\Delta' < 0$, alors l'équation n'a pas de solution.
  - Si $\Delta' = 0$, alors l'équation a une solution double : $-\frac{b'}{a}$.
  - Si $\Delta' > 0$, alors l'équation a deux solutions distinctes : $\frac{-b'-\sqrt{\Delta'}}{a}$ et $\frac{-b'+\sqrt{\Delta'}}{a}$.

Exemple

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $3x^2 - 2\sqrt{2}x - 2 = 0$.
On a : $\Delta' = 2 + 6 = 8$.
Donc, cette équation a deux solutions distinctes : $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{8}}{3} = -\frac{\sqrt{2}}{3}$ et $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{8}}{3} = \sqrt{2}$.

Somme et produit des racines

Soit P le polynôme du second degré défini par : $P(x) = ax^2 + bx + c$.
Si P admet deux racines x_1 et x_2, alors on a : $P(x) = a(x - x_1)(x - x_2) = ax^2 - a(x_1 + x_2)x + ax_1x_2$.
Or, deux polynômes de même degré sont égaux si et seulement si les coefficients des termes de même degré sont égaux.
Donc, on a : $-a(x_1 + x_2) = b$ et $ax_1x_2 = c$.

On en déduit : $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ et $x_1x_2 = \frac{c}{a}$.

Propriété 1

Soit P le polynôme du second degré défini par : $P(x) = ax^2 + bx + c$.

Si P admet deux racines x_1 et x_2, alors on a : $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ et $x_1x_2 = \frac{c}{a}$.

Remarque

Dans certains cas, on peut déterminer sans calcul une racine de P. On peut alors trouver facilement l'autre racine à l'aide de l'une des deux relations précédentes.
C'est notamment le cas lorsque le polynôme a une racine évidente.

Exemple

Soit P le polynôme défini par : $P(x) = 15x^2 - 11x - 4$.
On constate que : $P(1) = 0$; 1 est donc une racine de P.
Le produit des racines est $-\frac{4}{15}$; l'autre racine est donc $-\frac{4}{15}$.

Propriété 2

Deux nombres réels ont pour somme S et pour produit P si et seulement si ils sont les solutions de l'équation : $x^2 - Sx + P = 0$.

Démonstration

• Soit x_1 et x_2 deux nombres réels tels que : $x_1 + x_2 = S$ et $x_1x_2 = P$.
Pour tout nombre réel x, on a : $(x - x_1)(x - x_2) = x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2 = x^2 - Sx + P$.
Donc, x_1 et x_2 sont les solutions de l'équation : $x^2 - Sx + P = 0$.
• Réciproquement, si x_1 et x_2 sont les solutions de l'équation $x^2 - Sx + P = 0$, alors, d'après la propriété 1, on a : $x_1 + x_2 = S$ et $x_1x_2 = P$.

Exemples

• Déterminer deux nombres ayant pour somme $2\sqrt{3}$ et pour produit -1.
Ces deux nombres, s'ils existent, sont solutions de l'équation $x^2 - 2\sqrt{3}x - 1 = 0$.
On a : $\Delta' = 4$; donc cette équation a deux solutions : $\sqrt{3} - 2$ et $\sqrt{3} + 2$.
Les deux nombres cherchés sont donc $\sqrt{3} - 2$ et $\sqrt{3} + 2$.

• Déterminer deux nombres ayant pour somme $2 - \sqrt{2}$ et pour produit $\frac{1}{2}(3 - 2\sqrt{2})$.
Ces deux nombres, s'ils existent, sont solutions de l'équation : $2x^2 - 2(2 - \sqrt{2})x + 3 - 2\sqrt{2} = 0$.
On a : $\Delta' = (2 - \sqrt{2})^2 - 2(3 - 2\sqrt{2}) = 0$; donc cette équation a une solution double : $\frac{1}{2}(2 - \sqrt{2})$.
Les deux nombres cherchés sont donc égaux à $\frac{1}{2}(2 - \sqrt{2})$.

• Déterminer les dimensions a et b d'un rectangle dont le périmètre est 64 m et l'aire 240 m^2.
On a : $a + b = 32$ et $ab = 240$.
Les nombres a et b, s'ils existent, sont les solutions de l'équation : $x^2 - 32x + 240 = 0$.
On a : $\Delta' = 16$; donc cette équation a deux solutions : 12 et 20.
Le rectangle a pour longueur 20 m et pour largeur 12 m.

1.2. Inéquations du second degré

Signe d'un polynôme du second degré

Soit P le polynôme du second degré défini par : $P(x) = ax^2 + bx + c$.
Le discriminant de P est le nombre réel Δ tel que : $\Delta = b^2 - 4ac$.

On a : $P(x) = a\left(\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{\Delta}{4a^2}\right)$.

• Si $\Delta < 0$, alors on a : $\forall x \in \mathbb{R}, \left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{\Delta}{4a^2} > 0$;
on en déduit que, pour tout nombre réel x, $P(x)$ est du signe de a.

• Si $\Delta = 0$, alors on a : $P(x) = a\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2$;
on en déduit que, pour tout nombre réel x distinct de $-\dfrac{b}{2a}$, $P(x)$ est du signe de a.

• Si $\Delta > 0$, alors on a : $P(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$
où x_1 et x_2 sont les deux racines distinctes du polynôme.
On peut étudier le signe de $P(x)$ à l'aide d'un tableau.
(On suppose que : $x_1 < x_2$.)

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$x - x_1$		$-$	0	$+$		$+$	
$x - x_2$		$-$		$-$	0	$+$	
$(x - x_1)(x - x_2)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$a(x - x_1)(x - x_2)$		signe de a	0	signe de $-a$	0	signe de a	

M

Soit P le polynôme du second degré défini par : $P(x) = ax^2 + bx + c$.
Pour étudier le signe de $P(x)$, on peut calculer son discriminant Δ et utiliser l'un des tableaux ci-dessous.

$\Delta < 0$

P n'a pas de racine

x	$-\infty$	$+\infty$
$P(x)$	signe de a	

$\Delta = 0$

P a une racine double $-\dfrac{b}{2a}$

x	$-\infty$		$-\dfrac{b}{2a}$		$+\infty$
$P(x)$		signe de a	0	signe de a	

$\Delta > 0$

P a deux racines distinctes x_1 et x_2

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$P(x)$		signe de a	0	signe de $-a$	0	signe de a	

Exemples

• Déterminer, suivant les valeurs de x, le signe du polynôme P défini par : $P(x) = -2x^2 + x - 1$.
On a : $\Delta = -7$; donc, P n'a pas de racine et $\forall x \in \mathbb{R}$, $P(x) < 0$.

• Déterminer, suivant les valeurs de x, le signe du polynôme Q défini par : $Q(x) = -2x^2 + 3x + 2$.
On a : $\Delta = 25$; donc, Q a deux racines 2 et $-\dfrac{1}{2}$.
Le signe de $Q(x)$ est donné par le tableau ci-contre.

x	$-\infty$		$-\dfrac{1}{2}$		2		$+\infty$
$Q(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Résolution d'une inéquation du second degré

Une inéquation, d'inconnue x, du type $ax^2 + bx + c > 0$ $(a \neq 0)$ est appelée inéquation du second degré.
Pour résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $ax^2 + bx + c > 0$, on étudie le signe du polynôme P défini par : $P(x) = ax^2 + bx + c$.

Exemples

• Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $-x^2 + 4x + 1 \geqslant 0$ (1).
Soit P le polynôme défini par : $P(x) = -x^2 + 4x + 1$.
On a : $\Delta' = 5$; donc, P a deux racines : $2 - \sqrt{5}$ et $2 + \sqrt{5}$;
Le coefficient de x^2 est négatif, donc le polynôme est positif « entre les racines ».
L'ensemble des solutions de (1) est : $[2 - \sqrt{5} ; 2 + \sqrt{5}]$.

• Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $-2x^2 + 2x - 1 \geqslant 0$ (2).
Soit Q le polynôme défini par : $Q(x) = -2x^2 + 2x - 1$.
On a : $\Delta' = -1$; donc, Q n'a pas de racine ; le coefficient de x^2 est négatif, donc : $\forall x \in \mathbb{R}, Q(x) < 0$.
L'inéquation (2) n'a pas de solution.

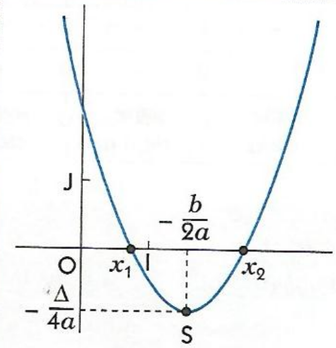
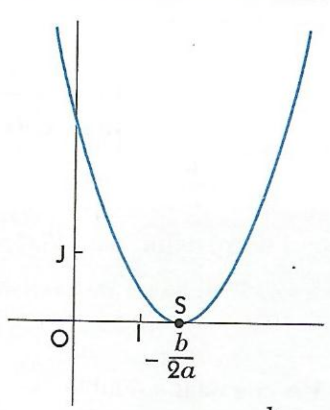
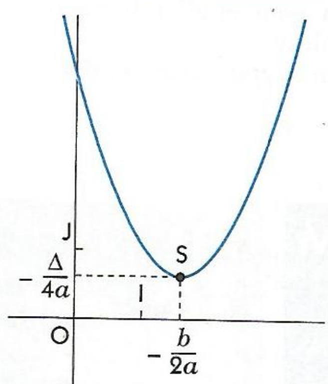
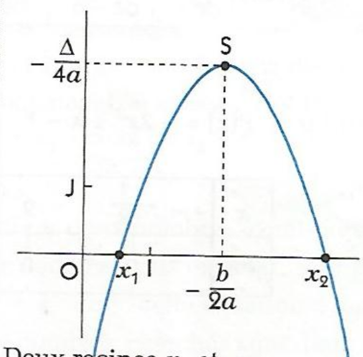
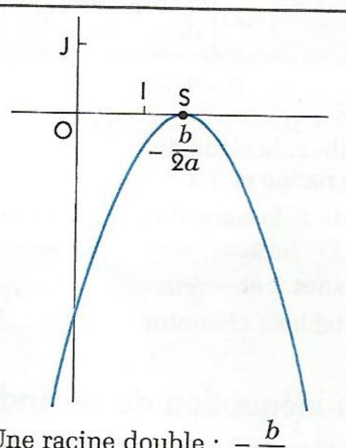
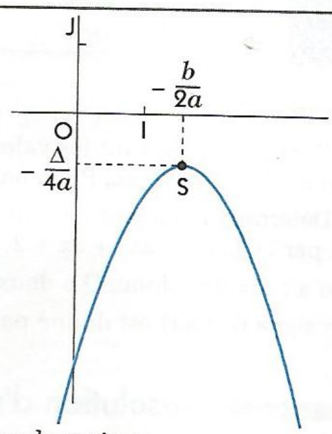
Interprétation graphique

Soit P le polynôme du second degré défini par : $P(x) = ax^2 + bx + c$.
La représentation graphique d'une fonction polynôme du second degré dans le plan muni du repère orthogonal (O, I, J) est une parabole.

Le sommet S de cette parabole a pour abscisse $-\dfrac{b}{2a}$.

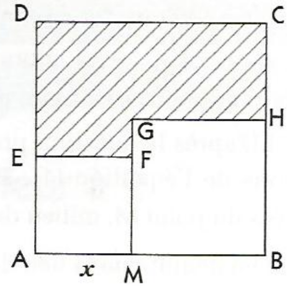
On a : $P(x) = a\left(\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{\Delta}{4a^2}\right)$; l'ordonnée du sommet est donc $-\dfrac{\Delta}{4a}$.

Les abscisses des points d'intersection de la parabole avec la droite (OI) sont les racines du polynôme P ; le signe de P(x) est donné par la position de la parabole par rapport à la droite (OI).
On obtient six cas de figure suivant les signes de a et de Δ.

	$\Delta > 0$	$\Delta = 0$	$\Delta < 0$
$a > 0$	 Deux racines x_1 et x_2 $\forall x \in]-\infty ; x_1] \cup [x_2 ; +\infty[$, $P(x) \geqslant 0$ $\forall x \in [x_1 ; x_2]$, $P(x) \leqslant 0$	 Une racine double : $-\dfrac{b}{2a}$ $\forall x \in \mathbb{R}$, $P(x) \geqslant 0$	 Pas de racine $\forall x \in \mathbb{R}$, $P(x) > 0$
$a < 0$	 Deux racines x_1 et x_2 $\forall x \in]-\infty ; x_1] \cup [x_2 ; +\infty[$, $P(x) \leqslant 0$ $\forall x \in [x_1 ; x_2]$, $P(x) \geqslant 0$	 Une racine double : $-\dfrac{b}{2a}$ $\forall x \in \mathbb{R}$, $P(x) \leqslant 0$	 Pas de racine $\forall x \in \mathbb{R}$, $P(x) < 0$

1.3. Travaux dirigés

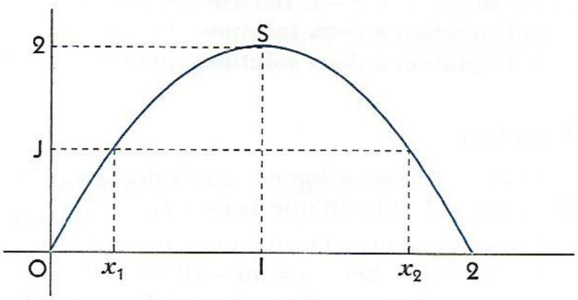
1. Problème d'optimisation



ABCD est un carré de côté 2. M est un point du segment [AB], AEFM et MGHB sont des carrés.
On pose : $x = AM$. On désigne par $\mathscr{A}(x)$ l'aire de la surface hachurée.
1°) Démontrer que la valeur maximale de $\mathscr{A}(x)$, lorsque le point M décrit [AB], est égale à la moitié de l'aire du carré ABCD.
2°) Déterminer l'ensemble des nombres réels x tels que : $1 < \mathscr{A}(x) \leqslant 2$.

Solution

1°) On a : $\mathscr{A}(x) = 4 - x^2 - (2 - x)^2 = -2x^2 + 4x$.
Lorsque le point M décrit [AB], x décrit l'intervalle $[0 ; 2]$; la fonction $\mathscr{A}$ est une fonction polynôme du second degré. On munit le plan du repère orthogonal (O, I, J) ; la courbe représentative de $\mathscr{A}$ est une parabole dont le sommet S a pour abscisse $-\dfrac{b}{2a}$, c'est-à-dire 1.
Donc, la valeur maximale de $\mathscr{A}(x)$ est obtenue en 1 et est égale à $\mathscr{A}(1)$, c'est-à-dire 2.



2°) D'après la question précédente, on a :
$1 < \mathscr{A}(x) \leqslant 2 \quad \Leftrightarrow \quad \mathscr{A}(x) > 1$
$\qquad\qquad\qquad \Leftrightarrow \quad 2x^2 - 4x + 1 < 0.$

Le polynôme $2x^2 - 4x + 1$ admet deux racines x_1 et x_2 telles que : $x_1 = 1 - \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et $x_2 = 1 + \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Donc : $1 < \mathscr{A}(x) \leqslant 2 \Leftrightarrow x \in \left]1 - \dfrac{\sqrt{2}}{2} ; 1 + \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right[$.

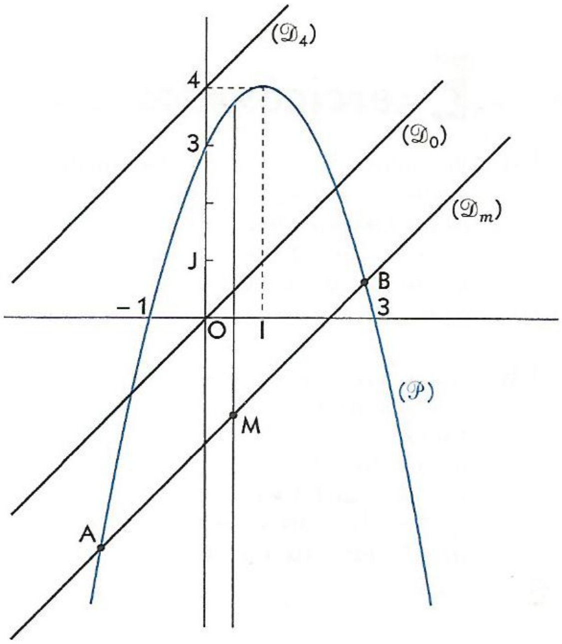
2. Intersection d'une droite et d'une parabole

Le plan est muni du repère orthonormé (O, I, J).
Soit $(\mathscr{P})$ la parabole d'équation : $y = -x^2 + 2x + 3$.
Pour tout nombre réel m, on considère la droite $(\mathscr{D}_m)$ d'équation : $y = x + m$.
1°) Construire, sur le même graphique, la parabole $(\mathscr{P})$ ainsi que les droites $(\mathscr{D}_4)$ et $(\mathscr{D}_0)$.
2°) Déterminer, suivant les valeurs de m, le nombre de points d'intersection de $(\mathscr{D}_m)$ et de $(\mathscr{P})$.
3°) Soit E l'ensemble des valeurs de m pour lesquelles $(\mathscr{D}_m)$ et $(\mathscr{P})$ ont deux points communs A et B, distincts ou confondus. On désigne par M le milieu de [AB].
Déterminer le lieu du point M lorsque m décrit E.

Solution

1°) Le sommet de la parabole $(\mathscr{P})$ a pour coordonnées $(1 ; 4)$; on a le tableau de valeurs suivant.

x	-2	-1	0	1	2	3	4
y	-5	0	3	4	3	0	-5



Les droites $(\mathscr{D}_4)$ et $(\mathscr{D}_0)$ ont pour coefficient directeur 1 et coupent l'axe (OJ) aux points d'ordonnées respectives 4 et 0.

2°) Pour tout nombre réel m, les abscisses des points d'intersection de $(\mathscr{P})$ et $(\mathscr{D}_m)$ sont les solutions de l'équation :
$-x^2 + 2x + 3 = x + m \quad (1).$
On a : (1) $\quad \Leftrightarrow \quad x^2 - x + m - 3 = 0.$
$\Delta = 13 - 4m$; donc :

- si $m \in \left]-\infty ; \dfrac{13}{4}\right[$, alors $\Delta > 0$; l'équation (1) a deux solutions distinctes. $(\mathscr{D}_m)$ et $(\mathscr{P})$ ont deux points communs distincts ;

• si $m = \frac{13}{4}$, alors $\Delta = 0$; l'équation (1) a une solution double.

$(\mathcal{D}_m)$ et $(\mathcal{P})$ ont deux points communs confondus ; on dit que $(\mathcal{D}_m)$ et $(\mathcal{P})$ sont tangents.

• si $m \in]\frac{13}{4}\ ; +\infty[$, alors $\Delta < 0$; l'équation (1) n'a pas de solution.

$(\mathcal{D}_m)$ et $(\mathcal{P})$ n'ont pas de point commun.

3°) D'après la question précédente, on a : $E =]-\infty\ ; \frac{13}{4}]$. Lorsque $m \in E$, on désigne par x_1 et x_2 les solutions de l'équation (1). Donc, x_1 et x_2 sont les abscisses respectives des points A et B ; les coordonnées du point M, milieu de [AB], sont $(x_M\ ; y_M)$ tel que : $x_M = \frac{1}{2}(x_1 + x_2) = \frac{1}{2}$ et $y_M = \frac{1}{2}(y_1 + y_2) = \frac{1}{2} + m$.

On en déduit que le lieu des points M lorsque m décrit E est la demi-droite définie par : $x = \frac{1}{2}$ et $y \leq \frac{15}{4}$.

3. Étude du signe des solutions d'une équation du second degré

Soit m un nombre réel. On considère l'équation d'inconnue x : $(m + 1)x^2 - (m + 3)x + 3 - m = 0$.
1°) Résoudre cette équation pour $m = -1$.
2°) On suppose $m \neq -1$. Déterminer les valeurs du nombre réel m pour lesquelles :
***a)* l'équation a deux solutions de signes contraires ;**
***b)* l'équation a deux solutions distinctes positives .**

Solution

1°) Si $m = -1$, l'équation est équivalente à : $-2x + 4 = 0$.
Elle a une solution unique égale à 2.

2°) On suppose pour la suite que : $m \neq -1$.
On a : $\Delta = 5m^2 - 2m - 3 = (m - 1)(5m + 3)$.
L'équation a deux solutions si et seulement si $\Delta > 0$, c'est-à-dire : $m \in]-\infty\ ; -\frac{3}{5}[\cup]1\ ; +\infty[$.
Pour déterminer le signe de ces solutions, on étudie les signes de leur produit P et de leur somme S.
On a : $P = \frac{3 - m}{m + 1}$ et $S = \frac{m + 3}{m + 1}$.
a) Les solutions sont de signes contraires si et seulement si : $P < 0$.
On a : $P < 0 \iff m \in]-\infty\ ; -1[\cup]3\ ; +\infty[$.
Donc, l'équation a deux solutions de signes contraires si et seulement si : $m \in]-\infty\ ; -1[\cup]3\ ; +\infty[$.
b) Les racines sont toutes deux positives si et seulement si : $P > 0$ et $S > 0$.
On a : $P > 0 \iff m \in]-1\ ; 3[$;
$S > 0 \iff m \in]-\infty\ ; -3[\cup]-1\ ; +\infty[$.
Donc, l'équation a deux solutions distinctes positives si et seulement si : $m \in]-1\ ; -\frac{3}{5}[\cup]1\ ; 3[$.

Exercices

1.a Résoudre dans $\mathbb{R}$ chacune des équations suivantes :
a) $2x^2 + 4x + 3 = 0$;
b) $3x^2 - 2\sqrt{6}x + 2 = 0$;
c) $-6x^2 + 13x - 6 = 0$;
d) $x^2 - (\sqrt{2} - \sqrt{3})x - \sqrt{6} = 0$.

1.b Après avoir trouvé une solution évidente, résoudre dans $\mathbb{R}$ chacune des équations suivantes :
a) $7x^2 - 5x - 2 = 0$;
b) $-3x^2 - 2x + 1 = 0$;
c) $\sqrt{3}x^2 - (1 + \sqrt{3})x + 1 = 0$;
d) $ax^2 - (a^2 + 1)x + a = 0$.

1.c Résoudre dans $\mathbb{R}$ chacune des inéquations suivantes :
a) $-2x^2 + 5x - 3 > 0$; *b)* $2x^2 - 7x - 15 \leq 0$;
c) $4x^2 - 4\sqrt{3}x + 3 \leq 0$; *d)* $-2x^2 - 4x - 3 < 0$.

1.d **1.** Démontrer que pour tout nombre réel k, l'équation $x^2 + 2(k + 1)x + 2k = 0$, où x est l'inconnue, admet deux solutions distinctes.
2. Étudier, suivant les valeurs du nombre réel k, le signe de ces solutions.

1.e Une boîte de conserve cylindrique a une aire totale de 600 cm² et une hauteur de 15 cm. Calculer son volume. *(On prendra : $\pi \approx 3$.)*

2 Équations et inéquations se ramenant au second degré

2.1. Équations et inéquations de degré supérieur à 2

Équations bicarrées

1. Résoudre dans ℝ l'équation : $x^4 + x^2 - 12 = 0$.

Cette équation du quatrième degré, sans terme de degré impair, est appelée équation bicarrée.
Pour résoudre une telle équation, on peut effectuer le changement d'inconnue : $X = x^2$.

On a : $x^4 + x^2 - 12 = 0 \Leftrightarrow X^2 + X - 12 = 0$
$\Leftrightarrow (X + 4)(X - 3) = 0$
$\Leftrightarrow (x^2 + 4)(x^2 - 3) = 0$.

L'équation $x^2 + 4 = 0$ n'a pas de solution ; l'équation $x^2 - 3 = 0$ a pour solutions $-\sqrt{3}$ et $\sqrt{3}$.
L'équation $x^4 + x^2 - 12 = 0$ a donc deux solutions : $-\sqrt{3}$ et $\sqrt{3}$.

2. m est un nombre réel donné.
On considère l'équation d'inconnue x : $x^4 - 3mx^2 + m^2 - 1 = 0$ (1).
***a)* Résoudre cette équation dans ℝ pour chacune des valeurs suivantes de m : 0 ; 1 ; 3.**
***b)* Déterminer les valeurs de m pour lesquelles cette équation a :**
- **quatre solutions distinctes ;**
- **trois solutions distinctes ;**
- **deux solutions distinctes.**

a) • Si $m = 0$, on a : $x^4 - 1 = 0 \Leftrightarrow (x^2 - 1)(x^2 + 1) = 0$
$\Leftrightarrow (x - 1)(x + 1)(x^2 + 1) = 0$.

Donc, l'équation a deux solutions : -1 et 1.

• Si $m = 1$, on a : $x^4 - 3x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2(x^2 - 3) = 0$
$\Leftrightarrow x^2(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3}) = 0$.

Donc, l'équation a trois solutions : $-\sqrt{3}$, 0 et $\sqrt{3}$.

• Si $m = 3$, on a : $x^4 - 9x^2 + 8 = 0 \Leftrightarrow (x^2 - 1)(x^2 - 8) = 0$
$\Leftrightarrow (x - 1)(x + 1)(x - 2\sqrt{2})(x + 2\sqrt{2}) = 0$.

Donc, l'équation a quatre solutions : -1, 1, $-2\sqrt{2}$ et $2\sqrt{2}$.

b) On pose : $X = x^2$; on obtient l'équation : $X^2 - 3mX + m^2 - 1 = 0$ (2).
Dans l'équation (2), on a : $\Delta = 5m^2 + 4$; $P = m^2 - 1$; $S = 3m$.

On remarque que, pour tout nombre réel m, l'équation (2) admet deux solutions distinctes.

• L'équation (1) a quatre solutions distinctes si et seulement si l'équation (2) a deux solutions distinctes et positives.
Cette condition est réalisée si et seulement si $\Delta > 0$, $P > 0$ et $S > 0$, c'est-à-dire : $m \in]1 ; +\infty[$.

• L'équation (1) a trois solutions distinctes si et seulement si l'équation (2) a deux solutions distinctes et positives, dont l'une est nulle.
Cette condition est réalisée si et seulement si $\Delta > 0$, $P = 0$ et $S > 0$, c'est-à-dire : $m = 1$.

• L'équation (1) a deux solutions distinctes si et seulement si l'équation (2) a deux solutions distinctes non nulles et de signes opposés.
Cette condition est réalisée si et seulement si $\Delta > 0$ et $P < 0$, c'est-à-dire : $m \in]-1 ; 1[$.

Inéquations bicarrées

1. Résoudre dans ℝ l'inéquation : $4x^4 - 5x^2 + 1 < 0$ (1).

Soit P le polynôme défini par : $P(x) = 4x^4 - 5x^2 + 1$.
On pose : $X = x^2$; on a : $4x^4 - 5x^2 + 1 = 4X^2 - 5X + 1$.
Le polynôme $4X^2 - 5X + 1$ a pour racines : 1 et $\frac{1}{4}$.

Donc : $4X^2 - 5X + 1 = (4X - 1)(X - 1)$
$= (4x^2 - 1)(x^2 - 1)$
$= (2x - 1)(2x + 1)(x - 1)(x + 1).$

On en déduit le tableau de signes ci-contre.
Donc, l'ensemble des solutions de l'inéquation (1) est : $]-1\,;-\frac{1}{2}[\cup]\frac{1}{2}\,;1[$.

x	$-\infty$		-1		$-\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
$(2x-1)(2x+1)$		+		+	0	−	0	+		+	
$(x-1)(x+1)$		+	0	−		−		−	0	+	
$\mathrm{P}(x)$		+	0	−	0	+	0	−	0	+	

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $x^4 \geqslant x^2 + 12$ (2).

On a : $x^4 \geqslant x^2 + 12 \iff x^4 - x^2 - 12 \geqslant 0.$
On pose : $X = x^2$; on a : $x^4 - x^2 - 12 = X^2 - X - 12.$
Le polynôme $X^2 - X - 12$ a pour racines : -3 et 4.
Donc : $X^2 - X - 12 = (X + 3)(X - 4)$
$= (x^2 + 3)(x^2 - 4)$
$= (x^2 + 3)(x - 2)(x + 2).$
Or : $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 + 3 > 0.$
Donc, l'ensemble des solutions de l'inéquation (2) est : $]-\infty\,;-2] \cup [2\,;+\infty[$.

Autres équations et inéquations de degré supérieur à 2

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $x^4 - x^3 - 13x^2 + x + 12 = 0$ (1).

Soit P le polynôme défini par : $\mathrm{P}(x) = x^4 - x^3 - 13x^2 + x + 12.$
$\mathrm{P}(1) = 0$, donc il existe un polynôme Q tel que : $\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{P}(x) = (x - 1)\mathrm{Q}(x).$
$\mathrm{P}(-1) = 0$, donc il existe un polynôme R tel que : $\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{Q}(x) = (x + 1)\mathrm{R}(x).$
Par suite, on a : $\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{P}(x) = (x - 1)\mathrm{Q}(x)$
$= (x - 1)(x + 1)\mathrm{R}(x)$
$= (x^2 - 1)\mathrm{R}(x).$

Pour déterminer le polynôme R, on peut effectuer la division euclidienne de $\mathrm{P}(x)$ par $x^2 - 1$.

$$\begin{array}{r|l}
x^4 - x^3 - 13x^2 + x + 12 & x^2 - 1 \\
\hline
0 - x^3 - 12x^2 + x + 12 & x^2 - x - 12 \\
0 - 12x^2 + 0 + 12 & \\
0 + 0 + 0 &
\end{array}$$

On obtient : $\mathrm{P}(x) = (x^2 - 1)(x^2 - x - 12)$
$= (x - 1)(x + 1)(x - 4)(x + 3).$
Donc, l'ensemble des solutions de l'équation (1) est : $\{-1\,;1\,;-3\,;4\}$.

2. Soit P le polynôme défini par : $\mathrm{P}(x) = x^4 + x^3 - 5x^2 + x - 6$.
***a)* Vérifier que -3 et 2 sont racines de P et en déduire une factorisation de $\mathrm{P}(x)$.**
***b)* Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $x^4 + x^3 - 5x^2 + x - 6 < 0$ (2).**

a) $\mathrm{P}(-3) = 0$, donc -3 est une racine de P ; $\mathrm{P}(2) = 0$, donc 2 est une racine de P.
On en déduit qu'il existe un polynôme Q tel que : $\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{P}(x) = (x + 3)(x - 2)\,\mathrm{Q}(x)$
$= (x^2 + x - 6)\,\mathrm{Q}(x).$

Pour déterminer le polynôme Q, on peut utiliser la méthode des coefficients indéterminés.
Q est un polynôme du second degré ; on pose : $\mathrm{Q}(x) = ax^2 + bx + c.$
On a : $\forall x \in \mathbb{R},\ (x^2 + x - 6)(ax^2 + bx + c) = x^4 + x^3 - 5x^2 + x - 6.$
Le monôme de plus haut degré de $\mathrm{P}(x)$ est égal au produit des monômes de plus haut degré de $\mathrm{Q}(x)$ et de $x^2 + x - 6$; donc : $a = 1$.
Un raisonnement analogue sur les termes constants nous donne : $c = 1$.
Donc : $\forall x \in \mathbb{R},\ x^4 + x^3 - 5x^2 + x - 6 = (x^2 + x - 6)(x^2 + bx + 1)$
$= x^4 + (b + 1)x^3 + (b - 5)x^2 + (-6b + 1)x - 6.$
On en déduit que : $b = 0$.
D'où : $\mathrm{P}(x) = (x + 3)(x - 2)(x^2 + 1).$

b) $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 + 1 > 0$; on en déduit que, pour tout nombre réel x, $\mathrm{P}(x)$ est du signe de $(x + 3)(x - 2)$.
Donc, l'ensemble des solutions de l'inéquation (2) est : $]-3\,;2[$.

2.2. Équations et inéquations irrationnelles

Équations irrationnelles

On appelle équation irrationnelle toute équation où l'inconnue figure sous un radical.

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $\sqrt{2-x} = x + 10$ (1).

Nous allons proposer deux méthodes pour résoudre une telle équation.

1re méthode : résolution par implications

Pour tous nombres réels a et b, on a : $a = b \Rightarrow a^2 = b^2$.

On peut écrire : $\sqrt{2-x} = x + 10 \Rightarrow 2 - x = (x + 10)^2$

$$\Rightarrow x^2 + 21x + 98 = 0$$

$$\Rightarrow (x + 7)(x + 14) = 0.$$

L'équation $(x + 7)(x + 14) = 0$ a deux solutions : -7 et -14.

Pour terminer la résolution, nous devons vérifier si -7 et -14 sont solutions de l'équation (1).

$\sqrt{2-(-7)} = -7 + 10$; -7 est solution de (1) ;

$\sqrt{2-(-14)} \neq -14 + 10$; -14 n'est pas solution de (1).

Donc, l'équation (1) a une seule solution : -7.

M

Pour résoudre une équation irrationnelle (E), on peut utiliser la méthode suivante :
- éliminer les radicaux par des élévations au carré ;
- résoudre l'équation (E') sans radical ainsi obtenue ;
- déterminer, parmi les solutions de (E'), celles qui sont solutions de (E).

2e méthode : résolution par équivalences

Pour tous nombres réels a et b, on a : $\sqrt{a} = b \Leftrightarrow \begin{cases} a = b^2 \\ b \geqslant 0 \end{cases}$.

On peut écrire : $\sqrt{2-x} = x + 10 \Leftrightarrow \begin{cases} 2 - x = (x + 10)^2 \\ x + 10 \geqslant 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 21x + 98 = 0 \\ x \geqslant -10 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x + 7)(x + 14) = 0 \\ x \geqslant -10 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = -7.$$

Donc, l'équation (1) a une seule solution : -7.

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $\sqrt{-x^2 + 5x + 9} = \sqrt{x-3}$ (2).

Pour tous nombres réels a et b, on a : $\sqrt{a} = \sqrt{b} \Leftrightarrow \begin{cases} a = b \\ a \geqslant 0 \text{ ou } b \geqslant 0 \end{cases}$.

On peut écrire : $\sqrt{-x^2 + 5x + 9} = \sqrt{x-3} \Leftrightarrow \begin{cases} -x^2 + 5x + 9 = x - 3 \\ x - 3 \geqslant 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x^2 + 4x + 12 = 0 \\ x \geqslant 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (-x + 6)(x + 2) = 0 \\ x \geqslant 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = 6.$$

Donc, l'équation (2) a une seule solution : 6.

Inéquations irrationnelles

Pour résoudre de telles inéquations, il est difficile de procéder par implications, car les ensembles de solutions contiennent, en général, une infinité d'éléments ; on ne peut donc pas vérifier si chacun d'eux est solution de l'inéquation initiale.

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $x + \sqrt{x-1} \geqslant 3$ (1).

- Contraintes sur l'inconnue : $x \in [1\,;+\infty[$.
- On a : $\forall x \in [1\,;+\infty[$, $x + \sqrt{x-1} \geqslant 3 \iff \sqrt{x-1} \geqslant 3 - x$.

Or : $\forall x \in [1\,;+\infty[$, $\sqrt{x-1} \geqslant 0$; donc :

- si $3 - x \leqslant 0$, l'inéquation est vérifiée ; tout nombre réel de l'ensemble $[3\,;+\infty[$ est solution de (1).
- si $3 - x > 0$, on a : $\sqrt{x-1} \geqslant 3 - x \iff x - 1 \geqslant (3-x)^2$

$$\iff x^2 - 7x + 10 \leqslant 0$$
$$\iff (x-2)(x-5) \leqslant 0$$
$$\iff x \in [2\,;5]\,;$$

tout nombre réel de l'ensemble $[2\,;3[$ est solution de (1).

Donc, l'ensemble des solutions de l'inéquation (1) est : $[2\,;3[\cup [3\,;+\infty[= [2\,;+\infty[$.

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $\sqrt{x+1} + \sqrt{x+2} \geqslant 3$ (2).

- Contraintes sur l'inconnue : $x \geqslant -1$ et $x \geqslant -2$, donc $x \in [-1\,;+\infty[$.
- On a : $\forall x \in [-1\,;+\infty[$, $\sqrt{x+1} + \sqrt{x+2} \geqslant 3 \iff 2x + 3 + 2\sqrt{(x+1)(x+2)} \geqslant 9$

$$\iff \sqrt{(x+1)(x+2)} \geqslant -x + 3.$$

Or : $\forall x \in [-1\,;+\infty[$, $\sqrt{(x+1)(x+2)} \geqslant 0$; donc :

- si $-x + 3 \leqslant 0$, l'inéquation est vérifiée ; tout nombre réel de l'ensemble $[3\,;+\infty[$ est solution de (2).
- si $-x + 3 > 0$, on a : $\sqrt{(x+1)(x+2)} \geqslant -x + 3 \iff (x+1)(x+2) \geqslant (-x+3)^2$

$$\iff 9x - 7 \geqslant 0$$
$$\iff x \geqslant \frac{7}{9}\,;$$

tout nombre réel de l'ensemble $[\frac{7}{9}\,;3[$ est solution de (2).

Donc, l'ensemble des solutions de l'inéquation (2) est : $[\frac{7}{9}\,;3[\cup [3\,;+\infty[= [\frac{7}{9}\,;+\infty[$.

Exercices

2.a Résoudre dans $\mathbb{R}$ chacune des équations suivantes :

a) $x^4 + x^2 - 6 = 0$; *b)* $x^4 - 7x^2 + 6 = 0$;
c) $x^3 - 7x - 6 = 0$; *d)* $x^3 - x - 6 = 0$.

2.b Résoudre dans $\mathbb{R}$ chacune des inéquations suivantes :

a) $(x+1)^4 \geqslant (x-1)^2$;
b) $(x-1)^4 - 7(x-1)^2 + 12 < 0$;
c) $x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6 > 0$.

2.c Résoudre dans $\mathbb{R}$ chacune des équations suivantes :

a) $\sqrt{x^2 + x + 1} = 3x - 1$;
b) $\sqrt{x^2 - 5x + 6} = \sqrt{4x^2 + 4x + 1}$;
c) $\sqrt{-x+1} + \sqrt{x+3} = 2$.

2.d Résoudre dans $\mathbb{R}$ chacune des inéquations suivantes :

a) $\sqrt{-x^2 + 3x - 2} \geqslant x - 1$;
b) $\sqrt{2x^2 - 4x + 1} \geqslant -x + 3$;
c) $\sqrt{x-1} + \sqrt{x+1} < \sqrt{x}$.

2.e Soit P le polynôme défini par :
$P(x) = x^4 - 5x^3 + 6x^2 - 5x + 1$.

1. Démontrer que, pour tout nombre réel x non nul, on a :
$$P(x) = x^2\left[\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 5\left(x + \frac{1}{x}\right) + 4\right].$$

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $P(x) = 0$, puis l'inéquation $P(x) \geqslant 0$.

2.f ABCD est un rectangle tel que : BC = AB + 1 et AC = 2 AB. Calculer l'aire de ce rectangle.

3 Systèmes linéaires d'équations et d'inéquations

3.1. Systèmes de trois équations à trois inconnues

On considère le système (Σ) : $\begin{cases} ax + by + cz = d \\ a'x + b'y + c'z = d' \\ a''x + b''y + c''z = d'' \end{cases}$, où x, y et z sont les inconnues.

(Σ) est appelé système de trois équations du premier degré (ou système linéaire) à trois inconnues.

Résoudre (Σ), c'est déterminer tous les triplets (x, y, z) de nombres réels qui vérifient les trois équations.

Nous allons étudier deux méthodes de résolution d'un tel système : par substitution et par le pivot de Gauss.

Résolution par substitution

1. Résoudre le système (Σ_1) : $\begin{cases} x + y - 2z = 7 & (E_1) \\ 2x - y + z = 0 & (E_2) \\ 3x + y + z = 8 & (E_3). \end{cases}$

On déduit de l'équation (E_3) que : $z = -3x - y + 8$.

On remplace z par $-3x - y + 8$ dans les équations (E_1) et (E_2).

On obtient : $(\Sigma_1) \Leftrightarrow \begin{cases} 7x + 3y = 23 \\ -x - 2y = -8 \\ z = -3x - y + 8. \end{cases}$

Le système $\begin{cases} 7x + 3y = 23 \\ -x - 2y = -8 \end{cases}$ a un unique couple solution : $(2\ ;\ 3)$.

On en déduit que : $z = -3 \times 2 - 3 + 8 = -1$.

Donc, le système (Σ_1) a un unique triplet solution : $(2\ ;\ 3\ ;\ -1)$.

2. Résoudre le système (Σ_2) : $\begin{cases} 2x - y - 2z = 6 & (E_1) \\ x + y - z = 1 & (E_2) \\ x - 5y - z = 9 & (E_3). \end{cases}$

On déduit de l'équation (E_1) que : $y = 2x - 2z - 6$.

On remplace y par $2x - 2z - 6$ dans les équations (E_2) et (E_3).

On obtient : $(\Sigma_2) \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x - 2z - 6 \\ 3x - 3z = 7 \\ -9x + 9z = -21. \end{cases}$

Le système $\begin{cases} 3x - 3z = 7 \\ -9x + 9z = -21 \end{cases}$ a pour solutions tous les couples (x, z) de nombres réels tels que : $3x - 3z = 7$.

On donne à l'une des inconnues une valeur arbitraire, par exemple : $z = \lambda$.

On en déduit : $(\Sigma_2) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{7}{3} + \lambda \\ y = -\frac{4}{3} \\ z = \lambda \end{cases}$ $(\lambda \in \mathbb{R})$.

Donc, l'ensemble des triplets solutions de (Σ_2) est : $\left\{\left(\frac{7}{3} + \lambda\ ;\ -\frac{4}{3}\ ;\ \lambda\right), \lambda \in \mathbb{R}\right\}$.

Résolution par le pivot de Gauss

On peut également résoudre un système d'équations par combinaisons. Cette méthode nécessite généralement une vérification, sauf dans le cas du pivot de Gauss, dont nous admettrons qu'il transforme un système donné en un système équivalent.

Nous en exposons ici le principe sur quelques exemples.

1. Résoudre le système (Σ_1) : $\begin{cases} x - 5y - 7z = 3 & (E_1) \\ 5x + 3y + z = 3 & (E_2) \\ 3x + y - 2z = -1 & (E_3). \end{cases}$

• On élimine x dans (E_2) et dans (E_3), par combinaisons de chacune de ces équations avec (E_1).

On obtient : $(\Sigma_1) \Leftrightarrow \begin{cases} x - 5y - 7z = 3 & (E_1) \\ -28y - 36z = 12 & 5 \times (E_1) - (E_2) \\ -16y - 19z = 10 & 3 \times (E_1) - (E_3) \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 5y - 7z = 3 & (E_1) \\ -7y - 9z = 3 & (E'_2) \\ -16y - 19z = 10 & (E'_3). \end{cases}$

• On élimine y dans (E'_3), par combinaison de (E'_2) et (E'_3).

On obtient : $(\Sigma_1) \Leftrightarrow \begin{cases} x - 5y - 7z = 3 \\ -7y - 9z = 3. \\ z = 2 \end{cases}$

• Il reste à résoudre ce système « triangulaire » ; on obtient, en commençant par la dernière équation, puis en remontant : $z = 2$, $y = -3$ et $x = 2$.

Donc, le système (Σ_1) a un unique triplet solution : $(2\,;-3\,;2)$.

2. Résoudre le système (Σ_2) : $\begin{cases} x + y - 2z = 1 & (E_1) \\ x - 2y + z = 1 & (E_2) \\ -2x + y + z = 1 & (E_3). \end{cases}$

On obtient : $(\Sigma_2) \Leftrightarrow \begin{cases} x + y - 2z = 1 & (E_1) \\ 3y - 3z = 0 & (E_1) - (E_2) \\ 3y - 3z = 3 & 2 \times (E_1) + (E_3). \end{cases}$

Le système $\begin{cases} 3y - 3z = 0 \\ 3y - 3z = 3 \end{cases}$ n'a pas de solution ; donc, le système (Σ_2) n'a pas de solution.

3. Résoudre le système (Σ_3) : $\begin{cases} x + 2y + 5z = 4 & (E_1) \\ x + y + 2z = 6 & (E_2) \\ 2x + 3y + 7z = 10 & (E_3). \end{cases}$

On obtient : $(\Sigma_3) \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y + 5z = 4 & (E_1) \\ y + 3z = -2 & (E'_2) = (E_1) - (E_2) \\ y + 3z = -2 & (E'_3) = 2 \times (E_1) - (E_3). \end{cases}$

Donc, $(\Sigma_3) \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y + 5z = 4 & (E_1) \\ y + 3z = -2 & (E'_2). \end{cases}$

On donne à l'une des inconnues, y ou z, une valeur arbitraire, par exemple : $z = \lambda$.

On déduit de (E'_2) que : $y = -2 - 3\lambda$; on déduit de (E_1) que : $x = 4 - 2(-2 - 3\lambda) + 5\lambda = 8 + 11\lambda$.

Donc, l'ensemble des triplets solutions de (Σ_3) est : $\{(8 + 11\lambda\,;-2 - 3\lambda\,;\lambda),\ \lambda \in \mathbb{R}\}$.

Remarques

• *Nous admettons qu'un système linéaire de trois équations à trois inconnues a :*
 - ou bien aucune solution ;
 - ou bien une seule solution ;
 - ou bien une infinité de solutions.

• *Nous pouvons rencontrer des systèmes linéaires à trois inconnues, comportant plus de trois équations. Pour résoudre un tel système, on peut choisir trois équations, résoudre le système composé de ces trois équations, puis vérifier si les solutions trouvées sont solutions ou non des autres équations.*

3.2. Utilisations de systèmes linéaires

Systèmes linéaires d'équations

1. ***Problème d'Euler***

Trois personnes jouent ensemble. Elles conviennent qu'à chaque partie, le perdant double l'avoir de chacun des deux autres joueurs. Après trois parties où chacun en a perdu une, chaque joueur a un avoir de 2 400 F. Quels étaient les avoirs initiaux ?

Choix des inconnues

On désigne : – par x l'avoir initial du joueur A, perdant de la première partie ;
– par y l'avoir initial du joueur B, perdant de la deuxième partie ;
– par z l'avoir initial du joueur C, perdant de la troisième partie.

Mise en équations

Le tableau suivant indique les avoirs respectifs des joueurs A, B et C à la fin de chaque partie :

	fin de la 1re partie	fin de la 2e partie	fin de la 3e partie
joueur A	$x - y - z$	$2(x - y - z) = 2x - 2y - 2z$	$2(2x - 2y - 2z) = 4x - 4y - 4z$
joueur B	$2y$	$2y - (x - y - z) - 2z = -x + 3y - z$	$2(-x + 3y - z) = -2x + 6y - 2z$
joueur C	$2z$	$4z$	$4z - (2x - 2y - 2z) - (-x + 3y - z) = -x - y + 7z$

On obtient finalement le système : $\begin{cases} 4x - 4y - 4z = 2\,400 \\ -2x + 6y - 2z = 2\,400 \\ -x - y + 7z = 2\,400 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y - z = 600 & (E_1) \\ -x + 3y - z = 1\,200 & (E_2) \\ -x - y + 7z = 2\,400 & (E_3). \end{cases}$

Résolution

Elle peut se faire par la méthode du pivot de Gauss.
On utilise ici une autre méthode suggérée par la nature des équations (E_1), (E_2) et (E_3).
En additionnant membre à membre les trois équations, on obtient : $x + y + z = 7\,200$ (E_4).

On en déduit que : $\begin{cases} 2x = 7\,800 & (E_1) + (E_4) \\ 4y = 8\,400 & (E_2) + (E_4) \\ 8z = 9\,600 & (E_3) + (E_4). \end{cases}$

Conclusion

Les avoirs initiaux des joueurs A, B et C étaient respectivement de : 3 900 F, 2 100 F et 1 200 F.

2. **Dans un tétraèdre, les quatre faces ont le même périmètre.**
Démontrer que les arêtes opposées sont deux à deux de même longueur.

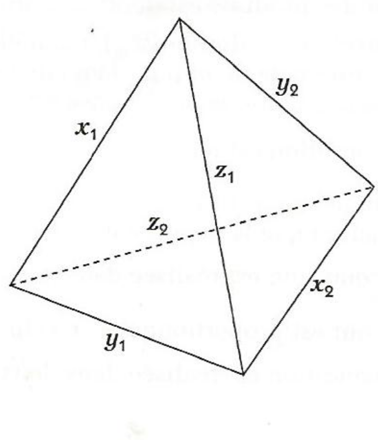
Choix des inconnues

On désigne par (x_1, x_2), (y_1, y_2) et (z_1, z_2) les couples d'arêtes opposées.

Mise en équations

Les périmètres des quatre faces du tétraèdre sont : $x_1 + y_1 + z_1$; $x_1 + y_2 + z_2$; $x_2 + y_2 + z_1$; $x_2 + y_1 + z_2$.
Dire que les quatre faces ont le même périmètre équivaut à écrire

le système (Σ) : $\begin{cases} x_1 + y_1 + z_1 = x_1 + y_2 + z_2 \\ x_1 + y_1 + z_1 = x_2 + y_2 + z_1 \\ x_1 + y_1 + z_1 = x_2 + y_1 + z_2. \end{cases}$



Résolution

$(\Sigma) \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 + z_1 = y_2 + z_2 \\ x_1 + y_1 = x_2 + y_2 \\ x_1 + z_1 = x_2 + z_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 - y_2 = z_2 - z_1 & (E_1) \\ x_1 - x_2 = y_2 - y_1 & (E_2) \\ x_1 - x_2 = z_2 - z_1 & (E_3). \end{cases}$

On en déduit que : $\begin{cases} x_1 - x_2 = z_1 - z_2 & (E_2) - (E_1) \\ x_1 - x_2 = z_2 - z_1 & (E_3) \end{cases}$;

donc : $z_1 - z_2 = z_2 - z_1 = 0$ et $\begin{cases} x_1 = x_2 \\ y_1 = y_2 \\ z_1 = z_2. \end{cases}$

Conclusion

Les arêtes opposées sont deux à deux de même longueur.

Programmation linéaire

Pour assurer une alimentation équilibrée de ses poulets, un éleveur doit leur donner quatre ingrédients A, B, C, D dont les besoins mensuels sont globalement et respectivement estimés à 75 kg, 30 kg, 10 kg, 20 kg.

Deux aliments préparés P et Q contiennent ces ingrédients dans les proportions suivantes :

	ingrédient A	ingrédient B	ingrédient C	ingrédient D
aliment P	50%	10 %	20 %	0%
aliment Q	30%	20 %	0%	40 %

1. L'éleveur désire acheter, dans la limite de la capacité de son véhicule qui est de 400 kg, une quantité d'aliments P et Q suffisante pour au moins un mois.

***a)* Traduire par un système d'inéquations les contraintes relatives à cet achat. Représenter graphiquement l'ensemble des solutions de ce système.**

***b)* En déduire les répartitions possibles des produits P et Q, sachant que ces produits sont conditionnés dans des sacs de 50 kg.**

2. L'éleveur veut effectuer ses achats au meilleur coût. Déterminer la répartition mensuelle des produits P et Q dans les cas suivants :

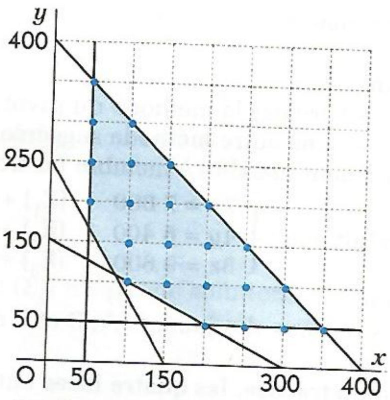
***a)* les produits P et Q sont vendus au même prix ;**

***b)* le produit P est deux fois plus cher que le produit Q ;**

***c)* le produit P est deux fois moins cher que le produit Q.**

1. On désigne respectivement par x et y les quantités achetées (en kg) des produits P et Q.

a) Les contraintes d'alimentation et de transport se traduisent par le système : $\begin{cases} 0{,}5\,x + 0{,}3\,y \geqslant 75 \\ 0{,}1\,x + 0{,}2\,y \geqslant 30 \\ 0{,}2\,x \geqslant 10 \\ 0{,}4\,y \geqslant 20 \\ x + y \leqslant 400 \end{cases}$



Pour résoudre ce système, on trace, dans un repère, les droites d'équations :

$$0{,}5\,x + 0{,}3\,y = 75,$$
$$0{,}1\,x + 0{,}2\,y = 30,$$
$$0{,}2\,x = 10,$$
$$0{,}4\,y = 20,$$
$$x + y = 400.$$

Les solutions du système sont tous les couples (x, y), coordonnées des points de la zone coloriée.

b) Le conditionnement de la marchandise se faisant en sacs de 50 kg, on ne retiendra des points précédents que ceux dont les coordonnées sont des multiples de 50.

Ces points déterminent toutes les répartitions possibles des produits P et Q.

2. *a)* Si les produits P et Q sont vendus au même prix, le coût de l'achat est donné par l'expression $k(x + y)$, k étant le prix, au kilogramme, de chaque produit.

Le coût des produits est donc proportionnel à $x + y$.

On considère les droites $(\mathscr{D}_m)$, parallèles entre elles, d'équations : $x + y = m$ $(m \in \mathbb{R})$ et on détermine la valeur minimale de m pour laquelle les contraintes précédentes sont vérifiées (zone coloriée).

D'après le graphique, la dépense est minimale lorsque : $x + y = 200$.

Cette condition est réalisée dans un seul cas : $\begin{cases} x = 100 \\ y = 100 \end{cases}$ (figure 1).

b) Cette fois, le coût est proportionnel à $2x + y$. Un raisonnement identique au précédent nous permet de conclure que la dépense est minimale lorsque : $2x + y = 300$.

Cette condition est réalisée dans deux cas : $\begin{cases} x = 50 \\ y = 200 \end{cases}$ et $\begin{cases} x = 100 \\ y = 100 \end{cases}$ (figure 2).

c) Le coût est proportionnel à $x + 2y$. La dépense est minimale lorsque : $x + 2y = 300$.

Cette condition est réalisée dans deux cas : $\begin{cases} x = 100 \\ y = 100 \end{cases}$ et $\begin{cases} x = 200 \\ y = 50 \end{cases}$ (figure 3).

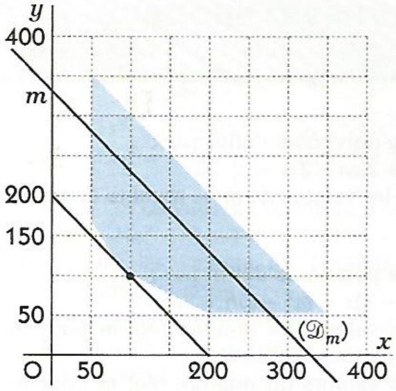


figure 1

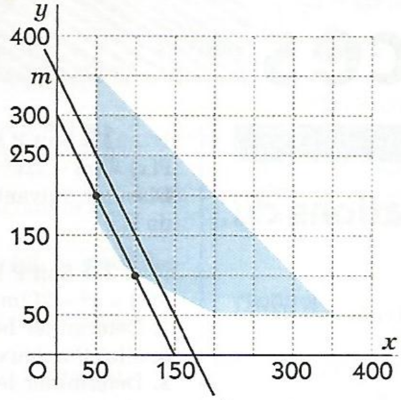


figure 2

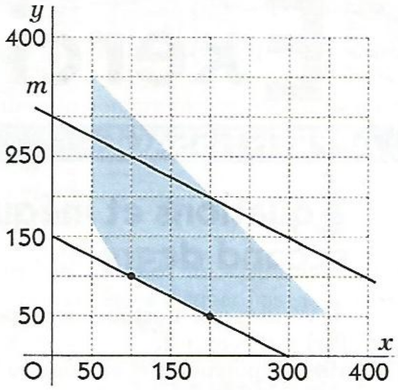


figure 3

Remarque

Un problème de programmation linéaire consiste à déterminer les coordonnées (x, y) d'un ou plusieurs points d'une partie du plan définie par un système d'équations ou inéquations traduisant un ensemble de contraintes. Ces contraintes étant réalisées, on peut rechercher, parmi ces points, ceux dont les coordonnées rendent maximale ou minimale une expression de la forme $ax + by$.

Exercices

3.a Résoudre chacun des systèmes suivants :

a) $\begin{cases} 3x + 2z = 1 \\ x + 2y - z = 8 \\ 3x + 2y + 2z = 7\ ; \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x - 3y + z = 1 \\ x + y - z = 3 \\ x - 9y + 5z = -7\ ; \end{cases}$

c) $\begin{cases} -x + 3y - z = 2 \\ 2x - y + 3z = -1 \\ 2x + 9y + 5z = 0. \end{cases}$

3.b **1.** Résoudre chacun des systèmes suivants :

a) $\begin{cases} 3x - 2y + 2z = -1 \\ x - 2y + z = -2\ ; \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + 2y - z = 4 \\ -x - y + 3z = -5. \end{cases}$

2. Démontrer que les deux systèmes précédents ont une solution commune.

3.c Après avoir effectué le changement d'inconnues $x + y = S$ et $xy = P$, résoudre chacun des systèmes suivants :

a) $\begin{cases} x^2 + y^2 - xy = 28 \\ x + y = 2\ ; \end{cases}$

b) $\begin{cases} \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x} = 2xy \\ x + y + xy = 0. \end{cases}$

3.d Trois sacs A, B et C, pesant respectivement 5 kg, 3 kg et 2 kg, contiennent un mélange de farines de blé et de manioc.
Déterminer le pourcentage de farine de blé contenu dans chacun de ces sacs, sachant que :
- le mélange des sacs A et B contient 62,5 % de farine de blé ;
- le mélange des sacs A et C contient 60 % de farine de blé ;
- le mélange des sacs B et C contient 56 % de farine de blé.

Exercices

APPRENTISSAGE

Équations et inéquations du second degré

1 Vérifier que 1 est racine du polynôme P défini par : $P(x) = x^2 - 3x + 2$.
Factoriser ce polynôme et en déduire l'autre racine.

2 Déterminer le nombre réel a pour que 2 soit racine du polynôme P défini par : $P(x) = 2x^2 - ax + 3a - 6$.
Factoriser alors P et en déduire son autre racine.

3 Mettre chacun des polynômes suivants sous forme canonique et en déduire ses racines éventuelles.
a) $P(x) = 4x^2 - 4x - 3$; *b)* $Q(x) = 2x^2 - 12x + 18$;
c) $R(x) = 2x^2 - x + 3$; *d)* $S(x) = 2x^2 - x - 6$.

4 Déterminer le polynôme du second degré P tel que $P(0) = -3$ et dont les racines sont -2 et $\frac{3}{2}$.

5 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :
a) $x^2 + (\sqrt{2} + \sqrt{3})x + \sqrt{6} = 0$;
b) $2x^2 - 4\sqrt{3}x + 6 = 0$;
c) $ax^2 - (2 + a^2)x + 2a = 0$ $(a \in \mathbb{R}^*)$;
d) $a^2x^2 - 2x + \frac{1}{a^2} = 0$ $(a \in \mathbb{R}^*)$.

6 Soit P le polynôme défini par :
$P(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$.
Déterminer une condition portant sur les nombres réels a, b et c pour que :
a) P ait deux racines opposées ;
b) P ait deux racines inverses l'un de l'autre ;
c) P ait une racine nulle ;
d) P ait une racine égale à -2.

7 Déterminer le polynôme du second degré P tel que $P(0) = 1$, $P(1) = 4$ et $P(-1) = 2$.
Démontrer que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $P(x) > 0$.

8 Utiliser la forme canonique pour étudier, suivant les valeurs de x, le signe de chacun des polynômes suivants :
a) $P(x) = x^2 - x + 1$; *b)* $Q(x) = 2x^2 + \frac{3}{2}x - 5$;
c) $R(x) = -x^2 - x - 6$; *d)* $S(x) = -2x^2 + 5x - 2$.

9 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :
a) $3x^2 + 6x - 9 \leqslant 0$; *b)* $2x^2 + x - 1 > 0$;
c) $2x^2 + x - 1 < 0$; *d)* $\sqrt{3}x^2 - 6x + 3\sqrt{3} \geqslant 0$;
e) $x^2 - 2(1 - \sqrt{3})x + 2\sqrt{3} < 0$; *f)* $x^2 - |2x + 3| > 0$.

10 Soit P le polynôme défini par :
$P(x) = x^2 - 3mx + 2(m^2 - 6)$.
Déterminer m pour que 2 soit racine de P.
Calculer alors l'autre racine.

11 Soit P le polynôme défini par :
$P(x) = x^2 - (2p + q)x + 3p - 2q$.
Déterminer p et q pour que -2 et 3 soient racines de P.

12 Soit P le polynôme défini par :
$P(x) = (m - 2)x^2 + 2(m - 2)x - 2$.
Discuter, suivant les valeurs de m, le nombre de racines de P.

13 Soit P le polynôme défini par :
$P(x) = x^2 - 2(2m - 3)x + m^2 - 3m + 3$.
1. Déterminer les valeurs du nombre réel m pour lesquelles P a deux racines distinctes.
2. Déterminer les valeurs du nombre réel m pour lesquelles P a une racine double et calculer, dans chacun des cas, cette racine.

14 ABCD est un rectangle tel que :
$\frac{AB}{BC} = \frac{AB + BC}{AB} = k$. Calculer k.

Somme et produit des racines

15 Déterminer, s'ils existent, deux nombres réels dont la somme est S et le produit P dans chacun des cas suivants :
a) $S = -1$ et $P = 12$; *b)* $S = -9$ et $P = 20$;
c) $S = 3$ et $P = 4$; *d)* $S = \sqrt{2}$ et $P = \frac{1}{2}$.

16 Déterminer deux nombres réels dont la somme est 1 et la somme de leurs inverses est $-\frac{1}{6}$.

17 **Problème de Newton**
Un triangle rectangle a pour périmètre 30 m et pour aire 30 m². Quelles sont ses dimensions ?

18 L'aire d'un jardin rectangulaire est égale à 360 m². Si on augmente sa longueur et sa largeur de 6 m, l'aire est alors égale à 630 m².
Quelles sont les dimensions de ce jardin ?

19 Déterminer, s'ils existent, les deux nombres x' et x'' dans chacun des cas suivants :
a) $x'^2 + x''^2 = \frac{25}{4}$ et $x'x'' = -3$;
b) $x'x'' = -6$ et $\frac{1}{x'} + \frac{1}{x''} = \frac{1}{6}$;
c) $\frac{x''}{x'} + \frac{x'}{x''} = -\frac{25}{12}$ et $x'x'' = -\frac{1}{3}$.

20 Soit P le polynôme défini par :
$P(x) = x^2 + 2(m - 1)x + m - 3$.
Discuter, suivant les valeurs de m, le nombre et le signe des racines de ce polynôme.

21 Soit P le polynôme défini par :
$P(x) = x^2 + (2m + 1)x + m^2 + 1$.
Déterminer les valeurs du nombre réel m pour que P ait deux racines α et β telles que :
a) $\alpha^2 + \beta^2 = 29$;
b) $|\alpha - \beta| = 1$.
Dans chacun des cas, calculer α et β.

Équations bicarrées

22 Résoudre dans $\mathbb{R}$ chacune des équations suivantes :

a) $x^4 - 11x^2 + 18 = 0$; b) $x^4 + x^2 + 1 = 0$;
c) $9x^4 - 12x^2 + 4 = 0$; d) $2x^4 + 11x^2 + 5 = 0$.

23 On considère l'équation d'inconnue x :
$x^4 + (m-2)x^2 + m + 1 = 0$.
Déterminer les valeurs du nombre réel m pour lesquelles cette équation a :
a) quatre solutions distinctes ;
b) deux solutions distinctes ;
c) trois solutions distinctes.

24 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :
$x^4 - 2(a^2 + b^2)x^2 + (a^2 - b^2)^2 = 0$, où a et b sont deux nombres réels donnés.

Équations et inéquations irrationnelles

25 Résoudre dans $\mathbb{R}$ chacune des équations suivantes :

a) $\sqrt{2 - x^2} - \sqrt{x^2 - 1} = 0$; b) $\sqrt{4 - x^2} = x - 1$;
c) $\sqrt{x^2 - 9} + x = 9$; d) $\sqrt{x^2 - 9} + x = -9$.

26 Résoudre dans $\mathbb{R}$ chacune des équations suivantes :

a) $\sqrt{x^3 + 3x^2 - x + 1} = x - 3$;
b) $\sqrt{x^3 + 3x^2 - x + 1} = 3 - x$.

27 Résoudre dans $\mathbb{R}$ chacune des équations suivantes :

a) $\sqrt{x} + \sqrt{x+1} = \sqrt{2x+1}$; b) $\sqrt{3 - 2x} + \sqrt{5 + 2x} = 4$;
c) $\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1} = 2\sqrt{x}$; d) $\sqrt{2x+1} - \sqrt{2x-1} = 1$.

28 Démontrer, sans la résoudre, que l'équation suivante n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$:
$\sqrt{-2x^2 + 3x + 5} = x^2 - 9$.

29 Résoudre dans $\mathbb{R}$ chacune des inéquations suivantes :

a) $\sqrt{2x + 3} > \sqrt{x - 1}$; b) $\sqrt{3 - 2x} > \sqrt{x}$;
c) $\sqrt{2(x^2 - 2x + 2)} < \sqrt{x^2 + 1}$;
d) $\sqrt{3x^2 + 2x - 1} < \sqrt{2x^2 + x + 1}$;
e) $\sqrt{x^2 + 6x + 6} \geqslant |2x + 1|$.

30 Résoudre dans $\mathbb{R}$ chacune des inéquations suivantes :

a) $\sqrt{3(x^2 - 1} > 2x - 1$; b) $\sqrt{5x - 4} \geqslant \sqrt{x + 2}$;
c) $\sqrt{x} + \sqrt{x+1} < \sqrt{x+2}$; d) $\sqrt{x+4} + \sqrt{x-1} > \sqrt{4x+5}$;
e) $\sqrt{6x+2} - \sqrt{3x} \leqslant \sqrt{9x-2}$; f) $\sqrt{2x+1} - \sqrt{2x-1} > 1$.

Systèmes linéaires

31 Résoudre et discuter, suivant les valeurs du nombre réel m, chacun des systèmes suivants :

a) $\begin{cases} (\sqrt{2} - 1)x - my = \sqrt{2} - 1 \\ x - (\sqrt{2} + 1)y = m \end{cases}$; b) $\begin{cases} mx\sqrt{2} - 3y\sqrt{3} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ -x\sqrt{3} + 2my\sqrt{2} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \end{cases}$

32 Déterminer le nombre réel m pour que le système suivant ait un couple unique de solution :
$\begin{cases} (m-1)x - 2y = m \\ 4x - (m+1)y = m + 1 \end{cases}$
Résoudre alors ce système.

33 Résoudre, en utilisant un changement d'inconnues, chacun des systèmes d'équations suivants :

a) $\begin{cases} \dfrac{4}{x} - \dfrac{5}{y} = -3 \\ \dfrac{2}{x} - \dfrac{3}{y} = 1 \end{cases}$; b) $\begin{cases} 5(x+y) - 3(x-y) = 9\sqrt{2} \\ 3(x+y) + (x-y) = 4\sqrt{2} \end{cases}$;

c) $\begin{cases} 2\sqrt{x} + 3\sqrt{y} = -1 \\ \sqrt{x} + 2\sqrt{y} = 2 \end{cases}$; d) $\begin{cases} 4x^2 - y^2 = 12 \\ x^2 + y^2 = 3 \end{cases}$

34 Résoudre chacun des systèmes suivants :

a) $\begin{cases} x^3 + y^3 = -7 \\ x + y = -1 \end{cases}$; b) $\begin{cases} x + y + 4xy = -1 \\ 3(x + y) - xy = 10 \end{cases}$;

c) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 5 \\ xy = -6 \end{cases}$; d) $\begin{cases} x + 3y = -2 \\ 3x^2 - 7y^2 = 12 \end{cases}$.

35 Le plan est muni du repère (O, I, J).
1. Représenter graphiquement l'ensemble E des points M dont les coordonnées $(x\,;\,y)$ vérifient le système (Σ)

d'inéquations : $\begin{cases} x + 2y \geqslant 6 \\ 5x + 4y \leqslant 40 \\ x \geqslant 0 \\ 0 \leqslant y \leqslant 7 \end{cases}$.

2. Parmi les points de E, déterminer ceux dont les coordonnées :
- rendent maximale l'expression $x + y$;
- rendent maximale en nombre entier $x + y$.

Préciser les valeurs de ces maximums.

3. Parmi les points de E, déterminer celui dont les coordonnées rendent minimale l'expression $2x + y$. Préciser la valeur de ce minimum.

36 Résoudre les systèmes suivants :

a) $\begin{cases} 2x + 3y - 5z = -11 \\ 4x + y - 2z = -8 \\ x - 2y + z = -2 \end{cases}$; b) $\begin{cases} x - 2y + z = -5 \\ -x + y + 2z = -4 \\ 2x - y - z = 5 \end{cases}$;

c) $\begin{cases} x + 2y + 3z = -2 \\ 2x + 3y + z = 1 \\ 3x + y + 2z = 1 \end{cases}$; d) $\begin{cases} x - 2y = \sqrt{2} \\ y - 2z = \sqrt{2} \\ z - 2x = \sqrt{2} \end{cases}$.

37 Le plan est muni du repère (O, I, J).
Déterminer une équation de la parabole dont la courbe représentative passe par les points

$A\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}2\\-5\end{pmatrix}$, $C\begin{pmatrix}3\\-12\end{pmatrix}$.

38 Une ménagère se rend au marché et achète des bananes, des mangues et des ananas dont les prix à l'unité sont respectivement 25 F, 60 F et 80 F. Elle achète un total de 12 fruits pour une somme de 640 F. Déterminer le nombre de fruits de chaque variété.

39 Les faces d'un pavé droit ont pour aires, en cm^2, 52, 78 et 96. Calculer le volume de ce pavé.

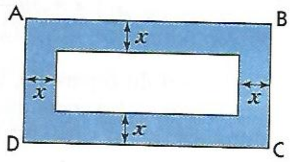
APPROFONDISSEMENT

40 Peut-on trouver deux nombres réels tels que leur somme et leur produit soient égaux à un même nombre réel k ? Discuter suivant la valeur de k.

41 On considère l'équation d'inconnue x :
$x^2 + m(m+3)x + m^3 = 0$.
Déterminer le nombre réel m pour que cette équation ait deux solutions α et β telles que : $\alpha^2 = \beta$.

42 Un livre a la forme d'un pavé droit ayant pour volume 900 cm^3, pour aire totale 1 072 cm^2 et pour longueur totale des arêtes 180 cm.
Soit P le polynôme défini par :
$P(x) = (x-a)(x-b)(x-c)$, où a, b, c désignent les dimensions de ce pavé.
1. Exprimer $P(x)$ en fonction de x.
2. Trouver une racine évidente de P et en déduire les dimensions de ce livre.

43 Un rectangle ABCD a pour dimensions : AB = 2 et BC = 1.



Déterminer la largeur x de la bande coloriée pour que l'aire de cette bande soit égale à la moitié de l'aire du rectangle ABCD.

44 Un point M décrit un segment [AB] de longueur 1. ACDM et MEFB sont des carrés.

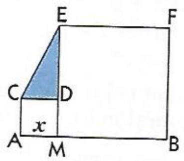


figure 1

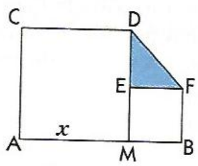
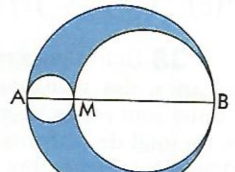


figure 2

On pose AM = x et on désigne par $\mathcal{A}(x)$ l'aire coloriée.
1. *a)* Exprimer $\mathcal{A}(x)$ en fonction de x dans les deux cas suivants :
$x \in [0\,;\,\frac{1}{2}]$ (fig. 1) et $x \in]\frac{1}{2}\,;\,1]$ (fig. 2).
b) Discuter, suivant les valeurs du nombre réel k, le nombre de solutions de l'équation : $\mathcal{A}(x) = k$.
2. *a)* Construire la courbe représentative de la fonction $\mathcal{A}$ dans un repère orthogonal.
b) Retrouver graphiquement les résultats précédents et en déduire les valeurs de x pour lesquelles la fonction $\mathcal{A}$ présente un maximum.

45 Dans la figure ci-contre, on a : AB = 1.
On pose AM = x et on désigne par $\mathcal{A}(x)$ l'aire coloriée.



1. Déterminer x pour que l'aire coloriée soit égale à la moitié de l'aire du cercle de diamètre [AB].
2. Discuter, suivant les valeurs du nombre réel k, le nombre de solutions de l'équation : $\mathcal{A}(x) = k$.

46 Le problème du messager
Ce problème ancien concerne une armée de cinquante kilomètres de long. Alors que l'armée avance à une vitesse constante, un messager part de l'arrière-garde, galope pour aller délivrer un message à l'avant, puis revient à l'arrière-garde. Il arrive exactement au moment où l'armée a parcouru cinquante kilomètres.
Quelle distance totale a parcouru le messager ?
(On désignera par v et V les vitesses respectives de l'armée et du messager et on posera $x = \frac{V}{v}$.)

47 Le problème des paysans chinois
Le « dou » est une unité chinoise de volume (valant environ deux litres).
Les récoltes de blé de trois années consécutives ont été successivement bonne, médiocre et mauvaise.
Déterminer les quantités de grain produites par une gerbe de chacune de ces trois récoltes, sachant que :
- deux gerbes de la bonne récolte ont donné un dou de grain, plus le grain d'une gerbe de la médiocre ;
- trois gerbes de la médiocre ont donné un dou de grain, plus le grain d'une gerbe de la mauvaise ;
- quatre gerbes de la mauvaise récolte ont donné un dou de grain, plus le grain d'une gerbe de la bonne.

48 Déterminer un nombre de trois chiffres sachant que :
- la somme de ces chiffres est égale à 17 ;
- si on permute le chiffre des dizaines et celui des centaines, le nombre augmente de 360 ;
- si on permute le chiffre des unités et celui des centaines, le nombre diminue de 198.

49 Au marché, trois clientes achètent les mêmes variétés de fruits.
La première achète 2 ananas, 5 mangues et 4 papayes ; elle paie 620 F.
La deuxième achète 3 ananas, 5 mangues et 1 papaye ; elle paie 530 F.
La troisième achète 2 ananas, 7 mangues et 8 papayes.
Combien doit-elle payer ?

50 Pour remplir un bassin, on dispose de trois robinets A, B et C.
Avec A et B, le bassin se remplit en 20 minutes.
Avec B et C, le bassin se remplit en 15 minutes.
Avec A et C, le bassin se remplit en 12 minutes.
1. Combien faut-il de temps pour remplir le bassin avec chacun des robinets fonctionnant seul ?
2. Combien faut-il de temps pour remplir le bassin avec les trois robinets ouverts ?

51 Est-il possible d'écrire, sur les faces d'un tétraèdre, des nombres deux à deux distincts, ayant la propriété suivante : « la somme des nombres écrits sur les faces ayant un sommet commun est constante » ?
Justifier votre réponse.

52 On désigne par $\overline{abc}$ un nombre de trois chiffres où a, b et c désignent respectivement les chiffres des centaines, des dizaines et des unités.
Déterminer le nombre $\overline{abc}$ sachant que :
- la somme de ses chiffres est égale à 15 ;
- le nombre $\overline{bca}$ lui est supérieur de 432 ;
- le nombre $\overline{cab}$ lui est inférieur de 243.

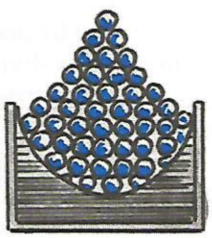
11 Dénombrement

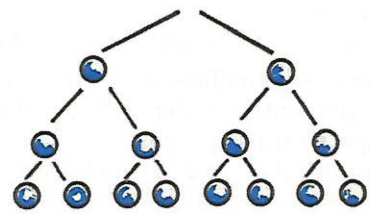
Le code d'une serrure est constitué de trois chiffres suivis de deux voyelles. Combien doit-on faire d'essais pour être sûr d'ouvrir la serrure lorsqu'on a oublié son code ?

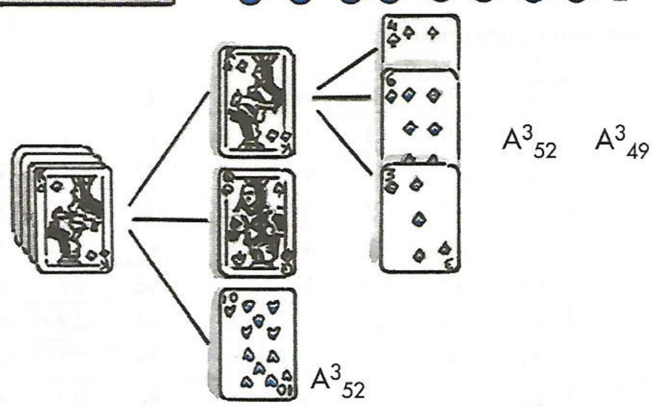
Dix athlètes prennent le départ d'une course. Combien y a-t-il d'arrivées possibles ?

Combien y a-t-il de façons de sélectionner une équipe de 6 joueurs parmi les 10 membres d'un club ?

Ces questions constituent des exemples simples de problèmes de dénombrement. L'objet de ce chapitre est de mettre en place des outils pour les résoudre.







SOMMAIRE

1 Premiers outils pour dénombrer

1.1. Le comptage

1. Soit E l'ensemble défini par : E = {1 ; 2 ; 3 ; 4}.
***a)* Écrire tous les nombres de trois chiffres distincts à l'aide des éléments de E. Combien y en a-t-il ?**
***b)* Parmi ces nombres, combien sont divisibles par 6 ? divisibles par 9 ?**

Solution

a) Pour écrire un nombre de trois chiffres distincts, on peut procéder en deux étapes :
– choisir trois éléments de E ;
– écrire tous les nombres distincts obtenus à partir de ces trois éléments.

On obtient les 24 nombres ci-contre.

123 ;	132 ;	213 ;	231 ;	312 ;	321 ;
124 ;	142 ;	214 ;	241 ;	412 ;	421 ;
134 ;	143 ;	314 ;	341 ;	413 ;	431 ;
234 ;	243 ;	324 ;	342 ;	423 ;	432.

b) Parmi ces 24 nombres, 6 sont divisibles par 6 (132, 312, 234, 324, 342, 432) et 6 sont divisibles par 9 (234, 243, 324, 342, 423, 432.

2. Combien y a-t-il de nombres entiers naturels premiers inférieurs à 100 ?

Solution

Un nombre entier naturel est premier s'il admet exactement deux diviseurs : 1 et lui-même.

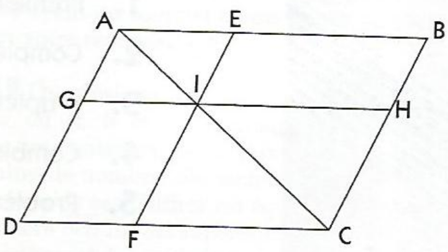
On écrit les 100 premiers nombres entiers naturels non nuls. Pour déterminer, parmi ces nombres, ceux qui sont premiers, on peut procéder de la façon suivante :
– on supprime 1 qui n'est pas premier ;
– on supprime les multiples de 2 distincts de 2, puis les multiples de 3 distincts de 3, les multiples de 5 distincts de 5 et enfin, les multiples de 7 distincts de 7.

On obtient le tableau ci-dessous.

~~1~~	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
~~21~~	~~22~~	23	~~24~~	~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29	~~30~~
31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	~~35~~	~~36~~	37	~~38~~	~~39~~	~~40~~
41	~~42~~	43	~~44~~	~~45~~	~~46~~	47	~~48~~	~~49~~	~~50~~
~~51~~	~~52~~	53	~~54~~	~~55~~	~~56~~	~~57~~	~~58~~	59	~~60~~
61	~~62~~	~~63~~	~~64~~	~~65~~	~~66~~	67	~~68~~	~~69~~	~~70~~
71	~~72~~	73	~~74~~	~~75~~	~~76~~	~~77~~	~~78~~	79	~~80~~
~~81~~	~~82~~	83	~~84~~	~~85~~	~~86~~	~~87~~	~~88~~	89	~~90~~
~~91~~	~~92~~	~~93~~	~~94~~	~~95~~	~~96~~	97	~~98~~	~~99~~	~~100~~

On vérifie que les nombres restants sont tous premiers ; il y en a 25.
Cette méthode, appelée « crible d'Eratosthène », sera justifiée en classe de terminale.

3. Sur la figure ci-contre, combien a-t-on tracé de triangles ? de parallélogrammes ?



Solution

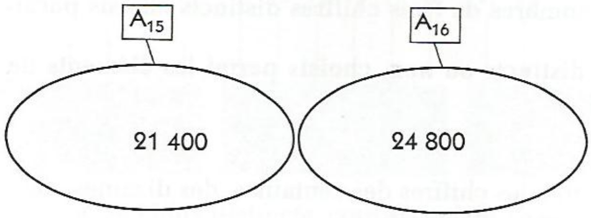
• Il y a 6 triangles : AIE, ACB, ICH, AGI, ADC, IFC.
• Il y a 9 parallélogrammes : ABCD, AEIG, EBHI, ABHG, GIFD, IHCF, GHCD, AEFD, EBCF.

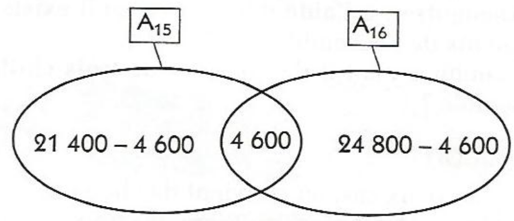
1.2. Les diagrammes

1. Une station de radio diffuse les mêmes publicités à 15 heures et à 16 heures. D'après un sondage, on estime qu'il y a 21 400 auditeurs à 15 heures et 24 800 à 16 heures.
Déterminer le nombre d'auditeurs ayant entendu ces publicités :
***a)* si les personnes qui écoutent la radio à 15 heures ne l'écoutent plus à 16 heures ;**
***b)* si 4 600 personnes écoutent la radio à 15 heures et à 16 heures.**

Solution

Dans chacun des cas, on représente les données par un diagramme dans lequel A_{15} et A_{16} désignent les ensembles des auditeurs écoutant la station de radio respectivement à 15 heures et à 16 heures.



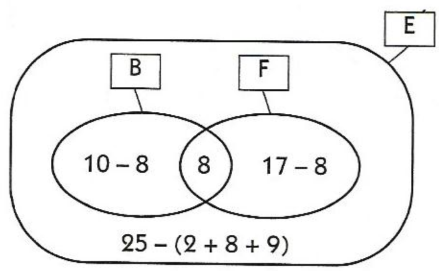


a) Dans le premier cas, on a : 21 400 + 24 800 = 46 200 ; il y a 46 200 auditeurs.
b) Dans le second cas, on a : (21 400 – 4 600) + 4 600 + (24 800 – 4 600) = 41 600 ; il y a 41 600 auditeurs.

2. Dans un groupe de 25 personnes, 10 jouent au basket-ball, 17 jouent au football et 8 pratiquent ces deux sports.
Déterminer le nombre de personnes :
***a)* qui jouent seulement au football, seulement au basket-ball ;**
***b)* qui ne pratiquent aucun de ces deux sports.**

Solution

Sur le diagramme ci-contre, E représente l'ensemble des 25 personnes, B et F les sous-ensembles de ces personnes pratiquant respectivement le basket-ball et le football.
a) On a : $17 - 8 = 9$, donc 9 personnes jouent seulement au football ; de même, $10 - 8 = 2$, donc 2 personnes jouent seulement au basket-ball.
b) On en déduit que : $25 - (9 + 2 + 8)$, c'est-à-dire 6 personnes ne pratiquent aucun de ces deux sports.

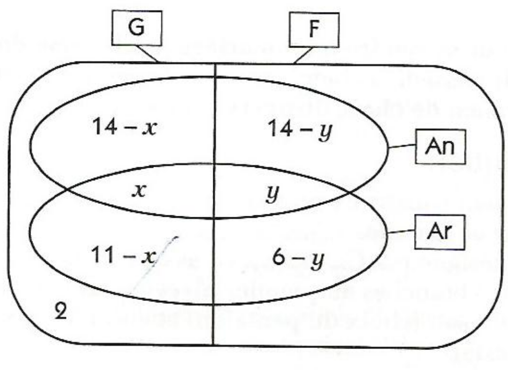


3. Dans une classe de 40 élèves, on relève les données suivantes :
- **il y a 16 filles parmi lesquelles 12 apprennent l'anglais et 6 apprennent l'arabe ;**
- **26 élèves suivent les cours d'anglais, 17 suivent les cours d'arabe, 7 suivent les deux cours ;**
- **2 garçons ne suivent aucun de ces deux cours.**

Déterminer le nombre de filles de cette classe qui suivent les deux cours de langue.
Déterminer le nombre de filles qui ne suivent aucune de ces deux matières.

Solution

Dans le diagramme suivant, G et F représentent respectivement les ensembles des garçons et des filles de cette classe ; de plus, An et Ar représentent les ensembles des élèves étudiant respectivement l'anglais et l'arabe.
On désigne respectivement par x et y les nombres de garçons et de filles apprenant les deux langues.
On sait que dans la classe :
- il y a 16 filles, donc 24 garçons ;
- 12 filles, donc 14 garçons apprennent l'anglais ;
- 6 filles, donc 11 garçons apprennent l'arabe.



On sait de plus que :

$$\begin{cases} (14-x)+x+(11-x)+2=24 \\ x+y=7 \end{cases}$$

On en déduit que : $x = 3$ et $y = 4$.
Ainsi, 4 filles suivent les deux cours de langue.
Il y a donc : $16 - (8 + 4 + 2)$, c'est-à-dire 2 filles qui ne suivent aucune de ces deux matières.

1.3. Les arbres

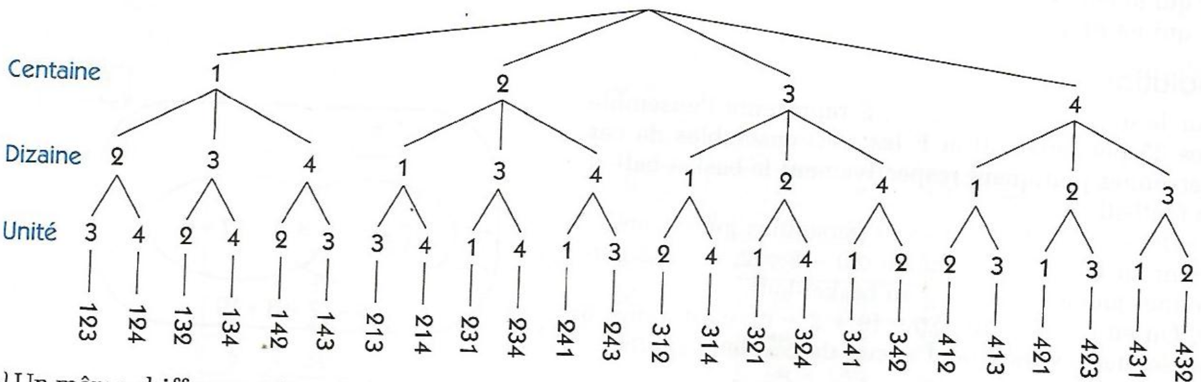
1. On reprend les données de l'exercice 1 du paragraphe 1.1.
***a)* Démontrer, à l'aide d'un arbre, qu'il existe 24 nombres de trois chiffres distincts choisis parmi les éléments de l'ensemble {1 ; 2 ; 3 ; 4}.**
***b)* Combien y a-t-il de nombres de trois chiffres, distincts ou non, choisis parmi les éléments de cet ensemble ?**

Solution

Dans les deux cas, on convient de choisir dans l'ordre : les chiffres des centaines, des dizaines, des unités. On construit ainsi un arbre de choix à trois niveaux.

a) On obtient :
- 4 choix possibles pour le chiffre des centaines, donc 4 branches ;
- pour chacune de ces 4 branches, 3 choix possibles pour le chiffre des dizaines, donc : 4×3, c'est-à-dire 12 branches ;
- pour chacune de ces 12 branches, 2 choix possibles pour le chiffre des unités, donc : $4 \times 3 \times 2$, c'est-à-dire 24 branches.

À chacune des 24 branches de l'arbre ainsi construit, il correspond un des nombres cherchés.



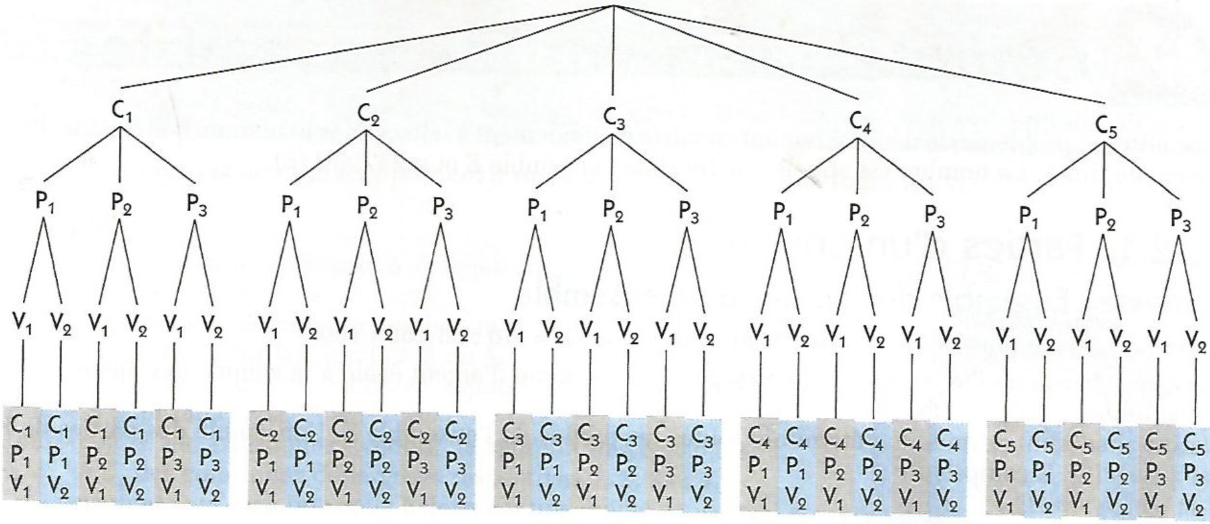
b) Un même chiffre peut être choisi une fois, deux fois ou trois fois. Il y a donc 4 choix possibles à chaque niveau. On obtient :
- 4 branches pour les centaines ;
- 4×4, c'est-à-dire 16 branches pour les dizaines ;
- $4 \times 4 \times 4$, c'est-à-dire 64 branches pour les unités.

On peut donc écrire 64 nombres de trois chiffres, distincts ou non, avec les éléments de l'ensemble {1 ; 2 ; 3 ; 4}.

2. Pour se rendre à un mariage, un homme doit choisir la chemise, le pantalon et la veste qu'il portera. Il possède 5 chemises, 3 pantalons et 2 vestes.
Combien de choix distincts peut-il ainsi effectuer ?

Solution

On peut construire un arbre à trois niveaux en choisissant dans l'ordre, par exemple, la chemise, le pantalon et la veste.
On désigne par C_1, C_2, C_3, C_4 et C_5 les chemises, P_1, P_2 et P_3 les pantalons, V_1 et V_2 les vestes.
On a 5 branches au premier niveau (choix de la chemise), puis 5×3, c'est-à-dire 15 branches au deuxième niveau (choix du pantalon) et enfin $5 \times 3 \times 2$, c'est-à-dire 30 branches au troisième niveau (choix de la veste).



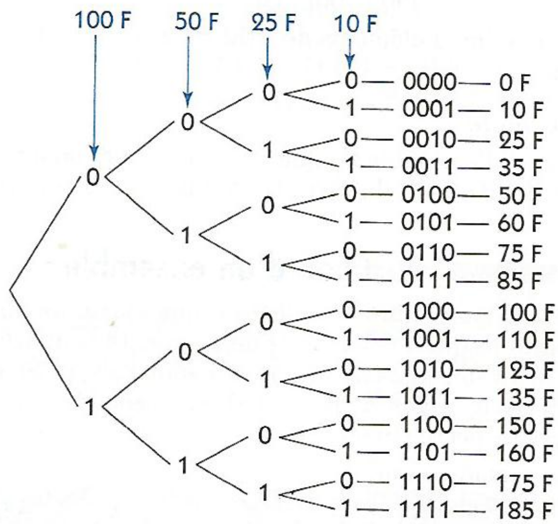
Il y a donc 30 choix distincts, correspondant chacun à une branche de l'arbre ainsi construit.

3. On dispose de quatre pièces de monnaie : une de 10 F, une de 25 F, une de 50 F et une de 100 F. Quelles sont toutes les sommes possibles que l'on peut constituer avec ces pièces ?

Solution

Pour systématiser cette recherche, on peut se demander, pour chaque pièce, si on la prend ou non.
On convient de noter respectivement 0 et 1 les réponses NON et OUI à cette question.
On construit ainsi un arbre dont chaque niveau correspond à une pièce de monnaie.
À chaque branche de cet arbre est associée une somme d'argent et l'ensemble des branches permet de déterminer toutes les sommes possibles.
Par exemple :
- à la branche 0110 est associé 50 + 25, c'est-à-dire la somme de 75 F ;
- à la branche 1101 est associé 100 + 50 + 10, c'est-à-dire la somme de 160 F.

Cette méthode est exhaustive, elle permet de déterminer toutes les sommes possibles.



Exercices

1.a De combien de façons peut-on descendre un escalier de 6 marches, sachant que l'on descend une, deux ou trois marches à la fois ?

1.b Un drapeau est constitué de trois bandes horizontales de trois couleurs différentes.
Combien de drapeaux différents peut-on constituer si l'on dispose de cinq couleurs distinctes ?

1.c Quatre couples sont réunis pour une soirée dansante. Les quatre hommes invitent chacun une femme à danser.
De combien de façons peut se faire cette invitation, sachant qu'aucun homme ne danse avec son épouse ?
Procéder par comptage, puis à l'aide d'un arbre de choix.

1.d Combien peut-on former d'anagrammes du mot ACCRA ? du mot BAOBAB ?

1.e Dans un établissement scolaire, il y a 55 % de filles et 45 % de garçons ; 12 % des garçons et 18 % des filles n'ont jamais redoublé une classe.
1. Quelle est la proportion des élèves n'ayant jamais redoublé ?
2. Quelle est la proportion de filles parmi les élèves n'ayant jamais redoublé ?

2 Compléments sur les ensembles

Résoudre un problème de dénombrement consiste généralement à déterminer le nombre d'éléments d'un ensemble fini E. Ce nombre est appelé ***cardinal*** de l'ensemble E et noté Card (E).

2.1. Parties d'un ensemble

Ensemble des parties d'un ensemble

Reprenons les données de l'exercice 3, §1.3. On pose : E = {10 ; 25 ; 50 ; 100}.

À chaque partie de l'ensemble E, il correspond une somme d'argent égale à la somme des éléments de cette partie.

L'arbre précédent permet de déterminer toutes les parties de l'ensemble E. L'ensemble des parties de E est noté $\mathcal{P}$(E). Il comprend :

- la partie vide Ø ;
- les singletons {10}, {25}, {50}, {100} ;
- les paires {10 ; 25}, {10 ; 50}, {10 ; 100}, {25 ; 50}, {25 ; 100}, {50 ; 100} ;
- les parties à trois éléments {10 ; 25 ; 50}, {10 ; 25 ; 100}, {10 ; 50 ; 100}, {25 ; 50 ; 100} ;
- l'ensemble E.

On a : $\mathcal{P}$(E) = {Ø ; {10} ; {25} ; {50} ; {100} ; {10 ; 25} ; {10 ; 50} ; {10 ; 100} ; {25 ; 50} ; {25 ; 100} ; {50 ; 100} ; {10 ; 25 ; 50} ; {10 ; 25 ; 100} ; {10 ; 50 ; 100} ; {25 ; 50 ; 100} ; E}.

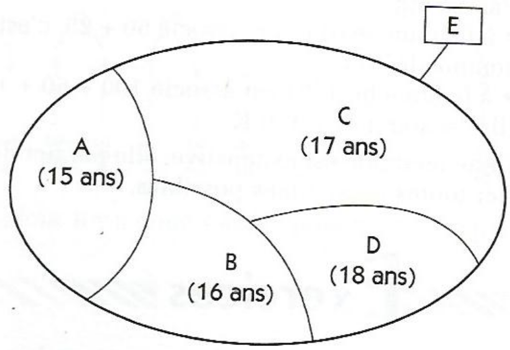
Le nombre d'éléments de $\mathcal{P}$(E) est égal au nombre de branches de l'arbre, c'est-à-dire 2^4.
On a : Card (E) = 4 et Card ($\mathcal{P}$(E)) = $2^4 = 16$.

Exemple

Soit E l'ensemble tel que : E = {a ; b ; c} ; on a : Card (E) = 3.
$\mathcal{P}$(E) = {Ø ; {a} ; {b} ; {c} ; {a ; b} ; {a ; c} ; {b ; c} ; {a ; b ; c}} ; Card($\mathcal{P}$(E)) = 8.

Partition d'un ensemble

Soit E l'ensemble des élèves d'une classe de 45 élèves parmi lesquels 8 sont âgés de 15 ans, 14 sont âgés de 16 ans, 18 sont âgés de 17 ans et 5 sont âgés de 18 ans.
On désigne par A, B, C et D les ensembles des élèves âgés respectivement de 15 ans, 16 ans, 17 ans et 18 ans.



On remarque que :
- les ensembles A, B, C et D sont non vides ;
- les ensembles A, B, C et D sont disjoints deux à deux ;
- la réunion des ensembles A, B, C et D est égale à l'ensemble E.

On dit que les ensembles A, B, C et D forment une partition de E.

Définition

Des parties d'un ensemble E forment une partition de E si :
- **elles sont non vides ;**
- **elles sont disjointes deux à deux ;**
- **leur réunion est égale à E.**

Exemples

Soit E l'ensemble tel que : E = {a ; b ; c ; d ; e ; f}.
- Les ensembles {a}, {b ; c ; f}, {d ; e} forment une partition de E.
- Les ensembles {a}, {b ; c ; f}, {b ; c ; d ; e} ne forment pas une partition de E car ces ensembles ne sont pas disjoints deux à deux.

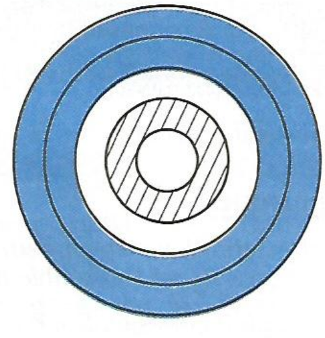
Propriété

Soit E un ensemble fini et E_1, E_2, E_3, ..., E_p des ensembles formant une partition de E.
On a : $\text{Card}(E) = \text{Card}(E_1) + \text{Card}(E_2) + \text{Card}(E_3) + ... + \text{Card}(E_p)$.

En effet, chaque élément de E appartient à un et un seul ensemble de la partition.

Exemples

• La figure ci-contre représente 5 disques concentriques de rayons respectifs 1, 2, 3, 4, 5.
On se propose de déterminer le nombre de couronnes de cette figure.
Toute couronne a pour largeur 1, 2, 3 ou 4.
Par exemple, la couronne hachurée a pour largeur 1, la couronne colorée a pour largeur 2.
L'ensemble E des couronnes est donc la réunion des ensembles E_1, E_2, E_3 et E_4 des couronnes de largeurs respectives 1, 2, 3 et 4.
Ces ensembles sont disjoints deux à deux car une même couronne ne peut pas avoir deux largeurs distinctes ; ils forment donc une partition de E.
Pour déterminer le nombre d'éléments de E, il suffit de calculer le cardinal de chacun des ensembles E_1, E_2, E_3 et E_4.



On a : $\text{Card}(E) = \text{Card}(E_1) + \text{Card}(E_2) + \text{Card}(E_3) + \text{Card}(E_4) = 4 + 3 + 2 + 1 = 10$.

• Soit E l'ensemble tel que : $E = \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5\}$. On se propose de déterminer combien de nombres on peut former avec des chiffres deux à deux distincts choisis parmi les éléments de E.
On peut écrire des nombres de 1, 2, 3, 4, 5 chiffres.
On désigne respectivement par A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 les ensembles (disjoints deux à deux) de ces nombres et par A la réunion de ces cinq ensembles.

On a : $\text{Card}(A_1) = 5$; $\text{Card}(A_2) = 5 \times 4$; $\text{Card}(A_3) = 5 \times 4 \times 3$;
$\text{Card}(A_4) = 5 \times 4 \times 3 \times 2$; $\text{Card}(A_5) = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$.

Donc : $\text{Card}(A) = 5 + 20 + 60 + 120 + 120 = 325$.

M Pour résoudre un problème de dénombrement, il peut être utile d'effectuer une partition de l'ensemble à dénombrer. Le cardinal de cet ensemble est alors la somme des cardinaux des ensembles de la partition.

On déduit de la propriété précédente les résultats suivants.

Conséquences

- **Pour toute partie A d'un ensemble fini E, on a : $\text{Card}(A) + \text{Card}(E \setminus A) = \text{Card}(E)$.**
- **Pour toutes parties A et B d'un ensemble fini E, on a :**
  $\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B) - \text{Card}(A \cap B)$.

2.2. Produit cartésien

Introduction

Au cours d'un examen, un candidat doit choisir successivement deux sujets : un sujet de mathématiques parmi trois et un sujet de physique parmi quatre.
De combien de façons peut-il effectuer ce choix ?

On convient de noter m_1, m_2, m_3 et p_1, p_2, p_3, p_4 les sujets proposés respectivement en mathématiques et en physique. On pose : $M = \{m_1 ; m_2 ; m_3\}$ et $P = \{p_1 ; p_2 ; p_3 ; p_4\}$.
Un tableau à double entrée permet de représenter tous les choix possibles que le candidat peut effectuer, chaque choix correspondant à un couple (m, p) tel que $m \in M$ et $p \in P$.

L'ensemble de ces couples est appelé produit cartésien des ensembles M et P et noté M × P.
L'ensemble M × P contient 12 éléments.

Il y a donc 12 choix possibles pour le candidat.

On aurait pu également trouver ce résultat en utilisant un arbre à deux niveaux.

M \ P	P_1	P_2	P_3	P_4
m_1	(m_1, p_1)	(m_1, p_2)	(m_1, p_3)	(m_1, p_4)
m_2	(m_2, p_1)	(m_2, p_2)	(m_2, p_3)	(m_2, p_4)
m_3	(m_3, p_1)	(m_3, p_2)	(m_3, p_3)	(m_3, p_4)
m_4	(m_4, p_1)	(m_4, p_2)	(m_4, p_3)	(m_4, p_4)

Définition

Soit A et B deux ensembles.

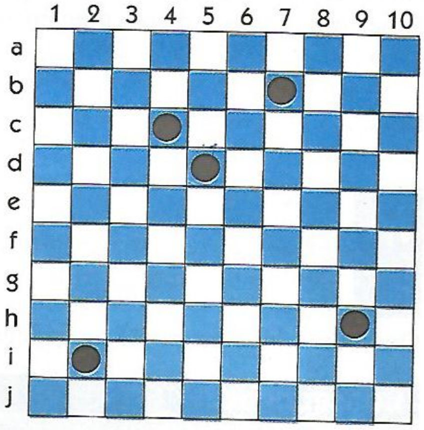
On appelle produit cartésien de A par B l'ensemble des couples (a, b) tels que $a \in A$ et $b \in B$.

Cet ensemble est noté A × B ; on lit « A croix B ».

Remarques

- *Cette définition s'étend à un nombre quelconque d'ensembles ; le produit cartésien des ensembles E_1, E_2, E_3, ..., E_p est l'ensemble noté $E_1 \times E_2 \times E_3 \times \ldots \times E_p$.*
- *Le produit cartésien $\underbrace{E \times E \times \ldots \times E}_{p \text{ fois}}$ est noté E^p.*
- *Les éléments du produit cartésien de deux ensembles sont appelés couples ; les éléments du produit cartésien de trois ensembles sont appelés triplets ; les éléments du produit cartésien $E_1 \times E_2 \times E_3 \times \ldots \times E_p$ sont appelés p-uplets.*

Exemples



- Pour repérer une case sur un damier ou un échiquier, on utilise généralement un code.
Par exemple, « d5 » désigne la case située à l'intersection de la 4^e^ ligne et de la 5^e^ colonne.
Cette notation utilise le produit cartésien E × F, où E et F désignent les ensembles des lignes et colonnes dont les éléments sont respectivement notés a, b, c, ... et 1, 2, 3, ...
Sur la figure ci-contre, on a placé cinq pions en b7, c4, d5, h9 et i2.
- 2488 D 5 est l'immatriculation d'un véhicule ; cette immatriculation est composée d'un nombre entier naturel non nul strictement inférieur à 10 000, suivi d'une lettre et d'un nombre de 1 à 10 correspondant à chacune des régions administratives du pays.
On désigne respectivement par A, B et C l'ensemble des nombres entiers naturels non nuls strictement inférieurs à 10 000, l'ensemble des lettres de l'alphabet et l'ensemble des nombres entiers naturels compris entre 1 et 10.

Toute immatriculation est associée à un élément de l'ensemble A × B × C.

Propriété

Soit A et B deux ensembles ayant respectivement m et n éléments.
On peut représenter les éléments de l'ensemble A × B à l'aide d'un tableau à double entrée contenant m lignes et n colonnes.
On en déduit que l'ensemble A × B a $m \times n$ éléments.
On aurait pu également construire un arbre à n niveaux, chaque niveau étant constitué de m branches.
On en déduit la propriété suivante.

Propriété

Pour tous ensembles finis A et B, on a : Card (A × B) = Card (A) × Card (B).

Remarques

On peut généraliser la propriété précédente à p ensembles.
- *Pour tous ensembles finis $E_1, E_2, E_3, ..., E_p$, on a :*
$Card(E_1 \times E_2 \times E_3 \times ... \times E_p) = Card(E_1) \times Card(E_2) \times Card(E_3) \times ... \times Card(E_p)$.
- *Pour tout ensemble E à n éléments, on a : $Card(E^p) = n^p$.*

Exemples

Reprenons les deux exemples précédents.

- Un damier comporte 10 lignes et 10 colonnes ; le nombre de cases est : Card $(E \times F) = 10 \times 10 = 100$. Pour un échiquier, on a 8 lignes et 8 colonnes, donc : $Card(E \times F) = 8 \times 8 = 64$.
- Le nombre de véhicules qu'il sera possible d'immatriculer par ce procédé est égal au nombre d'éléments de l'ensemble $A \times B \times C$. On a : $Card(A \times B \times C) = 9\,999 \times 26 \times 10$.

Exercices

2.a Soit E l'ensemble tel que : $E = \{1 ; 2 ; a ; b\}$. Écrire l'ensemble $\mathcal{P}(E)$ et déterminer Card($\mathcal{P}(E)$).

2.b Soit E l'ensemble tel que :
$E = \{4 ; 8 ; 9 ; 10 ; 15 ; 16 ; 21\}$. On désigne par M_2 et M_3 les en-sembles d'éléments de E qui sont respectivement multiples de 2 et de 3.
1. Démontrer que M_2, M_3 forment une partition de E.
2. En est-il de même si on remplace E par F tel que : $F = \{4 ; 8 ; 9 ; 10 ; 12 ; 15 ; 16 ; 18 ; 21\}$?

2.c Soit E l'ensemble des nombres entiers naturels inférieurs à 50. On désigne par M_2, M_3 et M_6 les ensembles d'éléments de E qui sont respectivement multiples de 2, de 3 et de 6.
1. Les ensembles M_2, M_3 et M_6 forment-ils une partition de E ?
2. Vérifier que : Card $(M_2 \cup M_3)$ = Card (M_2) + Card (M_3) – Card (M_6).

2.d On désigne par E_0, E_1, E_2, E_3 et E_4 les ensembles d'éléments de $\mathbb{N}$ dont les restes dans la division par 5 sont respectivement 0, 1, 2, 3 et 4 (par exemple, $28 \in E_3$).
Démontrer que les ensembles E_0, E_1, E_2, E_3 et E_4 forment une partition de l'ensemble $\mathbb{N}$.

2.e On lance un dé rouge et un dé vert, chacun d'eux ayant ses faces numérotées de 1 à 6.
Le résultat d'un lancer est le couple de nombres apparaissant sur la face supérieure de chaque dé.
1. Combien y a-t-il de résultats possibles ?
2. Combien y a-t-il de résultats pour lesquels la somme des deux nombres est supérieure ou égale à 9 ?

3 p-uplets, arrangements, permutations

3.1. p-uplets d'un ensemble

Définition et propriété

Définition

Soit E un ensemble à n éléments et p un nombre entier naturel non nul.

On appelle p-uplet de E tout élément de l'ensemble E^p.

Exemples

- $(5 ; 2)$, $(8 ; 8)$, $(2 ; 5)$ sont des couples de $\mathbb{N}^2$;
- $(0, 0, 1)$, $(1, 1, 0)$, $(0, 0, 0)$ sont des triplets de l'ensemble $\{0 ; 1\}$.
- (P, F, F, F, P, P, P, P, F, P) est un 10-uplet de l'ensemble {P ; F} ; il correspond, par exemple, à un résultat de 10 lancers consécutifs d'une pièce de monnaie (pile ou face).

Propriété

Le nombre de p-uplets d'un ensemble à n éléments est n^p.

En effet, d'après les résultats du §2.2., on a : Card(E^p) = (Card(E))^p.

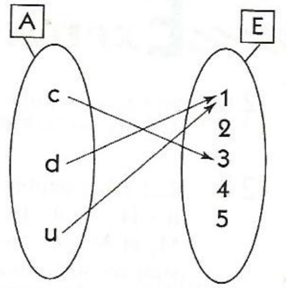
Exemples

• Soit E l'ensemble tel que : E = {1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5}.
Il existe 5^3, c'est-à-dire 125 nombres de trois chiffres, distincts ou non, écrits avec des éléments de E ; il existe 5^6 nombres de six chiffres écrit avec des éléments de E.

• Une entreprise doit commander trois voitures pour trois personnes différentes. Pour chacun des véhicules, on a le choix entre six couleurs. De combien de façons peut-on réaliser cette commande ?
Il y a autant de commandes possibles que de triplets de l'ensemble des 6 couleurs, donc : 6^3, c'est-à-dire 216 commandes.

Nombre d'applications d'un ensemble fini vers un ensemble fini

Reprenons l'exercice précédent. On désigne respectivement par c, d, u les centaines, dizaines, unités et par A l'ensemble {c ; d ; u}.
Tout nombre de trois chiffres écrits avec les éléments de E correspond à une application de l'ensemble A vers l'ensemble E.
Par exemple, le nombre 311 correspond à l'application ci-contre.
Réciproquement, à toute application de A vers E est associé un des nombres cherchés.



Le nombre d'applications de A vers E est donc 5^3.

Plus généralement, on admet la propriété suivante.

Propriété

Le nombre d'applications d'un ensemble à p éléments vers un ensemble à n éléments est n^p.

Exemple

On veut ranger 15 livres dans une bibliothèque comportant 3 étagères.
Il y a 3^{15}, c'est-à-dire 14 348 907 façons différentes d'effectuer ce rangement.

3.2. Arrangements

Définition et propriété

On reprend l'exercice du paragraphe précédent avec l'ensemble E tel que : E = {1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5} et une contrainte supplémentaire : les trois chiffres composant les nombres cherchés sont deux à deux distincts.
On peut déterminer ces nombres à l'aide d'un arbre (§1.3.).
Ainsi, il existe $5 \times 4 \times 3$ nombres de trois chiffres deux à deux distincts.
Le triplet associé à chacun de ces nombres est appelé arrangement de trois éléments choisis parmi les éléments de l'ensemble A.

Le nombre de ces arrangements est noté A_5^3 ; on a : $A_5^3 = 5 \times 4 \times 3$.

De même, on a : $A_5^1 = 5$, $A_5^2 = 5 \times 4$, $A_5^4 = 5 \times 4 \times 3 \times 2$, $A_5^5 = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$.

On ne peut pas construire de nombres de plus de 5 chiffres deux à deux distincts avec les éléments de l'ensemble E.

Définition

Soit E un ensemble à n éléments et p un nombre entier naturel non nul tel que : $p \leq n$.

On appelle arrangement de p éléments de E tout p-uplet d'éléments de E deux à deux distincts.

Pour déterminer le nombre d'arrangements de p éléments d'un ensemble E à n éléments, on peut utiliser un arbre de choix à p niveaux :
il y a n choix possibles pour le 1er élément ;
il y a $n - 1$ choix possibles pour le 2^e élément ;
il y a $n - 2$ choix possibles pour le 3^e élément ;

⋮

il y a $n - (p - 1)$ choix possibles pour le p^e élément.
On en déduit que le nombre d'arrangements de p éléments de E est : $n(n - 1)(n - 2) \dots (n - p + 1)$.
Ce nombre est noté A_n^p.

Propriété

Le nombre d'arrangements de p éléments d'un ensemble E à n éléments, noté A_n^p, est tel que :
$A_n^p = n(n - 1)(n - 2) \dots (n - p + 1)$.

Remarques

- *Le nombre de facteurs du produit $n(n - 1)(n - 2) \dots (n - p + 1)$ est égal à p. Par exemple, A_{10}^4 est le produit de 4 entiers consécutifs dont le plus grand est 10 : $A_{10}^4 = 10 \times 9 \times 8 \times 7 = 5\,040$.*
- *Si $p > n$, il est impossible de trouver p éléments deux à deux distincts dans E.*

Exemples

- Dix athlètes participent à une course. On appelle podium l'arrivée des trois premiers.

On se propose de déterminer le nombre de podiums possibles, en supposant qu'il n'y a pas d'ex æquo.
Il y a autant de podiums que d'arrangements de 3 athlètes pris parmi 10, c'est-à-dire A_{10}^3 ; on a :
$A_{10}^3 = 10 \times 9 \times 8 = 720$.

- On veut calculer le nombre de façons différentes de placer dix personnes sur 15 chaises numérotées de 1 à 15, sachant que deux personnes ne peuvent occuper la même chaise.

Chaque installation des 10 personnes correspond à un arrangement de 10 éléments de l'ensemble des 15 chaises. Il y a donc A_{15}^{10} façons différentes de placer les dix personnes ; on a : $A_{15}^{10} = 10\,897\,286\,400$.

Notation factorielle

- Pour tout nombre entier naturel n non nul, le produit $1 \times 2 \times 3 \times \dots \times (n - 1) \times n$ est appelé « factorielle n » et est noté $n!$.
- Par convention : $0! = 1$.

Exemples

$1! = 1$;
$5! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 120$.

Propriété

- **Soit n et p deux nombres entiers naturels non nuls tels que : $p \leqslant n$. On a : $A_n^p = \dfrac{n!}{(n - p)!}$.**
- **Par convention : $A_n^0 = 1$.**

Démonstration

1^er cas : $p < n$.

On a : $n! = n \times (n - 1) \times (n - 2) \times \dots \times (n - p + 1) \times (n - p) \times \dots \times 2 \times 1$

$$= A_n^p \times (n - p) \times \dots \times 2 \times 1$$
$$= A_n^p \times (n - p)!.$$

On en déduit que : $A_n^p = \dfrac{n!}{(n - p)!}$.

2^e cas : $p = n$.

$A_n^p = A_n^n = n!$ (produit de n entiers consécutifs dont le plus grand est n)

$$= \frac{n!}{0!} = \frac{n!}{(n - p)!}.$$

La convention $A_n^0 = 1$ permet d'étendre la formule précédente à $p = 0$.

Nombre d'injections d'un ensemble fini vers un ensemble fini

L'exemple introductif à la notion d'arrangement peut également être traité en utilisant les applications de l'ensemble {c ; d ; u} vers l'ensemble {1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5} (cf. §3.1.).
Les nombres étant composés de chiffres deux à deux distincts, les applications correspondantes sont injectives.

Donc, le nombre d'injections de l'ensemble {c ; d ; u} vers l'ensemble {1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5} est A_5^3.

Plus généralement, on admet la propriété suivante.

Propriété

Le nombre d'injections d'un ensemble à p éléments vers un ensemble à n éléments est A_n^p.

Remarque

Il ne peut y avoir d'injections d'un ensemble fini E vers un ensemble fini F que si Card (E) ⩽ Card (F).

3.3. Permutations

Définition et propriété

Définition

Soit E un ensemble à n éléments.
On appelle permutation de E tout arrangement des n éléments de E.

On déduit du paragraphe précédent que le nombre de permutations de E est $n!$.

Propriété

Le nombre de permutations d'un ensemble à n éléments est $n!$.

Exemples

- On se propose de déterminer le nombre de façons de disposer 5 drapeaux de 5 pays différents sur 5 mâts prévus à cet effet.
Il y a autant de façons de placer les drapeaux que de permutations des 5 drapeaux donc 5!, c'est-à-dire 120 façons.

- On appelle anagramme d'un mot tout mot formé avec les lettres qui le composent (par exemple, LACE, ECAL sont des anagrammes de CALE).
Déterminons le nombre d'anagrammes du mot AFRIQUE.
Tout arrangement des 7 lettres distinctes formant le mot AFRIQUE est un anagramme de ce mot.
Il en existe donc 7!, c'est-à-dire 5 040.

Nombre de bijections d'un ensemble fini vers un ensemble fini

Soit B l'ensemble des 68 places assises d'un bus et P un ensemble de n passagers de ce bus, deux personnes ne pouvant occuper le même siège.
- si $n < 68$, tout embarquement correspond à une injection de P vers B ;
- si $n = 68$, tout embarquement correspond à une bijection de P vers B et, d'après ce qui précède, il existe 68! façons différentes de placer les 68 passagers dans le bus.

Plus généralement, soit E et F deux ensembles finis. On ne peut définir une bijection de E vers F que si ces ensembles ont le même nombre n d'éléments ; le nombre de ces bijections est $n!$.

On en déduit la propriété suivante.

Propriété

Le nombre de bijections d'un ensemble à n éléments vers un ensemble à n éléments est $n!$.

Une bijection d'un ensemble E vers lui-même est aussi appelée permutation de E.

Exemples

• Huit personnes participent à un repas : il existe 8! façons différentes de placer ces convives autour d'une table de 8 places numérotées de 1 à 8.

• Il existe 6! façons différentes de nommer les sommets d'un hexagone par les lettres A, B, C, D, E et F.

Exercices

3.a Déterminer le nombre de façons de ranger 5 paires de chaussettes différentes dans 3 tiroirs, chaque tiroir recevant entre 0 et 5 paires de chaussettes.

3.b Un concours de beauté, qui rassemble 12 concurrentes, attribue un premier prix, un second prix et un troisième prix.
a) Quel est le nombre de résultats possibles, sachant qu'il n'y a pas d'ex æquo ?
b) Quel est le nombre de résultats possibles, sachant qu'il y a deux premières ex aequo ?

3.c Six athlètes prennent le départ d'une course à pied. Chacun d'eux prend au hasard un des six couloirs de la piste.
a) Combien y a-t-il de positions de départ possibles ?
b) Combien y a-t-il de positions de départ possibles si l'un des athlètes ne prend pas le départ ?

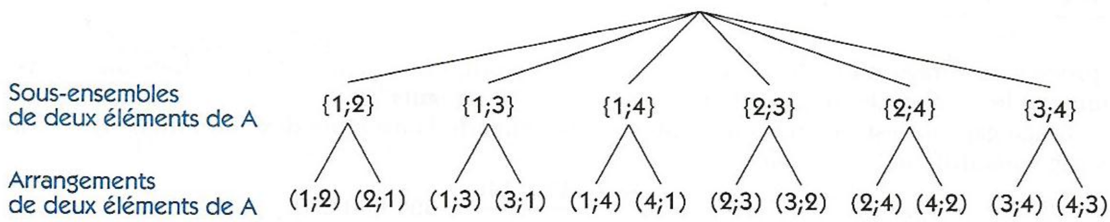
3.d On considère un ensemble de 10 points distincts tels que 3 quelconques de ces points ne sont pas alignés.
Combien peut-on définir de bipoints (A, B) où A et B appartiennent à l'ensemble de ces 10 points ?

3.e De combien de manières peut-on disposer 6 drapeaux sur 6 mâts ?

4 Combinaisons

Introduction

Soit A l'ensemble tel que : A = {1 ; 2 ; 3 ; 4}.
On sait qu'il y a A_4^2 arrangements de deux éléments de A.
On se propose de construire ces arrangements à l'aide d'un arbre, en deux étapes :
• on détermine tous les sous-ensembles de deux éléments de A ;
• on détermine toutes les permutations de chacun de ces sous-ensembles.



Chaque sous-ensemble de deux éléments de A est appelé combinaison de deux éléments de A. On désigne par C_4^2 le nombre de ces combinaisons.
Chaque combinaison de deux éléments permet de construire 2! permutations, donc 2! arrangements de deux éléments de A.
On obtient ainsi tous les arrangements de deux éléments de A.

On en déduit : $A_4^2 = C_4^2 \times 2!$; donc, on a : $C_4^2 = \dfrac{A_4^2}{2!}$.

Définition et propriétés

Définition

Soit E un ensemble à n éléments et p un nombre entier naturel tels que : $p \leqslant n$.

On appelle combinaison de p éléments de E tout sous-ensemble de E ayant p éléments.

Remarque

Pour la même raison que pour les arrangements, une combinaison de p éléments d'un ensemble à n éléments ne peut exister que si $p \leqslant n$.

Propriété 1

Le nombre de combinaisons de p éléments d'un ensemble à n éléments, noté C_n^p, est tel que :

$$C_n^p = \frac{A_n^p}{p!} = \frac{n!}{p!\,(n-p)!}.$$

Démonstration

Pour constituer un arrangement de p éléments d'un ensemble E à n éléments, on peut procéder en deux étapes :

- choisir un sous-ensemble de p éléments de E ;
- faire une permutation de ces p éléments.

Il y a C_n^p façons de choisir un ensemble à p éléments de E et $p!$ façons de les permuter.
Le nombre d'arrangements de p éléments de E est donc : $A_n^p = C_n^p\,p!$.

On en déduit que : $C_n^p = \dfrac{A_n^p}{p!} = \dfrac{n!}{p!\,(n-p)!}$.

Remarque

Soit E un ensemble à n éléments :

- *il y a une seule partie à 0 élément de E, c'est l'ensemble vide ; donc : $C_n^0 = 1$;*
- *il y a une seule partie à n éléments de E, c'est l'ensemble E lui-même ; donc : $C_n^n = 1$;*
- *il y a n singletons inclus dans E ; donc : $C_n^1 = n$.*

Exemples

- On désire sélectionner 6 joueurs parmi les 15 membres d'un club pour constituer une équipe de volley-ball. Déterminons le nombre de sélections différentes que l'on peut former.
Chaque sélection est un sous-ensemble à 6 éléments de l'ensemble des 15 membres du club, c'est-à-dire une combinaison de 6 joueurs pris parmi 15. Le nombre de sélections possibles est donc :

$$C_{15}^6 = \frac{A_{15}^6}{6!} = \frac{15!}{6! \times 9!} = \frac{15 \times 14 \times 13 \times 12 \times 11 \times 10}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6} = 5\ 005.$$

- On procède au tirage d'une tombola. Il y a 5 lots identiques à gagner et 150 billets ont été vendus. Déterminons le nombre de tirages différents des 5 billets gagnants.
Chaque tirage gagnant est un sous-ensemble à 5 éléments de l'ensemble des 150 billets. Le nombre de tirages gagnants différents est donc :

$$C_{150}^5 = \frac{A_{150}^5}{5!} = \frac{150!}{5! \times 145!} = \frac{150 \times 149 \times 148 \times 147 \times 146}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5} = 591\ 600\ 030.$$

Propriété 2

Soit n et p deux nombres entiers naturels tels que : $p \leqslant n$.

- **On a : $C_n^{n-p} = C_n^p$.**
- **Si de plus $0 < p < n$, alors on a : $C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p = C_n^p$.**

Démonstration

• Si une partie d'un ensemble E à n éléments contient p éléments, son complémentaire dans E en contient $n - p$. Il y a autant de parties à p éléments que de complémentaires de ces parties dans E.
On en déduit que : $C_n^{n-p} = C_n^p$.

• Soit E un ensemble à n éléments, a un élément de E et P l'ensemble des parties de E à p éléments.
On effectue une partition de P en deux sous-ensembles P_1 et P_2 tels que :
P_1 est l'ensemble des parties de E ne contenant pas a, c'est-à-dire dont les p éléments sont choisis parmi $n - 1$ éléments de E ;
P_2 est l'ensemble des parties de E contenant a, c'est-à-dire dont $p - 1$ éléments sont choisis parmi $n - 1$ éléments de E.

On a : $\text{Card}(P) = C_n^p$, $\text{Card}(P_1) = C_{n-1}^p$ et $\text{Card}(P_2) = C_{n-1}^{p-1}$.

On a également : $\text{Card}(P_1) + \text{Card}(P_2) = \text{Card}(P)$. On en déduit que : $C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p = C_n^p$.

Formule du binôme

Soit a et b deux nombres réels.
On sait que : $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ et $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.
On se propose de développer et réduire $(a + b)^n$ pour tout nombre entier naturel n.

On a : $(a + b)^n = \underbrace{(a + b)(a + b)\ldots(a + b)}_{n \text{ facteurs}}$.

Tout terme du développement de ce produit est obtenu en choisissant a ou b dans chacun des facteurs égaux à $(a + b)$ et en faisant leur produit.
Soit p un nombre entier naturel tel que : $p \leqslant n$.
• Si on choisit b dans p facteurs, on choisit a dans $n - p$ facteurs et on obtient le terme $a^{n-p}b^p$.
• Il y a C_n^p façons de choisir p facteurs parmi les n facteurs égaux à $(a + b)$.
Donc, dans le développement de $(a + b)^n$, il y a C_n^p termes égaux à $a^{n-p}b^p$.

On en déduit que : $(a + b)^n = C_n^0a^n + C_n^1a^{n-1}b^1 + C_n^2a^{n-2}b^2 + \ldots + C_n^pa^{n-p}b^p + \ldots + C_n^{n-1}a^1b^{n-1} + C_n^nb^n$.
Cette formule est appelée formule du binôme de Newton.

Propriété 3

Soit a et b deux nombres réels et n un nombre entier naturel non nul. On a :
$(a + b)^n = C_n^0a^n + C_n^1a^{n-1}b^1 + C_n^2a^{n-2}b^2 + \ldots + C_n^pa^{n-p}b^p + \ldots C_n^{n-1}a^1b^{n-1} + C_n^nb^n$.

On peut également utiliser la notation Σ : $(a + b)^n = \sum_{p=0}^{n} C_n^pa^{n-p}b^p$.

Exemples

• $(a + b)^3 = C_3^0a^3 + C_3^1a^2b + C_3^2ab^2 + C_3^3b^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$;
• $(a + b)^4 = C_4^0a^4 + C_4^1a^3b + C_4^2a^2b^2 + C_4^1ab^3 + C_4^4b^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$.

Triangle de Pascal

La propriété 2 ci-dessus et les égalités $C_n^0 = C_n^n = 1$ permettent de calculer de proche en proche les valeurs de C_n^p. On utilise la diposition ci-contre, appelée « triangle de Pascal ».

$$\begin{array}{ccc} C_{n-1}^{p-1} & + & C_{n-1}^{p} \\ & & \| \\ & & C_n^p \end{array}$$

Ce tableau permet également de retrouver les coefficients de la formule du binôme.

On a, par exemple :
$(a + b)^5 = \boxed{1}\,a^5 + \boxed{5}\,a^4b + \boxed{10}\,a^3b^2 + \boxed{10}\,a^2b^3 + \boxed{5}\,ab^4 + \boxed{1}\,b^5$.

$n \backslash p$	1	2	3	4	5	6	7	8	…
0	1								
1	1	1							
2	1	2	1						
3	1	3	3	1					
4	1	4	6	4	1				
5	1	5	10	10	5	1			
6	1	6	15	20	15	6	1		
7	1	7	21	35	35	21	7	1	
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1
…									

Exercices

4.a **1.** De combien de manières peut-on choisir 3 paires de chaussettes dans un lot de 10 paires différentes ?
2. Pour voyager, un homme choisit 3 paires de chaussettes parmi les 10 paires qu'il possède et 2 paires de chaussures parmi les 5 paires qu'il possède. De combien de manières peut-il faire ce choix ?

4.b On veut élire un comité de quatre membres parmi les 45 élèves d'une classe.
1. Quel est le nombre de résultats possibles ?
2. Quel est le nombre de comités contenant exactement 2 filles, sachant qu'il y a 25 filles dans cette classe ?
3. Quel est le nombre de comités contenant au moins 1 fille ?

4.c Quarante athlètes, dont quinze filles, sont présélectionnés pour une compétition. On veut choisir, parmi ces athlètes, une équipe de 11 footballeurs et 5 basketteuses. Combien y a-t-il de choix possibles ?

4.d On considère un ensemble de 10 points deux à deux distincts situés sur un même cercle.
1. Combien peut-on tracer de droites contenant 2 de ces 10 points ?
2. Combien peut-on tracer de triangles dont chaque sommet est l'un de ces 10 points ?
3. Combien peut-on tracer de quadrilatères non croisés dont chaque sommet est l'un de ces 10 points ?

5 Problèmes de dénombrement

5.1. Principes de dénombrement

Dans les problèmes de dénombrement on a utilisé le comptage, les diagrammes, les arbres.
On a également utilisé trois outils fondamentaux : p-uplet, arrangement, combinaison. Il est donc nécessaire de connaître les caractéristiques de ces notions et de préciser leurs domaines d'utilisation.
Comme on le verra dans ce qui suit, chacune de ces notions peut être modélisée par une situation rencontrée fréquemment dans les problèmes de dénombrement : les tirages de p boules dans une urne qui en contient n.

Tirages de boules dans une urne

Une urne contient 12 boules numérotées de 1 à12. On tire 3 boules de cette urne.
Calculer le nombre de tirages distincts dans les trois cas suivants :
***a)* les boules sont tirées l'une après l'autre en remettant chaque fois la boule tirée dans l'urne ;**
***b)* les boules sont tirées l'une après l'autre sans les remettre dans l'urne ;**
***c)* les trois boules sont tirées simultanément.**

Solution

Soit U l'ensemble des 12 boules contenues dans l'urne.

a) On tire 3 boules de cette urne, l'une après l'autre en remettant chaque fois la boule tirée dans l'urne : une telle manipulation est appelée « tirages successifs avec remise ».
Les boules sont ordonnées puisqu'on les tire l'une après l'autre ; elles ne sont pas nécessairement distinctes puisqu'on remet la boule tirée dans l'urne après chaque tirage.
On doit donc dénombrer des triplets.

Le nombre de tirages distincts est égal au nombre de triplets de U, c'est-à-dire 12^3.

On a donc : 12^3, c'est-à-dire 1 728 tirages distincts.

b) On tire 3 boules de l'urne, l'une après l'autre sans les remettre dans l'urne : une telle manipulation est appelée « tirages successifs sans remise ».
Les boules sont ordonnées puisqu'on les tire l'une après l'autre ; elles sont distinctes puisqu'on ne remet pas la boule tirée dans l'urne après chaque tirage.
On doit donc dénombrer des arrangements.

Le nombre de tirages distincts est égal au nombre d'arrangements de 3 éléments de U, c'est-à-dire A_{12}^3.
On a : $A_{12}^3 = 12 \times 11 \times 10 = 1\,320$ tirages distincts.

c) On tire simultanément 3 boules de l'urne : une telle manipulation est appelée «tirage simultané ».
Les boules ne sont pas ordonnées et elles sont distinctes puisqu'on les tire simultanément.
On doit donc dénombrer des combinaisons.

Le nombre de tirages distincts est égal au nombre de combinaisons de 3 éléments de U, c'est-à-dire C_{12}^3.

On a : $C_{12}^3 = \dfrac{12 \times 11 \times 10}{3 \times 2 \times 1} = 220.$

On peut récapituler ces différents tirages de boules et leur dénombrement par le tableau suivant, où E désigne un ensemble à n éléments.

Modélisation	**Les p éléments sont ordonnés**	**Les p éléments sont distincts**	**Outil**	**Nombre de tirages**
Tirages successifs avec remise	oui	non	p-uplet de E	n^p
Tirages successifs sans remise	oui	oui	Arrangement de p éléments de E	A_n^p
Tirages simultanés	non	oui	Combinaison de p éléments de E	C_n^p

Principes de la somme et du produit

1. Une urne contient 12 boules numérotées de 1 à 12 dont 3 sont rouges, 4 vertes et 5 blanches. On tire, successivement et avec remise, 3 boules de cette urne.
Calculer le nombre de tirages distincts dans les deux cas suivants :
***a)* les trois boules tirées sont de la même couleur ;**
***b)* la première et la troisième boules tirées sont vertes.**

Solution

Soit U l'ensemble des 12 boules contenues dans l'urne ; on désigne par R, V et B les parties de U contenant respectivement les boules rouges, vertes et blanches.
On sait que le nombre total de tirages distincts est 12^3.

a) Les trois boules tirées peuvent être, soit rouges, soit vertes, soit blanches.
Les ensembles de tirages correspondant à ces trois cas forment une partition de l'ensemble des tirages cherchés.
L'ensemble des tirages de trois boules rouges est l'ensemble des triplets de R ; de même les ensembles des tirages de trois boules vertes et blanches sont respectivement les ensembles des triplets de V et de B.
Le nombre de tirages distincts de trois boules de même couleur est donc : $3^3 + 4^3 + 5^3$, c'est-à-dire 216.

b) La première et la troisième boules constituent un couple de V, c'est-à-dire un élément de V^2 ; la deuxième boule est un élément de U.
L'ensemble des tirages cherchés est donc le produit cartésien $V^2 \times U$.

On a : Card $(V^2) = 4^2$ et Card (U) = 12.

Le nombre de tirages distincts dans lesquels la première et la troisième boules sont vertes est donc : $4^2 \times 12$, c'est-à-dire 192.

M

Pour dénombrer un ensemble E, on peut utiliser l'un des deux principes suivants.
- *Principe de la somme*

On définit une partition de E par des ensembles $E_1, E_2, ..., E_p$.
On a alors : $\text{Card}(E) = \text{Card}(E_1) + \text{Card}(E_2) + \ ... + \text{Card}(E_p)$.
- *Principe du produit*

On décompose l'ensemble E en un produit cartésien d'ensembles $E_1, E_2, ..., E_p$.
On a alors : $\text{Card}(E) = \text{Card}(E_1) \times \text{Card}(E_2) \times ... \times \text{Card}(E_p)$.

2. Une urne contient 3 boules rouges, 4 vertes et 5 blanches. On tire simultanément 3 boules de cette urne. Calculer le nombre de tirages distincts dans les deux cas suivants :
***a)* une des boules au moins est blanche ;**
***b)* il y a au plus deux couleurs distinctes dans le tirage.**

Solution

Soit U l'ensemble des 12 boules contenues dans l'urne ; on désigne par R, V et B les parties de U contenant respectivement les boules rouges, vertes et blanches.
On sait que le nombre total de tirages distincts est C_{12}^3.

a) Soit E l'ensemble des tirages distincts et A l'ensemble des tirages contenant au moins une boule blanche. Nous allons décrire deux méthodes de dénombrement de l'ensemble A.

• Pour dénombrer l'ensemble A, on peut utiliser les principes de la somme et du produit.
On désigne respectivement par A_1, A_2 et A_3 les ensembles de tirages contenant exactement 1 boule blanche, 2 boules blanches et 3 boules blanches.
Les ensembles A_1, A_2 et A_3 forment une partition de A.

On a : $\text{Card}(A_1) = C_5^1 \times C_7^2$; $\text{Card}(A_2) = C_5^2 \times C_7^1$; $\text{Card}(A_3) = C_5^3$ (principe du produit).

On en déduit : $\text{Card}(A) = \text{Card}(A_1) + \text{Card}(A_2) + \text{Card}(A_3)$ (principe de la somme).

Donc, le nombre de tirages contenant au moins une boule blanche est : $C_5^1 \times C_7^2 + C_5^2 \times C_7^1 + C_5^3$, c'est-à-dire 185.
On dit qu'on a procédé par « disjonction des cas ».

• On peut également dénombrer l'ensemble des tirages ne contenant pas de boule blanche, c'est-à-dire l'ensemble complémentaire de A dans E, ou $E \setminus A$.
Les tirages de cet ensemble sont des combinaisons de 3 éléments de $U \setminus B$ (boules rouges ou vertes).
On a : $\text{Card}(U \setminus B) = 7$; donc : $\text{Card}(E \setminus A) = C_7^3$.
Le nombre de tirages contenant au moins une boule blanche est donc : $C_{12}^3 - C_7^3$, c'est-à-dire 185.

b) On utilisera seulement la deuxième méthode. Soit B l'ensemble des tirages contenant au plus deux couleurs.
L'ensemble complémentaire de B dans E, ou $E \setminus B$, est l'ensemble des tirages tricolores.
On a : $\text{Card}(E \setminus B) = C_3^1 \times C_4^1 \times C_5^1$ (principe du produit).
Le nombre de tirages contenant au plus deux couleurs est donc : $C_{12}^3 - C_3^1 \times C_4^1 \times C_5^1$, c'est-à-dire 160.

M

Pour dénombrer un ensemble A défini à l'aide des locutions « au moins » ou « au plus », on peut :
- procéder par disjonction des cas et utiliser le principe de la somme ;
- dénombrer le complémentaire de A dans un ensemble E connu et utiliser l'égalité :
  $\text{Card}(A) = \text{Card}(E) - \text{Card}(E \setminus A)$.

5.2. Travaux dirigés

Un jeu de 32 cartes est constitué de 4 « couleurs » Pique (♠), Cœur (♥), Carreau (♦), Trèfle (♣) contenant chacune l'As, le Roi, la Dame, le Valet, le 10, le 9, le 8 et le 7.
On tire simultanément 5 cartes de ce jeu.
Calculer le nombre de tirages distincts dans les cas suivants :
***a)* les 5 cartes sont quelconques ;**
***b)* il y a exactement 2 As parmi les 5 cartes ;**
***c)* il y a au moins 1 As parmi les 5 cartes ;**
***d)* les 5 cartes sont de la même « couleur ».**

Solution

Les cartes sont tirées simultanément, elles sont donc non ordonnées et distinctes.
On a des tirages simultanés et on doit donc utiliser des combinaisons.

a) Le nombre de combinaisons de 5 éléments d'un ensemble à 32 éléments est C_{32}^5.

Le nombre de tirages distincts de 5 cartes quelconques est donc : C_{32}^5, c'est-à-dire 201 376.

b) Chaque tirage peut être représenté par un couple dont le premier élément est l'ensemble des tirages de deux As, parmi les 4, et le second est l'ensemble des tirages des trois autres cartes, parmi les 28 restantes.
Le nombre de tirages de 5 cartes contenant exactement 2 As est donc : $C_4^2 \times C_{28}^3$ (principe du produit).
On a : $C_4^2 \times C_{28}^3 = 6 \times 3\,276 = 19\,656$.

c) Soit E l'ensemble des tirages de 5 cartes quelconques et A l'ensemble de tirages de 5 cartes contenant au moins un As. On utilise le complémentaire de A dans E.
$E \setminus A$ est l'ensemble des tirages ne contenant pas d'As, donc : $\text{Card}(E \setminus A) = C_{28}^5$.

On en déduit que : $\text{Card}(A) = \text{Card}(E) - \text{Card}(E \setminus A) = C_{32}^5 - C_{28}^5$.

Le nombre de tirages de 5 cartes contenant au moins un As est donc : $C_{32}^5 - C_{28}^5$.

On a : $C_{32}^5 - C_{28}^5 = 201\,376 - 98\,280 = 103\,096$.

d) Les 5 cartes peuvent être soit 5 Piques, soit 5 Cœurs, soit 5 Carreaux, soit 5 Trèfles.
Le nombre de tirages de 5 cartes parmi les 8 Piques est C_8^5. Il en est de même pour les trois autres couleurs.

Le nombre de tirages de 5 cartes de la même couleur est donc : $C_8^5 + C_8^5 + C_8^5 + C_8^5$ (principe de la somme).

On a : $C_8^5 + C_8^5 + C_8^5 + C_8^5 = 56 + 56 + 56 + 56 = 224$.

Exercices

5.a On tire simultanément 5 cartes dans un jeu de 32 cartes. Déterminer le nombre de tirages contenant :
a) exactement 1 paire, c'est-à-dire 2 cartes de même hauteur (par exemple 2 As) ;
b) deux « paires » (par exemple 2 Rois et 2 Dames) ;
c) un « brelan », c'est-à-dire 3 cartes de même hauteur (par exemple 3 Dix) ;
d) un « carré », c'est-à-dire 4 cartes de même hauteur (par exemple, 4 As) ;
e) un « full », c'est-à-dire un brelan et un carré (par exemple, 3 Huit et 4 Dames).

5.b On lance 10 fois de suite une pièce de monnaie et on note les résultats de chaque lancer : « pile » ou « face ».
a) Combien y a-t-il de résultats possibles ?
b) Soit n un nombre entier naturel tel que $n \in [0 ; 10]$; déterminer, en fonction de n, le nombre de résultats contenant exactement n fois «pile ».
c) Combien y a-t-il de résultats contenant au moins 3 fois « pile » ?

5.c Un sac contient 26 jetons représentant les 26 lettres de l'alphabet, dont 20 consonnes et 6 voyelles.
1. On tire simultanément 5 jetons du sac. Déterminer le nombre de tirages distincts :
a) contenant exactement 2 voyelles ;
b) contenant au moins 1 voyelle.
2. On tire successivement 5 jetons, avec remise. Déterminer le nombre de tirages distincts :
a) contenant exactement 2 voyelles ;
b) contenant au moins 1 voyelle ;
c) contenant au moins 2 lettres identiques.

5.d Au cours d'un championnat, une équipe de football joue 10 matches. Pour chacun de ces matches, l'équipe marque respectivement 3, 1 ou 0 point suivant le score du match.
On appelle « résultat » à l'issue des 10 matches, tout 10-uplet d'éléments de l'ensemble $\{3 ; 1 ; 0\}$.
1. Déterminer le nombre de résultats possibles.
2. Déterminer le nombre de résultats correspondant :
a) à un total de 15 points ;
b) à un total inférieur ou égal à 25 points ;
c) à un total strictement supérieur à 3 points.

Exercices

APPRENTISSAGE

Partition d'un ensemble, produit cartésien

1 A et B sont deux ensembles finis tels que :
Card (A) = 7, Card (B) = 9 et Card ($A \cup B$) = 10.
Calculer Card ($A \cap B$).

2 On désigne par R, C et L les ensembles respectifs des rectangles, des carrés et des losanges du plan.
Démontrer que R, C et L ne forment pas une partition de l'ensemble P des parallélogrammes du plan.

3 Soit E = {a ; b ; c}.
1. Combien existe-t-il de partitions de E ?
2. Même question avec : F = {a ; b ; c ; d}.

4 Soit E l'ensemble des nombres entiers naturels compris entre 1 et 100.
On désigne par E_0, E_1, ..., E_9 les sous-ensembles des éléments de E dont le chiffre des unités est respectivement 0, 1, ..., 9.
Démontrer que les ensembles E_0, E_1, ..., E_9 forment une partition de E.

5 Soit E l'ensemble des nombres entiers naturels compris entre 2 et 100.
On désigne par E_2, E_3, E_5, E_7 les sous-ensembles des éléments de E multiples respectivement de 2, 3, 5, 7 et par P l'ensemble des nombres premiers de E.
1. Démontrer que : $P = E \setminus (E_2 \cup E_3 \cup E_5 \cup E_7)$.
2. Les ensembles P, E_2, E_3, E_5, E_7 forment-ils une partition de E ?

6 A, B et C sont trois ensembles finis tels que :
Card (A) ≠ 1, Card ($A \times B$) = 18 et Card ($A \times C$) = 15.
Déterminer Card (A), Card (B) et Card (C).

7 Pour chaque élève d'un lycée, l'infirmière remplit une fiche dans laquelle, elle note le sexe, l'âge et le groupe sanguin de l'élève.
Déterminer le nombre maximum de fiches distinctes sachant que tous les élèves ont un âge compris entre 11 et 18 ans et qu'il existe 8 groupes sanguins.

8 Dans un pays, le service d'immatriculation attribue à chaque véhicule automobile un numéro minéralogique composé d'un nombre compris entre 1 et 9 999 suivi d'un groupe d'une ou deux lettres, différentes de O et I.
Combien de véhicules peut-on immatriculer dans ce pays ?

9 Une marque d'automobiles propose 4 modèles A, B, C, D de véhicules tels que :
• les modèles A et B se font en deux carrosseries, berline et coupé ;
• les modèles C et D se font en berline, coupé, cabriolet et utilitaire ;
• chaque voiture est vendue en 5 coloris.
1. Combien de choix s'offrent à un client désirant acheter une voiture de cette marque ?
2. Calculer le nombre de choix sachant que :
a) le client désire une berline ;
b) une seule couleur plaît au client ;
c) le client désire un coupé ou un cabriolet.

p-uplets, arrangements, permutations

10 Déterminer le nombre d'éléments d'un ensemble E dans les cas suivants :
a) le nombre de couples de E est 56 ;
b) le nombre de triplets de E est 120.

11 Le chef d'un village dispose de trois masques différents. Dix villageois seulement peuvent porter l'un ou l'autre de ces masques.
Calculer le nombre de répartitions possibles.

12 Une compagnie aérienne dessert un réseau de villes. Chacune des villes du réseau est reliée à chacune des autres villes par deux vols : un aller et un retour.
Sachant que le nombre de vols de cette compagnie est 7 482, quel est le nombre de villes desservies par cette compagnie ?

13 **1.** Dans un championnat de football, chacune des 16 équipes doit rencontrer dans un match aller et dans un match retour toutes les autres équipes.
Calculer le nombre total de matchs de ce championnat.
2. Pour réduire le nombre de matchs, les 16 équipes sont réparties en 4 poules de 4 équipes ; le vainqueur de chaque poule participe à une poule finale.
Sachant qu'à l'intérieur de chaque poule, chaque équipe rencontre les 3 autres dans un match aller et dans un match retour, calculer alors le nombre total de matchs.

14 Calculer le nombre de façons de distribuer trois cahiers différents à trois enfants dans les cas suivants :
a) chaque enfant reçoit un cahier ;
b) chaque enfant peut recevoir 0, 1, 2 ou 3 cahiers.

15 **1.** De combien de façons peut-on placer six convives autour d'une table dont les sièges sont numérotés de 1 à 6 ?
2. De combien de façons peut-on placer les convives sachant qu'il y a trois hommes et trois femmes et que l'on alterne hommes et femmes ?

16 On dispose de sept plaquettes numérotées de 1 à 7. On range ces plaquettes pour former un nombre de 7 chiffres.

1. Calculer le nombre total de cas possibles.
2. Calculer le nombre total de cas possibles sachant que :
a) le nombre obtenu est impair ;
b) le nombre obtenu est divisible par 4.

Combinaisons

17 Quinze personnes se rencontrent. Chacune d'elles serre la main à chacune des autres.
Quel est le nombre total de poignées de mains échangées ?

18 On considère six points deux à deux distincts situés sur un même cercle.
Combien peut-on construire de polygones non croisés dont chacun des sommets est l'un de ces six points ?

19 Dix questions, numérotées de 1 à 10, sont proposées à un candidat.
1. Calculer le nombre de façons de choisir 3 questions parmi les 10.
2. Calculer le nombre de façons de choisir 3 questions, dont la question 1, parmi les 10.

20 Un jury est composé de six membres pris dans une liste comportant dix hommes et sept femmes.
Combien peut-on former de jurys comprenant :
a) seulement des hommes ?
b) quatre hommes et deux femmes ?
c) au plus deux femmes ?

21 On choisit 5 cartes dans un jeu de 32 cartes.
1. Calculer le nombre de choix possibles.
2. Calculer le nombre de choix possibles sachant que :
a) le tirage contient 3 Coeurs et 2 Piques ;
b) le tirage contient les quatre couleurs ;
c) le tirage contient au moins 1 Coeur.

22 On considère un jeu de 32 cartes.
On tire simultanément 8 cartes de ce jeu.
Combien y a-t-il de tirages contenant :
a) exactement 3 As ?
b) au moins 3 As ?
c) exactement 3 As et deux Coeurs ?

23 Un magazine propose, pour un sondage, une liste de quinze chanteurs, numérotés de 1 à 15.
On demande au lecteur d'entourer les noms de ses trois chanteurs préférés.
1. Combien y a-t-il de choix possibles ?
2. Combien y a-t-il de choix contenant le chanteur numéro 1 ?
3. Combien y a-t-il de choix ne contenant que des chanteurs de numéros pairs ?

APPROFONDISSEMENT

24 Démontrer que pour tous nombres entiers naturels n et p tels que $0 < p < n$, on a :
$C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^{p} = C_n^p$

25 Un professeur corrige un devoir des 50 élèves de sa classe. Les notes sont entières et comprises entre 0 et 20.
Calculer le nombre de notations possibles dans les cas suivants :
a) tous les élèves ont la moyenne ;
b) 20 élèves ont la moyenne ;
c) 8 élèves ont obtenu une note comprise entre 0 et 5.

26 Déterminer le nombre de mots formés de 5 lettres choisies parmi les 26 lettres de l'alphabet (6 voyelles et 20 consonnes) dans les cas suivants :
a) les 5 lettres sont quelconques ;
b) les 5 lettres sont deux à deux distinctes ;
c) les 5 lettres sont deux à deux distinctes et le mot contient 2 voyelles ;
d) le mot contient au moins une voyelle.

27 Un parking contient 20 places de voitures numérotées de 1 à 10 (rangée A) et de 11 à 20 (rangée B).
1. De combien de manières peut-on garer 20 voitures dans ce parking ?
2. Calculer le nombre de façons de garer 10 voitures dans chacun des cas suivants :
a) les 10 voitures occupent la même rangée ;
b) 6 voitures exactement occupent la rangée A ;
c) il y a au moins 1 voiture dans la rangée A.

28 Pour répondre à un sondage, on doit classer 5 chanteurs pris dans une liste de 20. Parmi les 20 chanteurs, il y a 12 hommes, 8 femmes et 6 étrangers dont 2 femmes.
1. Calculer le nombre de classements possibles.
2. Calculer le nombre de classements sachant que :
a) 2 femmes occupent les deux premières places, suivies de 3 hommes ;
b) on a choisi exactement 2 femmes ;
c) il y a au moins au moins deux femmes choisies.
3. Calculer le nombre de classements contenant au moins un étranger.
4. Calculer le nombre de classements contenant exactement un étranger et deux femmes.

29 Une urne contient 10 boules numérotées de 0 à 9. On tire quatre boules de cette urne.
1. Combien peut-on obtenir de nombres distincts de quatre chiffres (dont le premier est non nul) dans chacun des cas suivants :
a) les 4 boules sont tirées successivement et sans remise ?
b) les 4 boules sont tirées successivement avec remise.
2. On tire simultanément quatre boules.
a) Combien de tirages différents peut-on réaliser ?
b) Avec chacun des tirages, combien de nombres de quatre chiffres peut-on former ?
Retrouver le résultat de la question 1.*a)*.

30 Un père de famille achète dix cadeaux distincts qu'il distribue à ses trois enfants.
1. Calculer le nombre total de répartitions possibles de ces cadeaux entre les trois enfants.
2. Calculer le nombre de répartitions possibles sachant qu'aucun enfant ne reçoit plus de quatre cadeaux.

31 On lance 3 dés de couleurs différentes dont les faces sont numérotées de 1 à 6 et on s'intéresse au nombre qui apparaît sur la face supérieure de chacun d'eux.

1. Déterminer le nombre de résultats possibles ?

2. Déterminer le nombre de résultats comportant :

a) un seul six ;

b) au moins un six ;

c) au moins un as et au moins un six.

3. Déterminer le nombre de résultats tels que la somme des nombres est égale à 13.

32 **1.** Soit E = {a ; b ; c} et F = {a' ; b'}. Déterminer toutes les applications surjectives de E vers F.

2. E et F sont des ensembles finis ayant respectivement n et $n-1$ éléments ($n \geq 2$).

a) Soit f une surjection de E vers F. Démontrer qu'il existe un élément a' de F ayant deux antécédents distincts a et b par f et que tous les autres éléments de F ont un seul antécédent dans E, différent de a et b.

b) Déterminer, en fonction de n, le nombre de surjections de E vers F.

33 On place 5 pions blancs et 5 pions noirs sur 10 cases deux à deux distinctes d'un échiquier de 64 cases.

1. Combien y a-t-il de configurations possibles ?

2. Calculer le nombre de configurations sachant que :

a) les pions noirs sont tous sur une même ligne ;

b) les pions d'une même couleur sont tous sur une même ligne ;

c) les pions noirs sont sur une même ligne et les pions blancs sur une même colonne.

34 On lance n fois de suite une pièce de monnaie dont les côtés sont notés P (pile) et F (face). On appelle résultat de cette épreuve tout n-uplet d'éléments de l'ensemble {P ; F} et on désigne par n_P et n_F les nombres de fois où apparaissent respectivement les côtés P et F au cours des n lancers.

1. On suppose $n = 10$.

a) Déterminer le nombre de résultats distincts à l'issue de ces 10 lancers.

b) Déterminer le nombre de résultats tels que :

• $n_P = n_F$; • $n_P > n_F$.

2. On suppose n quelconque.

Déterminer, en fonction de n :

a) le nombre de résultats distincts ;

b) le nombre de résultats tels que : $n_P \geqslant n_F$.

(On distinguera deux cas : n pair et n impair.)

35 **D'après *Les jeux de cauris* (S. Doumbia et J.-C. Pil, Éditions MESCA).**

Le cauris est un coquillage marin présentant deux côtés : l'un bombé que l'on symbolisera par + et l'autre fendu que l'on symbolisera par –.

Le Tcha-Tcha Djirokeme est un jeu pratiqué au Bénin. Chacun à son tour, les joueurs lancent simultanément 4 cauris trois fois de suite. Le gagnant est le premier qui obtient chaque fois, lors des trois lancers successifs, l'une des configurations suivantes :

$+ + + +$ ou $+ + - -$ ou $- - - -$.

1. On lance une fois les 4 cauris.

a) Quel est le nombre de configurations possibles ?

b) Quel est le nombre de configurations gagnantes ?

2. Quel est le nombre de résultats possibles lorsqu'on lance trois fois de suite les 4 cauris ?

3. Quel est le nombre de résultats apportant la victoire dans le Tcha-Tcha Djirokeme ?

36 **Jeu de Déhé (Côte d'Ivoire, région de Man).**

Chaque joueur possède un tas de pois d'une même couleur et en met un certain nombre (entre 1 et 10) dans un verre. Il y a une couleur par joueur. On renverse le verre sur une calebasse comportant un petit socle en son centre où peut se loger un pois et un seul. La couleur de la graine qui s'est déposée sur le socle détermine le joueur gagnant le coup.

1. Trois personnes jouent une partie en n coups.

Déterminer, en fonction de n, le nombre de résultats possibles à l'issue de cette partie.

2. Après chaque coup, le joueur gagnant ramasse les graines des autres. À la fin de la partie, on compte les graines gagnées ou perdues par chacun des joueurs.

Trois personnes jouent une partie en trois coups en misant chaque fois 3 graines chacune.

a) Calculer le nombre de résultats possibles.

b) Calculer le nombre de résultats dans chacun des cas suivants :

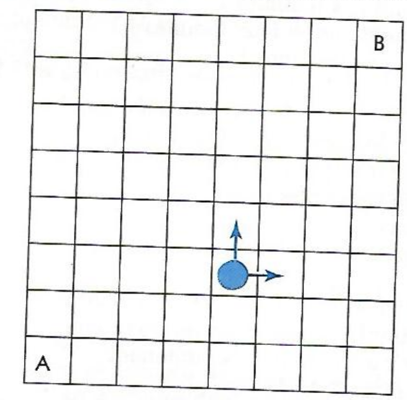
• la partie est nulle pour tous les joueurs ;

• la partie est nulle pour un joueur donné ;

• la partie est gagnante pour deux joueurs ;

• la partie est gagnante pour un joueur donné.

37 On considère un échiquier de 64 cases (8×8).



Le pion bleu ne peut se déplacer que vers la case située directement à droite ou directement au-dessus de la case où il se trouve.

Combien y a-t-il de trajets pour aller de la case A à la case B ?

38 On considère un polygone convexe à n côtés ($n \geqslant 4$). Déterminer en fonction de n :

a) le nombre de diagonales de ce polygone ;

b) le nombre maximum de points d'intersection de ces diagonales, à l'exclusion des sommets du polygone.

39 **1.** Soit n un nombre entier naturel.

Démontrer, à l'aide de la formule du binôme, que :

$2^n = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^p + \ldots + C_n^{n-1} + C_n^n$.

2. Pour tout nombre entier naturel n tel que $n \geqslant 3$, on considère n points d'un cercle.

Déterminer, en fonction de n, le nombre de polygones non croisés dont chacun des sommets est l'un de ces n points.

12

Limites et continuité

Introduction

La notion de limite est trop délicate pour être formalisée rigoureusement en classe de première. Elle sera donc introduite ici de manière intuitive et certaines propriétés admises permettront de calculer des limites et de résoudre des problèmes où intervient cette notion.

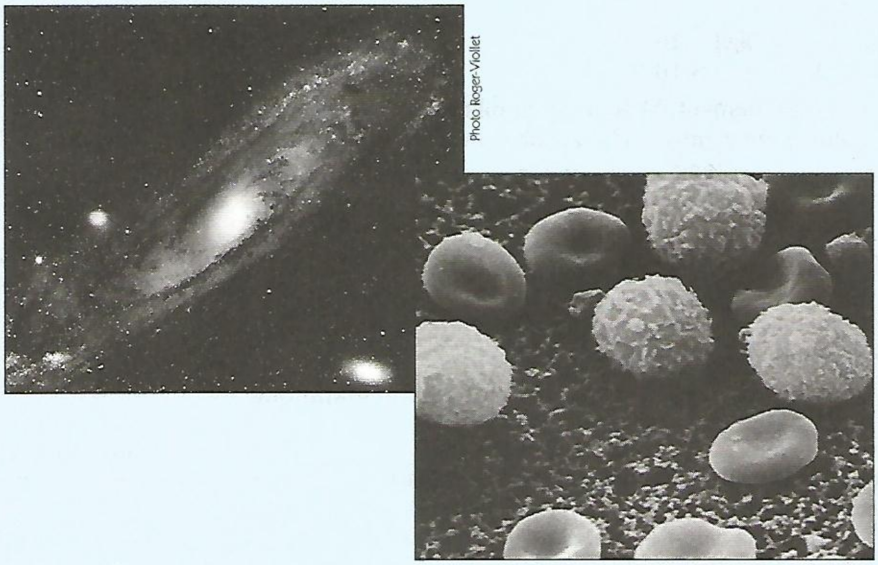


Photo Roger-Viollet

Photo D. Amar / BSIP

De l'infiniment grand (la nébuleuse d'Andromède)
à l'infiniment petit (plaquettes sanguines vues au microscope électronique).

SOMMAIRE

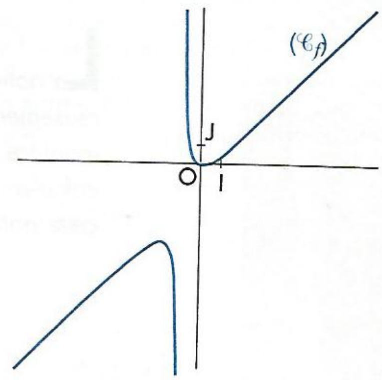
Dans ce chapitre, les fonctions étudiées sont des fonctions numériques à variable réelle et le plan est muni du repère (O, I, J).

1 Approche intuitive de la notion de limite

1.1. Limite d'une fonction en l'infini

Limite infinie

La courbe $(\mathscr{C}_f)$ ci-contre est la représentation graphique de la fonction f définie par : $f(x) = \frac{x^2}{x+1}$.



Intéressons-nous au comportement de $f(x)$ lorsque x prend des valeurs « de plus en plus grandes ».

• À l'aide de la calculatrice, compléter le tableau suivant.

x	10	10^2	10^3	10^4	10^5
$f(x)$					

• Démontrer que : $\forall x \in [0 ; +\infty[, f(x) > x - 1$.

Dans chacun des cas suivants, déterminer un nombre réel A tel que :

a) $x > A \Rightarrow f(x) > 10^3$;

b) $x > A \Rightarrow f(x) > 10^{10}$.

• Plus généralement, M étant un nombre réel positif, déterminer un nombre réel A tel que : $x > A \Rightarrow f(x) > M$.

On peut donc rendre $f(x)$ « aussi grand que l'on veut » en choisissant x « suffisamment grand ».

On dit que $f(x)$ tend vers $+\infty$ (ou que la limite de $f(x)$ est $+\infty$) lorsque x tend vers $+\infty$.

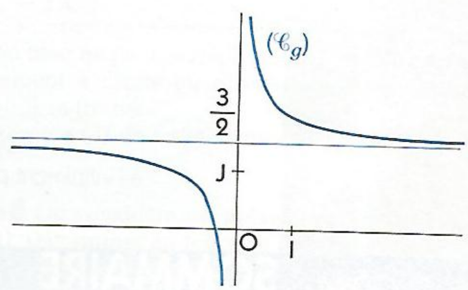
On écrit : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

De même, si x tend vers $-\infty$, alors $f(x)$ tend vers $-\infty$. On écrit : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.

Limite finie

La courbe $(\mathscr{C}_g)$ ci-contre est la représentation graphique de la fonction g définie par : $g(x) = \frac{3x+1}{2x}$.

Intéressons-nous au comportement de $g(x)$ lorsque x prend des valeurs « de plus en plus grandes ».



• À l'aide de la calculatrice, compléter le tableau suivant.

x	10	10^2	10^3	10^4	10^5
$g(x)$					

• Démontrer que : $\forall x \in \mathbb{R}^*, g(x) - \frac{3}{2} = \frac{1}{2x}$.

• Dans chacun des cas suivants, déterminer un nombre réel A tel que :

a) $x > A \Rightarrow |g(x) - \frac{3}{2}| < 10^{-3}$;

b) $x > A \Rightarrow |g(x) - \frac{3}{2}| < 10^{-10}$.

On admet que l'on peut rendre $g(x)$ « aussi proche de $\frac{3}{2}$ que l'on veut » en choisissant x « suffisamment grand ».

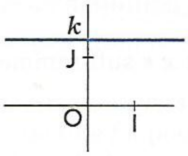
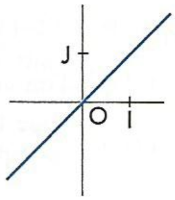
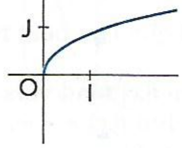
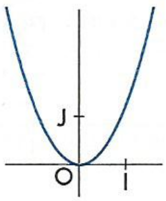
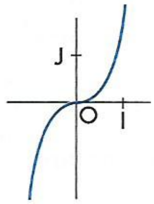
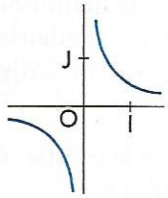
On dit que $g(x)$ tend vers $\frac{3}{2}$ (ou que la limite de $g(x)$ est $\frac{3}{2}$) lorsque x tend vers $+\infty$.

On écrit : $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \frac{3}{2}$.

De même, si x tend vers $-\infty$, alors $g(x)$ tend vers $\frac{3}{2}$. On écrit : $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = \frac{3}{2}$.

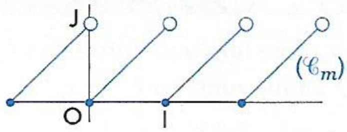
Limites en l'infini de fonctions élémentaires

Nous admettons les résultats suivants.

		
$\lim\limits_{x \to +\infty} k = k$; $\lim\limits_{x \to -\infty} k = k$	$\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$; $\lim\limits_{x \to -\infty} x = -\infty$	$\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$
		
$\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$; $\lim\limits_{x \to -\infty} x^2 = +\infty$ si $n \in \mathbb{N}^*$ et n pair $\lim\limits_{x \to +\infty} x^n = +\infty$; $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n = +\infty$	$\lim\limits_{x \to +\infty} x^3 = +\infty$; $\lim\limits_{x \to -\infty} x^3 = -\infty$ si $n \in \mathbb{N}$ et n impair $\lim\limits_{x \to +\infty} x^n = +\infty$; $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n = -\infty$	$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$; $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$ si $n \in \mathbb{N}^*$ $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x^n} = 0$; $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x^n} = 0$

Remarques

- *Lorsqu'une fonction admet une limite en $+\infty$ (ou en $-\infty$), cette limite est unique.*
- *Certaines fonctions n'admettent pas de limite en l'infini ; ainsi la fonction mantisse, définie par $m(x) = x - E(x)$, n'admet de limite ni en $+\infty$ ni en $-\infty$.*

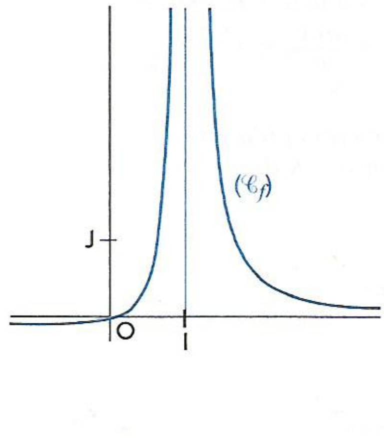


- *Une fonction f n'admet pas de limite en $+\infty$ (respectivement $-\infty$) si son ensemble de définition est majoré (respectivement minoré). Ainsi l'ensemble de définition de la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est $\mathbb{R}_+$; cette fonction n'admet donc pas de limite en $-\infty$.*

1.2. Limite d'une fonction en x_0

Limite infinie

La courbe $(\mathscr{C}_f)$ ci-contre est la représentation graphique de la fonction f définie par : $f(x) = \dfrac{x}{4(x-1)^2}$.



L'ensemble de définition de f est $\mathbb{R}\backslash\{1\}$.
Intéressons-nous au comportement de $f(x)$ lorsque x prend des valeurs « de plus en plus proches de 1 ».

- À l'aide de la calculatrice, compléter le tableau suivant.

x	0,9	0,99	0,999	1	1,001	1,01	1,1
$f(x)$							

Ce tableau et la courbe $(\mathscr{C}_f)$ nous conduisent à conjecturer que $f(x)$ tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers 1.

• Démontrer que : $\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{1\}, x > \frac{1}{2} \Rightarrow f(x) > \frac{1}{8(x-1)^2}$.

• En déduire que :

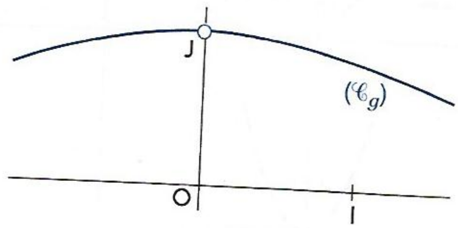
a) $\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{1\}, |x-1| < 10^{-3} \Rightarrow f(x) > \frac{1}{8}\ 10^6$;

b) $\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{1\}, |x-1| < 10^{-5} \Rightarrow f(x) > \frac{1}{8}\ 10^{10}$.

On admet que l'on peut rendre $f(x)$ « aussi grand que l'on veut » en choisissant x « suffisamment proche de 1 ».
On dit que $f(x)$ tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers 1.
On écrit : $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = +\infty$.

Limite finie

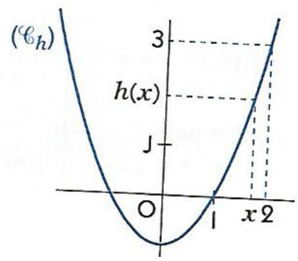
• On considère la fonction g définie par : $g(x) = \frac{\sin x}{x}$.
L'ensemble de définition de g est $\mathbb{R}^*$.
À l'aide de la calculatrice, compléter le tableau suivant.



x	-1	$-0,1$	$-0,001$	0	0,001	0,1	1
$g(x)$							

Ce tableau et la courbe $(\mathscr{C}_g)$ nous conduisent à conjecturer que : $\lim\limits_{x \to 0} g(x) = 1$.

Ce résultat sera établi au §2.4. de ce chapitre.



• On considère la fonction h définie par : $h(x) = x^2 - 1$.
L'ensemble de définition de h est $\mathbb{R}$.
On conjecture de façon analogue que : $\lim\limits_{x \to 2} h(x) = 3$.

De plus, on remarque que : $h\ (2) = 3$.

Plus généralement, nous admettons la propriété suivante.

Propriété

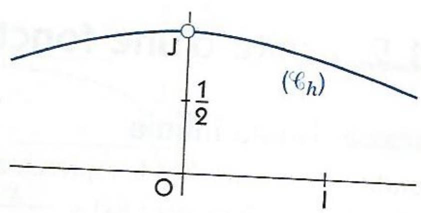
Soit f une fonction définie en x_0.
Si f admet une limite en x_0, alors : $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Remarques

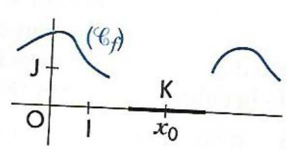
• *Lorsqu'une fonction admet une limite en x_0, cette limite est unique.*

• *Une fonction définie en x_0, n'admet pas nécessairement une limite en x_0.*
Ainsi la fonction h, définie par

$$\begin{cases} h(x) = \frac{\sin x}{x}, \text{ si } x \in \mathbb{R}^* \\ h(0) = \frac{1}{2} \end{cases}$$ *n'admet pas de limite en 0.*

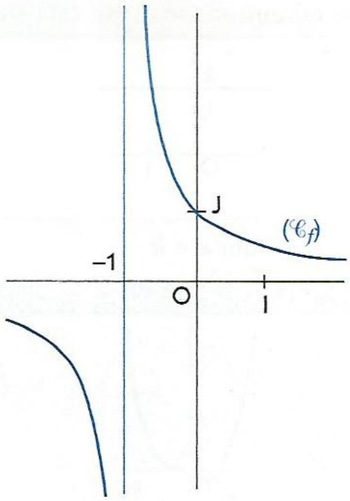


• *Une fonction f n'a pas de limite en x_0 s'il existe un intervalle ouvert K de centre x_0 tel que : $D_f \cap K = \varnothing$.*



Limite à gauche, limite à droite

• La courbe $(\mathscr{C}_f)$ ci-contre est la représentation graphique de la fonction f définie par : $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$.



L'ensemble de définition de f est $]-\infty\,;-1[\,\cup\,]-1\,;+\infty[$.

– Soit f_1 la restriction de f à $]-\infty\,;-1[$. On a : $\lim\limits_{x \to -1} f_1(x) = -\infty$.

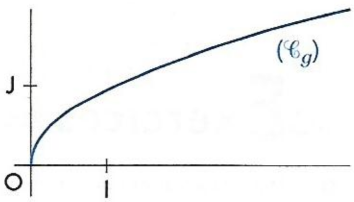
On dit que $f(x)$ tend vers $-\infty$ lorsque x tend vers -1 par valeurs inférieures ou que f a pour limite $-\infty$ à gauche en -1.
On écrit : $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ <}} f(x) = -\infty$.

– Soit f_2 la restriction de f à $]-1\,;+\infty[$. On a : $\lim\limits_{x \to -1} f_2(x) = +\infty$.

On dit que $f(x)$ tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers -1 par valeurs supérieures ou que f a pour limite $+\infty$ à droite en -1.
On écrit : $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ >}} f(x) = +\infty$.

– Les limites à gauche et à droite de f en -1 étant distinctes, la fonction f n'a pas de limite en -1.

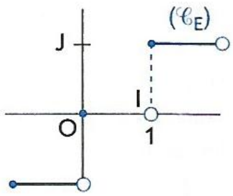
• La courbe $(\mathscr{C}_g)$ ci-contre est la représentation graphique de la fonction g définie par : $g(x) = \sqrt{x}$.



L'ensemble de définition de g est $[0\,;+\infty[$. On a : $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} g(x) = 0$.

La fonction n'étant pas définie pour les nombres réels strictement négatifs, elle n'a pas de limite à gauche en 0.
De plus, $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} g(x) = g(0)$; on dit que : $\lim\limits_{x \to 0} g(x) = 0$.

• La courbe $(\mathscr{C}_E)$ ci-contre est la représentation graphique de la fonction partie entière.



L'ensemble de définition de cette fonction est $\mathbb{R}$.
On a : $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} E(x) = 0$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} E(x) = 1$.

La fonction partie entière n'a donc pas de limite en 1.

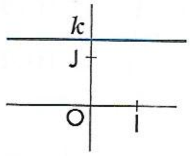
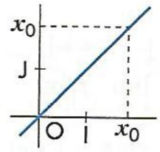
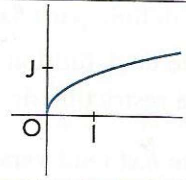
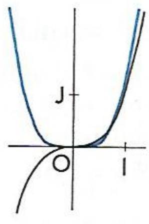
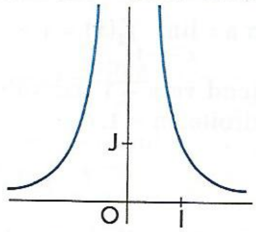
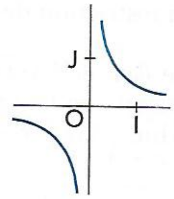
• Reprenons la fonction h de la remarque précédente définie par : $\begin{cases} h(x) = \dfrac{\sin x}{x}, \text{ si } x \in \mathbb{R}^* \\ h(0) = \dfrac{1}{2} \end{cases}$;

on a : $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} h(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} h(x) = 1$.

Cependant, on a vu que cette fonction n'admet pas de limite en 0, puisque $h(0) \neq 1$.

Limites de fonctions élémentaires

Nous admettons les résultats suivants.

		
$\lim\limits_{x \to x_0} k = k$	$\lim\limits_{x \to x_0} x = x_0$	$\lim\limits_{x \to 0} \sqrt{x} = 0$
		
si $n \in \mathbb{N}^*$ $\lim\limits_{x \to 0} x^n = 0$	si $n \in \mathbb{N}^*$ et n pair $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} \frac{1}{x^n} = +\infty$; $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{1}{x^n} = +\infty$	si $n \in \mathbb{N}$ et n impair $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} \frac{1}{x^n} = -\infty$; $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{1}{x^n} = +\infty$

Exercices

1.a Dans chacun des cas suivants conjecturer, à l'aide de la calculatrice, le comportement de $f(x)$ lorsque x prend des valeurs « de plus en plus grandes ».

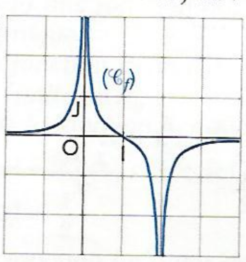
a) $f : x \mapsto 5x^2 - 1000$;

b) $f : x \mapsto -x^3 + 10\,x^2 + 1000$;

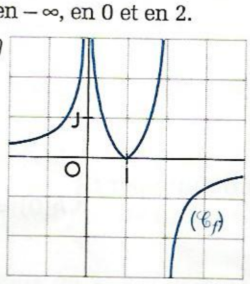
c) $f : x \mapsto 0{,}0002\,x^3 - 10\,x^2 - 10^6$.

1.b Dans chacun des cas suivants, $(\mathscr{C}_f)$ est la représentation graphique d'une fonction f. Conjecturer les limites de f en $+\infty$, en $-\infty$, en 0 et en 2.

a)



b)



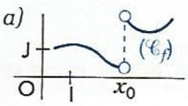
1.c Dans chacun des cas suivants conjecturer, à l'aide de la calculatrice, le comportement de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$, puis lorsque x tend vers $-\infty$.

a) $f : x \mapsto \dfrac{3x - 1}{x - 3}$; *b)* $f : x \mapsto \dfrac{3x - 1}{x^2 - 3}$;

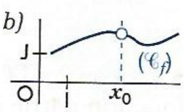
c) $f : x \mapsto \dfrac{x^2 - 10^5}{x^2 + 10^6}$; *d)* $f : x \mapsto \dfrac{10^{10}}{x^2 + 1}$.

1.d Dans chacun des cas suivants, $(\mathscr{C}_f)$ est la représentation graphique d'une fonction f. Préciser à chaque fois si la fonction f a une limite en x_0, à droite en x_0, à gauche en x_0.

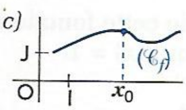
a)



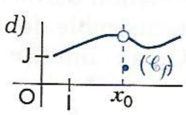
b)



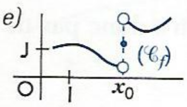
c)



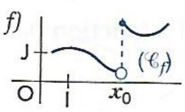
d)



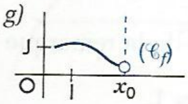
e)



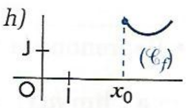
f)



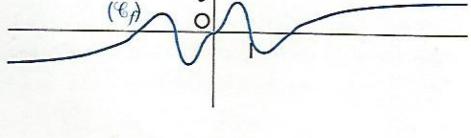
g)



h)



1.e $(\mathscr{C}_f)$ est la représentation graphique d'une fonction f.
Conjecturer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.



2 Calculs de limites

2.1. Propriétés de comparaison

Majoration, minoration

Nous admettons les propriétés suivantes.

Propriétés

Soit f une fonction.

- **S'il existe une fonction g telle que $f \geq g$ sur un intervalle $]A\,;+\infty[$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$,**
alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.
- **S'il existe une fonction g telle que $f \leq g$ sur un intervalle $]A\,;+\infty[$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$,**
alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$.

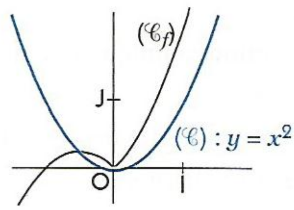
Exemple

Soit f la fonction définie par : $f(x) = |x|\,(x+1)$.

On a : $D_f = \mathbb{R}$ et $\forall\, x \in\,]0\,;+\infty[,\ f(x) = x^2 + x$.

Donc : $\forall\, x \in\,]0\,;+\infty[,\ f(x) > x^2$.

Or : $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$. On en déduit que : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.



Remarque

On a une propriété analogue :
- *lorsque x tend vers $-\infty$ en remplaçant l'intervalle $]A\,;+\infty[$ par $]-\infty\,;A[$;*
- *lorsque x tend vers x_0 (éventuellement par valeurs inférieures ou supérieures) en remplaçant l'intervalle $]A\,;+\infty[$ par un intervalle ouvert de centre x_0 (éventuellement $]a\,;x_0[$ ou $]x_0\,;b[$).*

Exemple

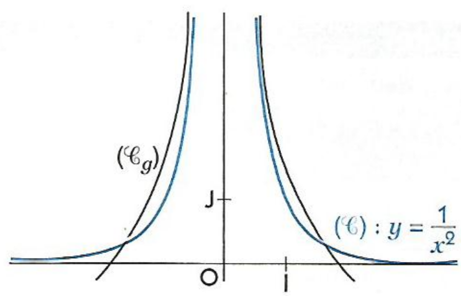
Soit g la fonction définie par : $g(x) = \dfrac{1}{x^2} + \cos x$.

On a : $D_g = \mathbb{R}^*$ et $\forall\, x \in\,]-\dfrac{\pi}{2}\,;\dfrac{\pi}{2}[,\ 0 \leq \cos x$.

Donc : $\forall\, x \in D_g \cap\,]-\dfrac{\pi}{2}\,;\dfrac{\pi}{2}[,\ g(x) \geq \dfrac{1}{x^2}$.

Or : $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x^2} = +\infty$.

On en déduit que : $\lim\limits_{x \to 0} g(x) = +\infty$.



Encadrement

Nous admettons la propriété suivante, souvent appelée « théorème des gendarmes ».

Propriété

Soit f une fonction.

S'il existe deux fonctions g, h telles que $g \leq f \leq h$ sur un intervalle $]A\,;+\infty[$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = l$, alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = l$.

Exemple

Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{1}{1 + \mathrm{E}(x)}$, où E désigne la fonction partie entière.

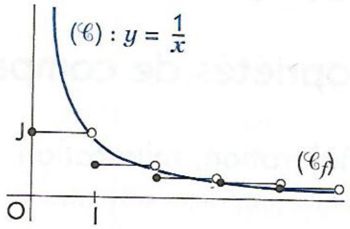
On a : $\mathrm{D}_f =]-\infty\,; -1[\cup [0\,; +\infty[$.

et $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{E}(x) \le x < \mathrm{E}(x) + 1$.

Donc : $\forall\, x \in\,]0\,; +\infty[$, $0 \le f(x) \le \dfrac{1}{x}$.

Or : $\lim\limits_{x \to +\infty} 0 = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0$.

On en déduit que : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.



Remarques

- *Cette propriété est parfois formulée de la façon suivante.*
« S'il existe une fonction g et un nombre réel l tels que $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0$ et $|f(x) - l| \le g(x)$ sur un intervalle $]A\,; +\infty[$, alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = l$. »
- *Comme précédemment, on a une propriété analogue lorsque x tend vers $-\infty$ et lorsque x tend vers x_0 (éventuellement par valeurs inférieures ou supérieures).*

Exemple

Soit f la fonction définie par : $f(x) = x^2 \cos \dfrac{1}{x}$.

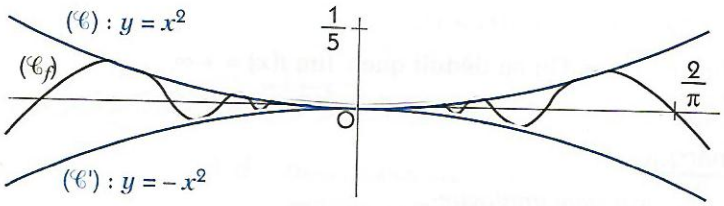
On a : $\mathrm{D}_f = \mathbb{R}^*$

et $\forall\, x \in \mathbb{R}^*$, $-1 \le \cos \dfrac{1}{x} \le 1$.

Donc : $\forall\, x \in \mathbb{R}^*$, $|f(x)| \le x^2$.

Or : $\lim\limits_{x \to 0} x^2 = 0$.

On en déduit que : $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$.



Comparaison de limites

Nous admettons la propriété suivante.

Propriété

Soit f et g deux fonctions telles que $f \le g$ sur un intervalle $]A\,; +\infty[$.
Si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = l$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = l'$, alors $l \le l'$.

Remarque

Comme précédemment, on a une propriété analogue lorsque x tend vers $-\infty$ et lorsque x tend vers x_0 (éventuellement par valeurs inférieures ou supérieures).

2.2. Limites et opérations sur les fonctions

Les propriétés présentées sous forme de tableaux dans ce paragraphe sont admises.

Elles donnent les limites en x_0 des fonctions $f + g$, fg, $\dfrac{1}{g}$, $|f|$ et $\sqrt{f}$, connaissant les limites en x_0 des fonctions f et g.

Elles restent vraies pour les limites de ces fonctions en $+\infty$, en $-\infty$ et en x_0 par valeurs supérieures ou inférieures.

Dans certains cas on ne peut conclure directement. Ces cas sont signalés par le symbole ⓘ.

Limite de la somme de deux fonctions

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$	l	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{x \to x_0} g(x)$	l'	l'	l'	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x \to x_0} (f+g)(x)$	$l + l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	?

Exemples

• Soit f la fonction définie par : $f(x) = x^2 + \frac{1}{x^4}$.

On a : $\lim\limits_{x \to 0} x^2 = 0$ et $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x^4} = +\infty$; donc : $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = +\infty$.

On a : $\lim\limits_{x \to -\infty} x^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x^4} = 0$; donc : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$.

• Soit g la fonction définie par : $g(x) = x^2 + x$.

On a : $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$; donc : $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$.

On a : $\lim\limits_{x \to -\infty} x^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} x = -\infty$; on ne peut donc conclure directement.

• Soit h la fonction définie par : $h(x) = x + 3$.

On a : $\lim\limits_{x \to 2} x = 2$ et $\lim\limits_{x \to 2} 3 = 3$; donc : $\lim\limits_{x \to 2} h(x) = 5$.

Limite du produit de deux fonctions

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$	l	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{x \to x_0} g(x)$	l'	l' $(l' \neq 0)$	l' $(l' \neq 0)$	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x \to x_0} (fg)(x)$	$l\,l'$	$\begin{cases} +\infty, \text{ si } l' > 0 \\ -\infty, \text{ si } l' < 0 \end{cases}$	$\begin{cases} -\infty, \text{ si } l' > 0 \\ +\infty, \text{ si } l' < 0 \end{cases}$	?	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$

Remarque

On en déduit que si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$ alors, pour tout entier naturel n non nul, on a : $\lim\limits_{x \to x_0} f^n(x) = l^n$.

Exemples

• Soit f la fonction définie par : $f(x) = -3x^5$.

On a : $\lim\limits_{x \to -\infty} -3 = -3$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} x^5 = -\infty$; donc : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$.

• Reprenons la fonction g définie par : $g(x) = x^2 + x$. On a : $g(x) = x^2\left(1 + \frac{1}{x}\right)$.

Or : $\lim\limits_{x \to -\infty} x^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right) = 1$; donc : $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = +\infty$.

• Soit h la fonction définie par : $h(x) = 3x$.

On a : $\lim\limits_{x \to 2} x = 2$ et $\lim\limits_{x \to 2} 3 = 3$; donc : $\lim\limits_{x \to 2} h(x) = 6$.

• Soit k la fonction définie par : $k(x) = 5(x + 3)$.

On a : $\lim\limits_{x \to 2} 5 = 5$ et $\lim\limits_{x \to 2} (x + 3) = 5$; donc : $\lim\limits_{x \to 2} k(x) = 25$.

Limite de l'inverse d'une fonction

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$	$l\ (l \neq 0)$	$+\infty$ ou $-\infty$	0 et $f(x) > 0$	0 et $f(x) < 0$
$\lim\limits_{x \to x_0} \left(\frac{1}{f}\right)(x)$	$\frac{1}{l}$	0	$+\infty$	$-\infty$

Exemple

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \dfrac{1}{x-3}$.

On a : $D_f = \mathbb{R}\backslash\{3\}$ et $\lim\limits_{x \to 3} (x-3) = 0$.

Or : $\begin{cases} f(x) < 0, \text{ si } x < 3 \\ f(x) > 0, \text{ si } x > 3. \end{cases}$

On a : $\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ <}} \dfrac{1}{x-3} = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ >}} \dfrac{1}{x-3} = +\infty$; donc, f n'a pas de limite en 3.

Limite du quotient de deux fonctions

Pour calculer la limite en x_0 de $\dfrac{f}{g}$, il suffit de remarquer que $\dfrac{f}{g} = f\dfrac{1}{g}$ et d'utiliser les propriétés précédentes.

Exemples

- Soit f la fonction définie par : $f(x) = \dfrac{5}{x^2+1}$.

On a : $\lim\limits_{x \to +\infty} 5 = 5$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^2+1) = +\infty$; donc : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x^2+1} = 0$.

Ainsi : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

- Soit g la fonction définie par : $\dfrac{x^3 - 2x + 1}{x^2 - 2x}$.

On a : $\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} (x^3 - 2x + 1) = \lim\limits_{x \to +\infty} x^3 \left(1 - \dfrac{2}{x^2} + \dfrac{1}{x^3}\right) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} (x^2 - 2x) = \lim\limits_{x \to +\infty} x^2 \left(1 - \dfrac{2}{x}\right) = +\infty \end{cases}$; on ne peut donc conclure directement.

Limite de la valeur absolue d'une fonction

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$	l	$+\infty$ ou $-\infty$
$\lim\limits_{x \to x_0} (\lvert f \rvert)(x)$	$\lvert l \rvert$	$+\infty$

Exemples

- On a : $\lim\limits_{x \to 0} (x^2 - 2) = -2$; donc : $\lim\limits_{x \to 0} \lvert x^2 - 2 \rvert = 2$.
- On a : $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^2 + 2) = +\infty$; donc : $\lim\limits_{x \to +\infty} \lvert x^2 + 2 \rvert = +\infty$.

Limite de la racine carrée d'une fonction

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$	$l\ (l \geq 0)$	$+\infty$
$\lim\limits_{x \to x_0} (\sqrt{f})(x)$	$\sqrt{l}$	$+\infty$

Exemples

- On a : $\lim\limits_{x \to 0} (x^2 + 2) = 2$; donc : $\lim\limits_{x \to 0} \sqrt{x^2+2} = \sqrt{2}$.
- On a : $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^2 + 2) = +\infty$; donc : $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x^2+2} = +\infty$.

Limite de $x \mapsto f(ax + b)$

- Soit f la fonction définie par : $f(x) = x^2$.

La fonction f admet une limite en tout nombre réel α ;

en effet : $\lim\limits_{x \to \alpha} f(x) = \left(\lim\limits_{x \to \alpha} x\right)\left(\lim\limits_{x \to \alpha} x\right) = f(\alpha)$ (1).

Considérons un nombre réel x_0. On se propose d'étudier la limite en x_0 de la fonction : $x \mapsto f(-2x + 3)$.

On a : $\lim\limits_{x \to x_0} f(-2x + 3) = -2x_0 + 3$.

$$\begin{aligned}\text{Donc : } \lim_{x \to x_0} f(-2x + 3) &= \left[\lim_{x \to x_0} (-2x + 3)\right]\left[\lim_{x \to x_0} (-2x + 3)\right] \\ &= (-2x_0 + 3)^2 \\ &= f(-2x_0 + 3).\end{aligned}$$

En appliquant (1) avec $\alpha = -2x_0 + 3$, on en déduit que : $\lim\limits_{x \to x_0} f(-2x + 3) = \lim\limits_{u \to -2x_0+3} f(u)$.

Plus généralement, on admet la propriété suivante, parfois appelée « théorème de changement de variable ».

Propriété

Soit f une fonction, x_0 un nombre réel et $x \mapsto ax + b$ une fonction affine non constante.
La fonction $x \mapsto f(ax + b)$ admet une limite en x_0 si et seulement si f admet une limite en $ax_0 + b$.
On a alors : $\lim\limits_{x \to x_0} f(ax + b) = \lim\limits_{u \to ax_0 + b} f(u)$.

Remarque

Pour retrouver cette formule, on peut poser : $u = ax + b$; quand x tend vers x_0, u tend vers $ax_0 + b$.
On obtient : $\lim\limits_{x \to x_0} f(ax + b) = \lim\limits_{u \to ax_0 + b} f(u)$.

Exemple

Pour calculer $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\sin(3x - 6)}{3x - 6}$, on pose : $u = 3x - 6$.

Quand x tend vers 2, u tend vers 0 ; donc : $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\sin(3x - 6)}{3x - 6} = \lim\limits_{u \to 0} \dfrac{\sin u}{u} = 1$.

2.3. Exemples de recherche de limite

Limite d'une fonction polynôme en l'infini

On se propose de déterminer la limite en $+\infty$ de la fonction $x \mapsto 3x^4 - 2x^2$.

On a : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $3x^4 - 2x^2 = 3x^4\left(1 - \dfrac{2}{3x^2}\right)$.

Or : $\lim\limits_{x \to +\infty} (3x^4) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 - \dfrac{2}{3x^2}\right) = 1$; donc : $\lim\limits_{x \to +\infty} (3x^4 - 2x^2) = \lim\limits_{x \to +\infty} 3x^4 = +\infty$.

Plus généralement, on a la propriété suivante.

Propriété

La limite en l'infini d'un polynôme est égale à la limite en l'infini de son monôme de plus haut degré.

Exemple

$\lim\limits_{x \to -\infty} (-3x^5 - \sqrt{2}\,x^4 + \pi x^3 - 105\,x^2 - 16\,x - 1000) = \lim\limits_{x \to -\infty} (-3x^5) = +\infty.$

Limite d'une fonction rationnelle en l'infini

On se propose de déterminer la limite en $+\infty$ de la fonction $x \mapsto \dfrac{3x^4 + 2x^2}{-7x^5 + 11}$.

$$\text{On a : } \forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \frac{3x^4 + 2x^2}{-7x^5 + 11} = \frac{3x^4\left(1 + \dfrac{2x^2}{3x^4}\right)}{-7x^5\left(1 - \dfrac{11}{7x^5}\right)} = \frac{3x^4}{7x^5} \times \frac{1 + \dfrac{2x^2}{3x^4}}{1 - \dfrac{11}{7x^5}}.$$

$$\text{Or : } \lim_{x \to +\infty} \frac{3x^4}{-7x^5} = \lim_{x \to +\infty} \frac{3}{-7x} = 0 \text{ et } \lim_{x \to -\infty} \frac{1 + \dfrac{2x^2}{3x^4}}{1 - \dfrac{11}{7x^5}} = 1\ ;$$

$$\text{donc : } \lim_{x \to +\infty} \frac{3x^4 + 2x^2}{-7x^5 + 11} = \lim_{x \to +\infty} \frac{3x^4}{-7x^5} = 0.$$

Plus généralement, on a la propriété suivante.

Propriété

La limite en l'infini d'une fraction rationnelle est égale à la limite en l'infini du quotient des monômes de plus haut degré du numérateur et du dénominateur.

Exemples

- $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{3x^6 + 2x^5 - 41x}{-7x^4 + 11x^2 - 37} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{3x^6}{-7x^4} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{3x^2}{-7} = -\infty.$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x^5 + 12x^2 - 17x}{-7x^5 + 13x^2 - 23} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x^5}{-7x^5} = -\dfrac{3}{7}.$

Autres exemples

1. Déterminer la limite en $+\infty$ de la fonction $x \mapsto \sqrt{x^2 + 1} - x$.

On a : $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x^2 + 1} = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$; on ne peut donc conclure directement.

On a : $\forall x \in \mathbb{R},\ \sqrt{x^2 + 1} + x \neq 0.$

On peut donc écrire : $\forall x \in \mathbb{R},\ \sqrt{x^2 + 1} - x = \dfrac{(\sqrt{x^2 + 1} - x)(\sqrt{x^2 + 1} + x)}{\sqrt{x^2 + 1} + x} = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + 1} + x}.$

Or : $\lim\limits_{x \to +\infty} (\sqrt{x^2 + 1} + x) = +\infty$; donc : $\lim\limits_{x \to +\infty} (\sqrt{x^2 + 1} - x) = 0.$

2. Déterminer la limite en 2 de la fonction $x \mapsto \dfrac{x^2 - 4}{x^2 + 2x - 8}$.

On a : $\lim\limits_{x \to 2} (x^2 - 4) = 0$ et $\lim\limits_{x \to 2} (x^2 + 2x - 8) = 0$; on ne peut donc conclure directement.

On a : $\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{-4\ ;\ 2\},\ \dfrac{x^2 - 4}{x^2 + 2x - 8} = \dfrac{(x - 2)(x + 2)}{(x - 2)(x + 4)} = \dfrac{x + 2}{x + 4}.$

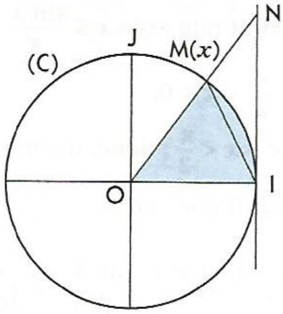
Or : $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x + 2}{x + 4} = \dfrac{2}{3}$; donc : $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 4}{x^2 + 2x - 8} = \dfrac{2}{3}.$

M Pour calculer la limite en x_0 d'une fonction du type $\dfrac{f}{g}$ telle que $f(x_0) = g(x_0) = 0$, on peut parfois mettre $(x - x_0)$ en facteur au numérateur et au dénominateur, puis simplifier.

2.4. Travaux dirigés

L'objet de ce travail dirigé est d'établir certaines limites qui seront réinvesties ultérieurement.

1°) Soit x un élément de $]0\,;\frac{\pi}{2}[$, M son image sur le cercle trigonométrique (C) et N le point d'intersection de la droite (OM) avec la tangente à (C) en I.
Calculer en fonction de x les aires des triangles OIM et OIN, ainsi que l'aire du secteur circulaire OIM (région colorée).
En déduire que : $\sin x \leq x \leq \tan x$.



2°) On suppose maintenant que x est élément de $\left]-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$.

***a)* Démontrer que : $|\sin x| \leq |x|$. En déduire que : $\lim\limits_{x \to 0} \sin x = 0$.**

***b)* Démontrer que : $\lim\limits_{x \to 0} \cos 2x = 1$. En déduire que : $\lim\limits_{x \to 0} \cos x = 1$.**

3°) On suppose maintenant que x est élément de $\left]-\frac{\pi}{2}\,;0\right[\cup\left]0\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$.

***a)* Démontrer que : $\cos x \leq \dfrac{\sin x}{x} \leq 1$. En déduire que : $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$.**

***b)* Vérifier que : $\dfrac{1-\cos x}{x^2} = \left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^2 \dfrac{1}{1+\cos x}$. En déduire que : $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2} = \dfrac{1}{2}$.**

***c)* Déterminer la limite en 0 de la fonction $x \mapsto \dfrac{\cos x - 1}{x}$.**

Solution

1°) Le triangle OIM a pour hauteur $\sin x$ et pour base 1 ; son aire est donc $\frac{1}{2}\sin x$.
Le triangle OIN a pour hauteur $\tan x$ et pour base 1 ; son aire est donc $\frac{1}{2}\tan x$.
Le secteur circulaire OIM a pour aire $\frac{1}{2}x$.
L'aire du secteur circulaire OIM est comprise entre l'aire du triangle OIM et l'aire du triangle OIN ; on en déduit que : $\sin x \leq x \leq \tan x$.

2°) *a)* L'inégalité est évidente pour $x = 0$.
Pour $x \neq 0$, deux cas sont à envisager.

1er cas : $0 < x < \frac{\pi}{2}$.
D' après la question 1, on a : $0 \leq \sin x \leq x$; donc : $|\sin x| \leq |x|$.

2e cas : $-\frac{\pi}{2} < x < 0$.
On a : $0 < -x < \frac{\pi}{2}$; donc, d'après le cas précédent : $|\sin(-x)| \leq |-x|$.
On en déduit que : $|\sin x| \leq |x|$.
On a : $\lim\limits_{x \to 0} |x| = 0$ et $\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$, $|\sin x| \leq |x|$.
En appliquant le théorème des gendarmes, on en déduit que : $\lim\limits_{x \to 0} \sin x = 0$.

b) On a : $\lim\limits_{x \to 0} \cos 2x = \lim\limits_{x \to 0} (1 - 2\sin^2 x) = 1$.

On pose : $x = 2a$; on a : $\lim\limits_{x \to 0} \cos x = \lim\limits_{a \to 0} \cos 2a = 1$.

3°) *a)* Deux cas sont à envisager.

1er cas : $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

D'après la question 1, on a : $0 < \sin x \leq x \leq \frac{\sin x}{\cos x}$; donc : $0 < 1 \leq \frac{x}{\sin x} \leq \frac{1}{\cos x}$.

On en déduit que : $\cos x \leq \frac{\sin x}{x} \leq 1$.

2e cas : $-\frac{\pi}{2} < x < 0$.

On a : $0 < -x < \frac{\pi}{2}$; donc, d'après le cas précédent : $\cos(-x) \leq \frac{\sin(-x)}{-x} \leq 1$.

On en déduit que : $\cos x \leq \frac{\sin x}{x} \leq 1$.

On a : $\lim\limits_{x \to 0} \cos x = 1$, $\lim\limits_{x \to 0} 1 = 1$ et $\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2} ; 0\right[\cup \left]0 ; \frac{\pi}{2}\right[$, $\cos x \leq \frac{\sin x}{x} \leq 1$.

En appliquant le théorème des gendarmes, on en déduit que : $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

b) On a : $\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 \frac{1}{1 + \cos x} = \frac{1 - \cos^2 x}{x^2(1 + \cos x)} = \frac{1 - \cos x}{x^2}$.

De plus : $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ et $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{1 + \cos x} = \frac{1}{2}$; donc : $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$.

c) On a : $\frac{1 - \cos x}{x} = x \frac{1 - \cos x}{x^2}$.

Or : $\lim\limits_{x \to 0} x = 0$ et $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$; donc : $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0$.

Exercices

2.a Calculer : *a)* $\lim\limits_{x \to +\infty} (-x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$

et $\lim\limits_{x \to -\infty} (-x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$;

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{2x^3 - x + 1}{x^2 + x - 1}$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2x^3 - x + 1}{x^2 + x - 1}$;

c) $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{2x + 3}$; $\lim\limits_{x \to -\infty} (\sqrt{x^2 + 1} + x)$.

2.b Calculer : *a)* $\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ <}} \frac{2 - x}{x - 3}$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ >}} \frac{2 - x}{x - 3}$;

b) $\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ <}} \frac{2 - x}{9 - x^2}$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ >}} \frac{2 - x}{9 - x^2}$;

c) $\lim\limits_{x \to -2} \frac{x + 2}{x^2 - 4}$ et $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x - 2}{x^2 - x - 2}$.

2.c 1. Démontrer que :

$\forall x \in]1 ; +\infty[$, $\frac{x - \cos x}{2 + \cos x} \geq \frac{x - 1}{3}$.

En déduire : $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x - \cos x}{2 + \cos x}$.

2. En s'inspirant de la question précédente, calculer : $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x - \cos x}{2 + \cos x}$.

2.d On considère la fonction f définie par :

$f(x) = \frac{x^2 \sin x}{1 + x^4}$.

Encadrer sur $\mathbb{R}$ la fonction f par deux fonctions rationnelles simples.

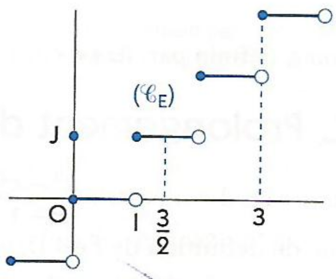
En déduire les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

3 Continuité

3.1. Définition et propriétés

Introduction

La courbe ($\mathscr{C}_E$) ci-contre est la représentation graphique de la fonction partie entière.
En 3, la fonction est définie mais n'a pas de limite.
En $\frac{3}{2}$, la fonction est définie et a une limite.
On dit que la fonction partie entière est continue en $\frac{3}{2}$ et qu'elle n'est pas continue en 3.



Définition

Soit f une fonction et x_0 un nombre réel.
f est continue en x_0 si f est définie en x_0 et $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Exemples

On a vu à la fin du paragraphe 1 que pour tous nombres réels x_0 et k : $\lim\limits_{x \to x_0} k = k$ et $\lim\limits_{x \to x_0} x = x_0$.

On en déduit que les fonctions constantes et la fonction $x \mapsto x$ sont continues en tout élément de $\mathbb{R}$.

Continuité en x_0 de fonctions élémentaires

Propriété

Les fonctions suivantes sont continues en tout élément x_0 de leur ensemble de définition.

$x \mapsto |x|$; $x \mapsto x^n$ $(n \in \mathbb{N}^*)$; $x \mapsto \cos x$;
$x \mapsto \sqrt{x}$; $x \mapsto \frac{1}{x^n}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$; $x \mapsto \sin x$.

La démonstration de cette propriété est laissée au soin du lecteur.

Propriétés

Les propriétés suivantes se déduisent de la définition de la continuité en x_0 et des propriétés des limites relatives aux opérations sur les fonctions.

Propriété 1

Soit f et g deux fonctions continues en x_0.
- **Les fonctions $f + g$, $f g$, $k f$ $(k \in \mathbb{R})$ et $| f |$ sont continues en x_0.**
- **Si $g(x_0) \neq 0$, alors la fonction $\frac{f}{g}$ est continue en x_0.**
- **Si $f(x_0) \geq 0$, alors la fonction $\sqrt{f}$ est continue en x_0.**

Exemples

- Les fonctions polynômes et les fonctions rationnelles sont continues en tout élément de leur ensemble de définition.
- La fonction f, définie par $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$, est continue en tout nombre réel x_0.
- La fonction tangente est continue en tout élément de son ensemble de définition.
- La fonction g, définie par $g(x) = |2x + 3|$, est continue en tout nombre réel x_0.

Propriété 2

Soit a et b deux nombres réels ($a \neq 0$), f une fonction et g la fonction définie par : $g(x) = f(ax + b)$.
f est continue en $a x_0 + b$ si et seulement si g est continue en x_0.

Cette propriété est une conséquence directe de la définition de la continuité et du théorème de changement de variable.

Exemple

La fonction f, définie par $f(x) = \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$, est continue en tout nombre réel x_0.

3.2. Prolongement d'une fonction par continuité

Soit f la fonction définie par : $\dfrac{x^3 - x^2}{x - 1}$.

L'ensemble de définition de f est D_f tel que : $D_f = \mathbb{R}\backslash\{1\}$.

La fonction f n'est pas définie en 1, elle n'est donc pas continue en 1.

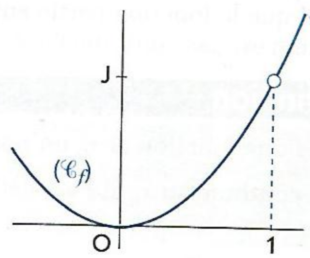
On a : $\forall x \in D_f, f(x) = x^2$.

Considérons la fonction g définie par : $g(x) = x^2$.

L'ensemble de définition de g est D_g tel que : $D_g = \mathbb{R}$.

g est continue en 1 ; g et f sont égales sur D_f ; $D_g = D_f \cup \{1\}$.

On dit que g est le prolongement par continuité de f en 1.



Définition

Soit f une fonction non définie en x_0 et l un nombre réel tel que : $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$.

On appelle prolongement de f par continuité en x_0 la fonction g définie par : $\begin{cases} g(x) = f(x), \text{ si } x \in D_f \\ g(x_0) = l \end{cases}$.

Exemples

- Soit f la fonction définie par : $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$.

On a : $D_f = \mathbb{R}^*$ et $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$.

Donc, la fonction g définie par $\begin{cases} g(x) = \dfrac{\sin x}{x}, \text{ si } x \neq 0 \\ g(0) = 1 \end{cases}$ est le prolongement par continuité de f en 0.

- Soit f la fonction définie par : $f(x) = \dfrac{\sqrt{x} - 1}{x - 1}$.

On a : $D_f = [0\ ;\ 1[\cup]1\ ;\ +\infty[$.

Calculons la limite de f en 1.

On a : $\forall x \in D_f, f(x) = \dfrac{\sqrt{x} - 1}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)} = \dfrac{1}{\sqrt{x} + 1}$.

Donc : $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \dfrac{1}{2}$.

La fonction g définie par $\begin{cases} g(x) = \dfrac{\sqrt{x} - 1}{x - 1}, \text{ si } x \in D_f \\ g(1) = \dfrac{1}{2} \end{cases}$ est le prolongement de f par continuité en 1.

Exercices

3.a Soit f la fonction définie par :
$\begin{cases} f(x) = x, \text{ si } x \leq 1 \\ f(x) = x^2, \text{ si } x > 1. \end{cases}$
Étudier la continuité de f en 1.

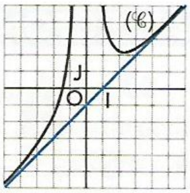
3.b Donner un exemple de fonction dont l'ensemble de définition est $\mathbb{R}^*$ et qui n'est pas prolongeable par continuité en 0.

Exercices

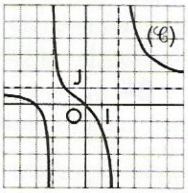
APPRENTISSAGE

Approche intuitive de la notion de limite

1 ($\mathscr{C}$) est la représentation graphique d'une fonction f. Conjecturer les limites de f en $-\infty$, $+\infty$ et 0.



2 ($\mathscr{C}$) est la représentation graphique d'une fonction f. Conjecturer les limites de f en $-\infty$, $+\infty$, -2 et $+2$ (éventuellement à gauche et à droite).



3 Dans chacun des cas suivants, faire l'esquisse, dans le plan muni du repère (O, I, J), de la courbe représentative d'une fonction f qui vérifient les conditions énoncées.

a) $D_f = \mathbb{R}$; $f(0) = 1$;
$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -2$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 3$.

b) $D_f = \mathbb{R} \backslash \{1\}$; $f(0) = 2$; $f(3) = -1$;
$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 4$; $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

c) $D_f =]-2\,;0[\cup]0\,;+\infty[$; $f(-1) = 0$; $f(2) = -1$;
$\lim\limits_{x \to -2} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$;
$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = +\infty$.

4 Soit f la fonction définie par : $f(x) = x - \sqrt{x}$.
1. Démontrer que : $\forall\, x \in]4\,;+\infty[,\ f(x) > \sqrt{x}$.
2. *a)* Trouver un nombre réel A pour lequel :
$x > A \Rightarrow f(x) > 10^4$.
b) B étant un nombre réel strictement positif, trouver un nombre réel A pour lequel : $x > A \Rightarrow f(x) > B$.
c) En déduire la limite de f en $+\infty$.

5 Soit f la fonction définie par : $f(x) = \dfrac{x+2}{x+1}$.
1. Démontrer que : $\forall\, x \in \mathbb{R}^*_+,\ |f(x) - 1| < \dfrac{1}{x}$.
2. *a)* Trouver un nombre réel A pour lequel :
$x > A \Rightarrow |f(x) - 1| < 10^{-4}$.
b) ε étant un nombre réel strictement positif, trouver un nombre réel A pour lequel : $x > A \Rightarrow |f(x) - 1| < \varepsilon$.
c) En déduire la limite de f en $+\infty$.

6 Soit f la fonction définie par : $f(x) = \dfrac{x^2}{x+1}$.
1. Démontrer que : $\forall\, x \in]1\,;+\infty[,\ f(x) > \dfrac{x}{2}$.
2. *a)* Comment choisir x pour que : $|f(x)| > 10^6$?
b) Peut-on rendre $f(x)$ aussi grand que l'on veut ?
c) En déduire la limite de f en $+\infty$.

Calculs de limites

7 Soit f la fonction définie par : $f(x) = \sqrt{x^2 + \cos^2 x}$.
Utiliser les propriétés de comparaison pour calculer la limite de f en $+\infty$.

8 Soit f la fonction définie par : $f(x) = x\sqrt{1 + \sin^2 x}$.
Utiliser les propriétés de comparaison pour calculer la limite de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

9 Soit f la fonction définie par : $f(x) = \dfrac{x+1}{\sqrt{x} - 1}$.
Démontrer que : $\forall\, x \in]1\,;+\infty[,\ f(x) > \sqrt{x} + 1$.
En déduire la limite de f en $+\infty$.

10 Dans chacun des cas suivants, calculer les limites de la fonction f en $+\infty$ et en $-\infty$.
a) $f(x) = 4x^3 + 3x^2 - 1$; *b)* $f(x) = x^4 - 3x^2 + 2x$;
c) $f(x) = -x^3 + 5x^2 - 7x$; *d)* $f(x) = -x^6 - x^2 + 4$;
e) $f(x) = \dfrac{4x-5}{2x+3}$; *f)* $f(x) = \dfrac{4-5x}{x+4}$;
g) $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 1}{3x^2 - 1}$; *h)* $f(x) = \dfrac{x^2+4}{x^3-1}$;
i) $f(x) = \dfrac{x^3+4}{1-2x}$; *j)* $f(x) = \dfrac{(x-2)^2}{1-3x^2}$.

11 Dans chacun des cas suivants, étudier la limite de la fonction f en x_0 *(on calculera éventuellement les limites à gauche et à droite en x_0).*
a) $f(x) = \dfrac{3}{(x-2)^2}$, $x_0 = 2$;
b) $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x+2}$, $x_0 = -2$;
c) $f(x) = \dfrac{x^2+3x-4}{x^2-1}$, $x_0 = 1$;
d) $f(x) = \dfrac{5}{x^2-4} - \dfrac{1}{x-2}$, $x_0 = 2$;
e) $f(x) = \dfrac{1}{x(x-1)} - \dfrac{1}{x}$, $x_0 = 0$;

12 Dans chacun des cas suivants, étudier la limite de la fonction f en x_0 *(on calculera éventuellement les limites à gauche et à droite en x_0).*
a) $f(x) = \dfrac{x-4}{\sqrt{x}-2}$, $x_0 = 4$; *b)* $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+2}-2}{x-2}$, $x_0 = 2$;
c) $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}-1}$, $x_0 = 0$; *d)* $f(x) = \dfrac{x\sqrt{x}-8}{4-x}$, $x_0 = 4$.

13 Dans chacun des cas suivants, calculer les limites de la fonction f en $+\infty$ et en $-\infty$.
a) $f(x) = \dfrac{\sqrt{3x^2+1}}{3x-1}$; *b)* $f(x) = x + 2 + \sqrt{x^2 - 3x + 1}$;
c) $f(x) = \dfrac{\sqrt{3x^2+1} + 5x}{3x-1}$; *d)* $f(x) = \sqrt{x^2+x} - \sqrt{x^2+1}$;
e) $f(x) = \dfrac{\sqrt{3x^2+1}}{\sqrt{4x^2+3}}$; *f)* $f(x) = \dfrac{x - \sqrt{x^2 - 3x + 1}}{2x + \sqrt{4x^2+x}}$.

14 Calculer les limites suivantes.

a) $\lim_{x \to 0} \frac{x}{\sin x}$; *b)* $\lim_{x \to 0} \left(\frac{\sin x}{x} + \tan x\right)$;

c) $\lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{x}$; *d)* $\lim_{x \to 0} \frac{\sin 3x}{2x}$;

e) $\lim_{x \to 0} \frac{\tan 2x}{5x}$; *f)* $\lim_{x \to 0} \frac{\sin 3x}{\sin 5x}$;

g) $\lim_{x \to 0} \frac{\tan 2x}{\tan 5x}$; *h)* $\lim_{x \to 0} \frac{\sin 2x}{x\cos x}$.

15 Dans les deux cas suivants, calculer la limite de f en 0.

a) $f(x) = \frac{\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) - \frac{1}{2}}{x}$; *b)* $f(x) = \frac{\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - \frac{\sqrt{2}}{2}}{x}$.

16 Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{E(\sqrt{x})}{x}$, où E désigne la fonction partie entière.

1. Démontrer que : $\forall x \in]0\ ;1[,\ f(x) = 0$.
En déduire la limite de f en 0.

2. Démontrer que :
$\forall x \in]0\ ;+\infty[,\ 0 \le f(x) \le \frac{1}{\sqrt{x}}$.
En déduire la limite de f en $+\infty$.

17 Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{x + E(x)}{x}$, où E désigne la fonction partie entière.

1. Démontrer que :
$\forall x \in]0\ ;+\infty[,\ 2 \le f(x) \le \frac{2x+1}{x}$.

2. En déduire la limite de f en $+\infty$.

Continuité

18 Dans chacun des cas suivants, étudier la continuité de f en x_0.

a) $f(x) = 3x^2 - 5x - 7,\ x_0 = 2$; *b)* $f(x) = \sqrt{4 - x},\ x_0 = 4$;

c) $f(x) = \frac{3x^2 - 5x - 7}{8x^3 - 5x + 3},\ x_0 = 1$; *d)* $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x + 2},\ x_0 = -2$.

19 Soit f la fonction définie par :

$$\begin{cases} f(x) = x^2 + 4, \text{ si } x \le 2 \\ f(x) = 3x + 2, \text{ si } x > 2. \end{cases}$$

1. Tracer la courbe représentative de f dans le plan muni du repère (O, I, J).

2. Étudier la continuité de f en 2.

20 Soit f la fonction définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x+1}{2x+3}, \text{ si } x \le 0 \\ f(x) = x^2 + x + a, \text{ si } x > 0 \end{cases}$$

Étudier la continuité de f en 0.
(On discutera suivant les valeurs du nombre réel a.)

Prolongement par continuité

21 Dans chacun des cas suivants, préciser l'ensemble de définition de la fonction f et déterminer (s'il existe) le prolongement par continuité de cette fonction en x_0.

a) $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{3x^2 - 7x + 2},\ x_0 = 2$; *b)* $f(x) = \frac{x}{|x|},\ x_0 = 0$.

c) $f(x) = \frac{x - \sqrt{x}}{\sqrt{x}},\ x_0 = 0$; *d)* $f(x) = \frac{\tan x}{x},\ x_0 = 0$;

22 Vérifier que la fonction $g : x \mapsto \frac{1}{1 + \sqrt{1 + x}}$ est le prolongement par continuité en 0 de la fonction $f : x \mapsto \frac{\sqrt{1 + x} - 1}{x}$.

APPROFONDISSEMENT

23 Soit f la fonction définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \sqrt{1 - x}, \text{ si } x \le -1 \\ f(x) = \sqrt{1 + x}, \text{ si } x > -1. \end{cases}$$

1. Tracer la courbe représentative de f dans le plan muni du repère (O, I, J).

2. Étudier la continuité de f en -1.

24 Dans chacun des cas suivants, où E désigne la fonction partie entière, étudier la limite de la fonction f en 0.

a) $f(x) = E(x) \sin x$; *b)* $f(x) = \sin(\pi E(x))$;

c) $f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} E(x)\right)$; *d)* $f(x) = E(2 \sin x)$;

e) $f(x) = x\, E\left(\frac{1}{x}\right)$; *f)* $f(x) = \frac{x\,E(x) - x}{|x|}$.

25 Soit x_0 un nombre réel et f une fonction définie sur un intervalle de centre x_0.

1. Démonter que si la fonction f est continue en x_0, alors : $\lim_{h \to 0} [f(x_0 + h) - f(x_0 - h)] = 0$.

2. Démontrer que la réciproque est fausse *(On donnera un contre-exemple.)*

26 On considère la fonction f définie par :
$f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x}$.
Utiliser les propriétés de comparaison pour calculer $\lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} f(x)$ et $\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x)$.
La fonction f a-t-elle une limite en 0 ?

27 Calculer $\lim_{x \to +\infty} \frac{x - 1}{\sin^2 x + 2}$ et $\lim_{x \to -\infty} \frac{x - 1}{\sin^2 x + 2}$.

28 Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{x}{2 - \sin\left(\frac{1}{x}\right)}$.

1. *a)* Démontrer que : $\forall x \in]0\ ; +\infty[,\ \frac{x}{3} \le f(x) \le x$.

b) Démontrer que : $\forall x \in]-\infty\ ; 0[,\ x \le f(x) \le \frac{x}{3}$.

2. En déduire les limites de f en $+\infty$, $-\infty$ et 0.

29 Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{x + \cos x}{x + \sin x}$.

1. Calculer $\lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} f(x)$ et $\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x)$.
f admet-elle une limite en 0 ?

2. Après avoir encadré sur $]1\ ; +\infty[$ la fonction f par deux fonctions plus simples, calculer $\lim_{x \to +\infty} f(x)$.

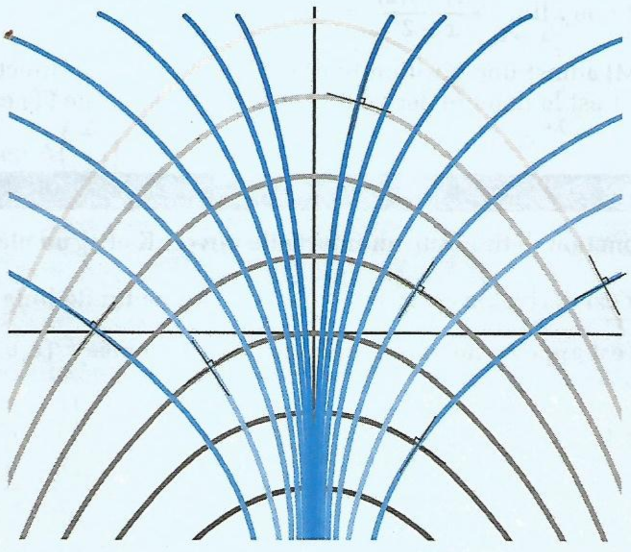
3. Calculer de la même façon $\lim_{x \to -\infty} f(x)$.

13

Dérivation

Introduction

Avec la dérivation, nous abordons une des notions fondamentales de l'analyse : le calcul différentiel. Apparu à la fin du XVI[e] siècle, ce concept a été développé au XVII[e], essentiellement par l'allemand Gottfried Wilhelm LEIBNIZ (1646-1716) et par l'anglais Isaac NEWTON (1642-1727). Ses nombreuses applications, non seulement en mathématiques, mais également dans des domaines aussi variés que la biologie, l'économie, la thermodynamique et la plupart des sciences physiques en font un instrument incontournable.



Trajectoires orthogonales d'une famille de paraboles

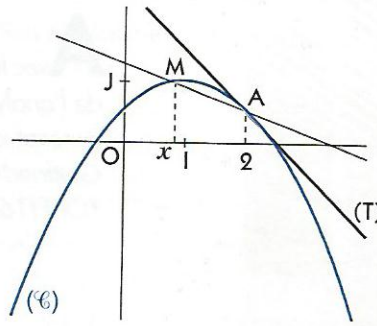
SOMMAIRE

Dans ce chapitre, les fonctions étudiées sont des fonctions numériques à variables réelles et le plan est muni du repère (O, I, J).

1 Dérivation en x_0

1.1. Nombre dérivé d'une fonction en x_0

Introduction



La courbe (𝒞) ci-contre est la représentation graphique de la fonction f définie par : $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x + \frac{1}{2}$.

On désigne par A le point de (𝒞) d'abscisse 2.

Soit M un point de (𝒞), distinct de A, et x son abscisse.

Lorsque x tend vers 2, le point M « tend vers » A sur (𝒞) et la droite (AM) pivote autour de A.

Le coefficient directeur de (AM) est : $\frac{f(x) - f(2)}{x - 2}$.

On a : $\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{2\}$, $\frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = -\frac{x}{2}$.

On en déduit que : $\lim\limits_{x \to 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = -1$.

La droite (AM) admet une position limite (T), de coefficient directeur -1.
On dit que -1 est le nombre dérivé de f en 2 et que la droite (T) est la tangente à (𝒞) en A.

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert K et x_0 un élément de K.

On dit que f est dérivable en x_0 si $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ a une limite finie en x_0.

Cette limite est appelée nombre dérivé de f en x_0 et notée $f'(x_0)$.

On a alors : $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

Remarque

On peut également poser : $h = x - x_0$; lorsque x tend vers x_0, h tend vers 0.

On a alors : $f'(x_0) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$.

Exemples

- Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{x}{2x + 1}$; étudions la dérivabilité de f en -1.

On a : $\forall x \in D_f\backslash\{-1\}$, $\frac{f(x) - f(-1)}{x - (-1)} = \frac{-1}{2x + 1}$.

On en déduit que : $\lim\limits_{x \to -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x - (-1)} = 1$.

Donc, f est dérivable en -1 et $f'(-1) = 1$.

• Soit g la fonction définie par : $g(x) = |x|$; étudions la dérivabilité de g en 0.

On a : $\forall x \in \mathbb{R}^*, \dfrac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \dfrac{|x|}{x}$.

Deux cas sont à envisager : $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \dfrac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \dfrac{x}{x} = 1$; $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} \dfrac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} -\dfrac{x}{x} = -1$.

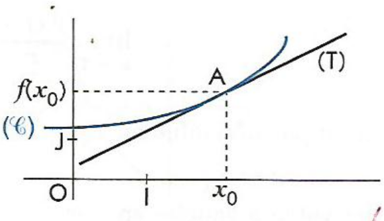
Donc g n'est pas dérivable en 0.

Interprétation graphique

Soit f une fonction, $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative et A un point de $(\mathscr{C})$ d'abscisse x_0.

Si f est dérivable en x_0, alors $(\mathscr{C})$ admet une tangente (T) en A, dont le coefficient directeur est $f'(x_0)$.

Une équation de (T) est donc : $y - f(x_0) = f'(x_0)\,(x - x_0)$.



Cas particulier

Lorsque $f'(x_0) = 0$, la tangente à $(\mathscr{C})$ au point d'abscisse x_0 est parallèle à l'axe des abscisses.

Exemple

Reprenons l'exemple introductif.

On a : $f(x) = -\dfrac{1}{2}x^2 + x + \dfrac{1}{2}$; $f(2) = \dfrac{1}{2}$; $f'(2) = -1$.

Une équation de la tangente (T) à $(\mathscr{C})$ en $A\begin{pmatrix} 2 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$. est donc : $y - \dfrac{1}{2} = -1\,(x - 2)$;

c'est-à-dire : $y = -x + \dfrac{5}{2}$.

Dérivabilité et continuité en x_0

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert K et x_0 un élément de K.

On a : $\forall x \in \text{K}, f(x) = f(x_0) + (x - x_0)\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

Si f est dérivable en x_0, alors : $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$; de plus : $\lim\limits_{x \to x_0} (x - x_0) = 0$.

On en déduit que : $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$. Donc f est continue en x_0.

Propriété

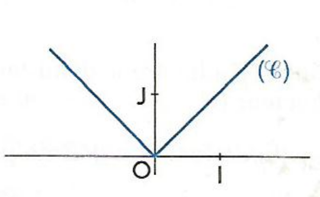
Si une fonction est dérivable en x_0, alors elle est continue en x_0.

Remarque

La réciproque de cette propriété est fausse : une fonction peut être continue en x_0 sans être dérivable en x_0.

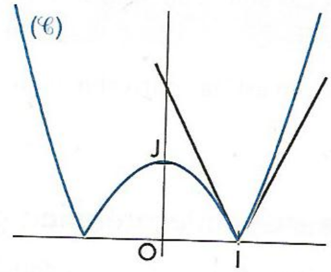
Par exemple, la fonction $x \mapsto |x|$ est continue en 0 mais elle n'est pas dérivable en 0.

Sa courbe représentative $(\mathscr{C})$ n'admet pas de tangente au point O.



1.2. Dérivabilité à gauche, dérivabilité à droite

Introduction



La courbe (𝒞) ci-contre est la représentation graphique de la fonction f définie par : $f(x) = |x^2 - 1|$.
Étudions la dérivabilité de f en 1.

On a : $\dfrac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \dfrac{|x^2 - 1|}{x - 1}$.

Deux cas sont à envisager : $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} \dfrac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} (-x - 1) = -2$;

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ >}} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{\substack{x \to 1 \\ >}} (x + 1) = 2.$$

Donc, f n'est pas dérivable en 1 et (𝒞) n'admet pas de tangente au point d'abscisse 1.

Toutefois, on dit que :

- f est dérivable à gauche en 1 et admet -2 pour nombre dérivé à gauche en 1.
- (𝒞) admet une demi-tangente à gauche au point d'abscisse 1, de coefficient directeur -2.
- f est dérivable à droite en 1 et admet 2 pour nombre dérivé à droite en 1.
- (𝒞) admet une demi-tangente à droite au point d'abscisse 1, de coefficient directeur 2.

Définitions et propriété

Définitions

Soit f une fonction définie en x_0.

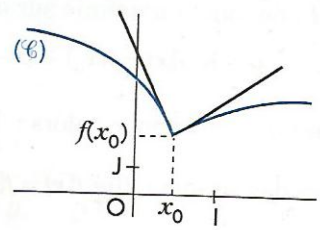
- **On dit que f est dérivable à gauche en x_0 si f est définie sur un intervalle de la forme $]a\ ;\ x_0]$ et $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ a une limite finie à gauche en x_0.**

Cette limite est appelée nombre dérivé de f à gauche en x_0.

- **On dit que f est dérivable à droite en x_0 si f est définie sur un intervalle de la forme $[x_0\ ;\ b[$ et $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ a une limite finie à droite en x_0.**

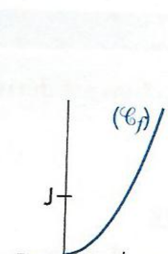
Cette limite est appelée nombre dérivé de f à droite en x_0.

Remarque



Soit f une fonction et (𝒞) sa courbe représentative.
Si f est dérivable à gauche (respectivement à droite) en x_0, alors (𝒞) admet une demi-tangente à gauche (respectivement à droite) au point d'abscisse x_0, dont le coefficient directeur est le nombre dérivé de f à gauche (respectivement à droite) en x_0.

Exemples



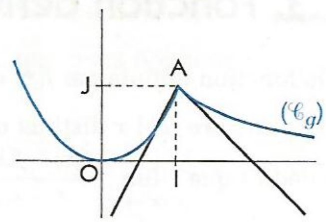
- Soit f la fonction définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = x^2$ et $(\mathscr{C}_f)$ sa courbe représentative.

On a : $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \dfrac{x^2}{x} = 0.$

Donc $(\mathscr{C}_f)$ admet une demi-tangente à droite au point O, de coefficient directeur 0.

- Soit g la fonction définie par $\begin{cases} g(x) = x^2, \text{ si } x \in\ ]-\infty\ ;\ 1] \\ g(x) = \dfrac{1}{x}, \text{ si } x \in\ ]1\ ;\ +\infty] \end{cases}$ et $(\mathscr{C}_g)$ sa courbe représentative.

On a : $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} \dfrac{g(x) - g(1)}{x - 1} = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} (x + 1) = 2.$

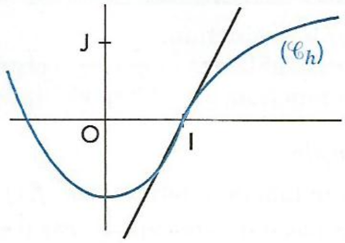


Donc $(\mathscr{C}_g)$ admet une demi-tangente à gauche au point $A\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$, de coefficient directeur 2.

On a : $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} \dfrac{g(x) - g(1)}{x - 1} = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} \dfrac{\frac{1}{x} - 1}{x - 1} = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} \left(-\dfrac{1}{x}\right) = -1.$

Donc $(\mathscr{C}_g)$ admet une demi-tangente à droite au point A, de coefficient directeur – 1.

• Soit h la fonction définie par $\begin{cases} h(x) = x^2 - 1, \text{ si } x \in]-\infty ; 1] \\ h(x) = 2 - \dfrac{2}{x}, \text{ si } x \in]1 ; +\infty[\end{cases}$ et $(\mathscr{C}_h)$ sa courbe représentative.



On a : $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} \dfrac{h(x) - h(1)}{x - 1} = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} (x + 1) = 2.$

Donc $(\mathscr{C}_h)$ admet une demi-tangente à gauche au point I, de coefficient directeur 2.

On a : $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} \dfrac{h(x) - h(1)}{x - 1} = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} \dfrac{2 - \frac{2}{x}}{x - 1} = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} \dfrac{2}{x} = 2.$

Donc $(\mathscr{C}_h)$ admet une demi-tangente à droite au point I, de coefficient directeur 2.

On remarque que : $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} \dfrac{h(x) - h(1)}{x - 1} = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} \dfrac{h(x) - h(1)}{x - 1} = 2.$

Donc : $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{h(x) - h(1)}{x - 1} = 2$; la fonction h est dérivable en 1, $h'(1) = 2$ et $(\mathscr{C}_h)$ admet au point I une tangente de coefficient directeur 2.

Propriété

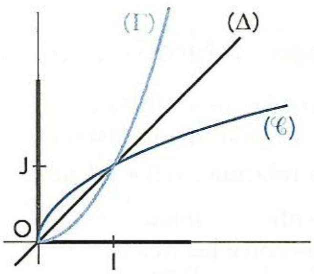
Une fonction f est dérivable en x_0 si et seulement si elle est dérivable à gauche et à droite en x_0 et les nombres dérivés à gauche et à droite sont égaux.

Demi-tangente parallèle à l'axe des ordonnées

Le repère (O, I, J) est orthonormé.

Soit f la fonction définie par $f(x) = \sqrt{x}$ et $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative.

On a : $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \dfrac{\sqrt{x}}{x} = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \dfrac{1}{\sqrt{x}} = +\infty.$



Donc f n'est pas dérivable à droite en 0.

Interprétation graphique

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $g(x) = x^2$ et (Γ) sa courbe représentative. Les courbes $(\mathscr{C})$ et (Γ) sont symétriques par rapport à la première bissectrice (Δ).

De plus, (Γ) admet [OI] pour demi-tangente au point O ;
donc, par symétrie, $(\mathscr{C})$ admet [OJ) pour demi-tangente au point O.

Plus généralement, soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $]a ; x_0]$ ou $[x_0 ; b[$.

Si $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ admet une limite infinie à gauche ou à droite en x_0, alors la courbe représentative de f admet une demi-tangente parallèle à l'axe des ordonnées au point d'abscisse x_0.

1.3. Fonction dérivée

Soit f la fonction définie par $f(x) = x^2 + 1$ et x_0 un nombre réel.

Pour tout nombre réel x distinct de x_0, on a : $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = x + x_0$.

On en déduit que : $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 2x_0$.

La fonction f est dérivable en tout élément x_0 de $\mathbb{R}$ et $f'(x_0) = 2x_0$.
La fonction f', définie par $f'(x) = 2x$, est appelée fonction dérivée de la fonction f.

Définitions

Soit f une fonction.
- **L'ensemble des nombres réels en lesquels f est dérivable est appelé ensemble de dérivabilité de f.**
- **La fonction $x \mapsto f'(x)$ est appelée dérivée (ou fonction dérivée) de f.**

Exemple

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \sqrt{2x - 1}$. On a : $D_f = [\frac{1}{2} ; +\infty[$.
f n'est pas dérivable en $\frac{1}{2}$, car il n'existe pas d'intervalle ouvert K tel que f est définie sur K et $\frac{1}{2} \in$ K.
Soit x_0 un nombre réel strictement supérieur à $\frac{1}{2}$.

On a : $\forall x \in]\frac{1}{2} ; +\infty[\setminus \{x_0\}$,

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{\sqrt{2x - 1} - \sqrt{2x_0 - 1}}{x - x_0} = \frac{(2x - 1) - (2x_0 - 1)}{(x - x_0)(\sqrt{2x - 1} + \sqrt{2x_0 - 1})} = \frac{2}{\sqrt{2x - 1} + \sqrt{2x_0 - 1}}.$$

Donc : $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \dfrac{1}{\sqrt{2x_0 - 1}}$.

La fonction f est dérivable en tout élément x_0 de $]\frac{1}{2} ; +\infty[$ et $f'(x_0) = \dfrac{1}{\sqrt{2x_0 - 1}}$.

f est donc dérivable sur $]\frac{1}{2} ; +\infty[$ et sa dérivée est la fonction f' définie par : $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2x - 1}}$.

1.4. Travaux dirigés

Interprétation physique du nombre dérivé

Une noix de coco, située à 25 m du sol, se détache de son cocotier et tombe.
On désigne par $x(t)$ la distance en mètres parcourue par la noix de coco au bout de t secondes de chute.
On a la relation : $x(t) = \frac{1}{2} gt^2$, où $g \approx 9{,}81$.

1°) Calculer la vitesse moyenne de la noix de coco entre les instants 0,5 et 1, puis entre les instants 1 et 1,5, puis entre les instants 1 et t ($t \neq 1$).

2°) On appelle vitesse instantanée de la noix de coco à l'instant t_0 la limite de sa vitesse moyenne entre les instants t_0 et t lorsque t tend vers t_0.
***a)* Calculer la vitesse instantanée de la noix de coco à l'instant 1.**
***b)* Calculer en fonction de t_0 la vitesse instantanée de la noix de coco à l'instant t_0.**
***c)* Démontrer que la vitesse instantanée de la noix de coco à l'instant t_0 est égale au nombre dérivé en t_0 de la fonction $t \mapsto x(t)$.**

3°) Quelle est la vitesse instantanée de la noix de coco à l'instant où elle touche le sol ?

Solution

1°) La vitesse moyenne de la noix de coco entre deux instants t_1 et t_2, que nous noterons $v_{(t_1\,;\,t_2)}$, est le quotient de la distance parcourue par le temps écoulé.

Donc : $v_{(t_1\,;\,t_2)} = \dfrac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1} = \dfrac{1}{2}\, g\,(t_2 + t_1)$.

On en déduit que : $v_{(0,5\,;\,1)} = \dfrac{1}{2}\, g \times 1{,}5$; c'est-à-dire : $v_{(0,5\,;\,1)} \approx 7{,}36$ m/s ;

de même : $v_{(1\,;\,1,5)} = \dfrac{1}{2}\, g \times 2{,}5$; c'est-à-dire : $v_{(1\,;\,1,5)} \approx 12{,}26$ m/s.

On a : $v_{(1\,;\,t)} = \dfrac{1}{2}\, g\,(1 + t)$.

2°) On désigne par $v(t_0)$ la vitesse instantanée de la noix de coco à l'instant t_0.

a) On a : $v(1) = \lim\limits_{t \to 1} \dfrac{1}{2}\, g\,(1 + t) = g$; donc : $v(1) \approx 9{,}81$ m/s.

b) On a : $v(t_0) = \lim\limits_{t \to t_0} \dfrac{1}{2}\, g\,(t_0 + 1) = g\, t_0$.

c) Par définition, on a : $v(t_0) = \lim\limits_{t \to t_0} v_{(t_0\,;\,t)} = \lim\limits_{t \to t_0} \dfrac{x(t_0) - x(t)}{t_0 - t}$.

Donc la vitesse instantanée de la noix de coco à l'instant t_0 est égale au nombre dérivé en t_0 de la fonction $t \mapsto x(t)$.

3°) La noix de coco touche le sol à l'instant t tel que : $x(t) = 25$.

On a : $\dfrac{1}{2}\, gt^2 = 25 \Rightarrow t = \sqrt{\dfrac{50}{g}}$.

La vitesse instantanée de la noix de coco à l'arrivée au sol est v telle que :

$v = g\sqrt{\dfrac{50}{g}} = \sqrt{50\,g}$; donc : $v \approx 22{,}15$ m/s.

Exercices

1.a Dans chacun des cas suivants, calculer le nombre dérivé de la fonction f en x_0.

a) $f : x \mapsto x^2 - x,\ x_0 = 1$;

b) $f : x \mapsto \dfrac{x+1}{x-1},\ x_0 = 2$;

c) $f : x \mapsto 2\sqrt{x} - 1,\ x_0 = 3$.

1.b Dans chacun des cas suivants, donner une équation cartésienne de la tangente à la courbe représentative de f, en son point d'abscisse x_0.

a) $f : x \mapsto x^2 - x,\ x_0 = 1$;

b) $f : x \mapsto \dfrac{x+1}{x-1},\ x_0 = 2$;

c) $f : x \mapsto 2\sqrt{x} - 1,\ x_0 = 3$.

1.c On considère la fonction f définie par :

$$\begin{cases} f(x) = 2x + 1, \text{ si } x < 0 \\ f(x) = x^2 + 1, \text{ si } x \geq 0 \end{cases}.$$

1. Démontrer que la courbe représentative de la fonction f admet deux demi-tangentes au point d'abscisse 0.

2. f est-elle dérivable en 0 ?

1.d On considère la fonction f définie par :
$f(x) = |x^2 - 3x + 2|$.

1. Tracer la courbe représentative $(\mathscr{C})$ de f.

2. Étudier la dérivabilité de f en 1 et en 2.

3. Tracer les demi-tangentes à $(\mathscr{C})$ aux points d'abscisses 1 et 2.

1.e On considère la fonction f définie par :
$f(x) = \sqrt{x^2 - 3x + 2}$.

Démontrer que la courbe représentative de la fonction f admet, aux points d'abscisses 1 et 2, deux demi-tangentes parallèles à la droite (OJ).

2 Calculs de dérivées

2.1. Dérivées des fonctions élémentaires

Fonction $f : x \mapsto k$ ($k \in \mathbb{R}$)

Soit x_0 un élément de $\mathbb{R}$.

On a : $\forall\, x \in \mathbb{R} \setminus \{x_0\}$, $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 0$.

Donc : $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 0$.

Propriété

La fonction $f : x \mapsto k$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est la fonction $f' : x \mapsto 0$.

Fonction $f : x \mapsto x$

Soit x_0 un élément de $\mathbb{R}$.

On a : $\forall\, x \in \mathbb{R} \setminus \{x_0\}$, $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 1$.

Donc : $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 1$.

Propriété

La fonction $f : x \mapsto x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est la fonction $f' : x \mapsto 1$.

Fonction $f : x \mapsto x^2$

Soit x_0 un élément de $\mathbb{R}$.

On a : $\forall\, x \in \mathbb{R} \setminus \{x_0\}$, $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \dfrac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} = x + x_0$.

Donc : $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 2x_0$.

Propriété

La fonction $f : x \mapsto x^2$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est la fonction $f' : x \mapsto 2x$.

Fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}$

Soit x_0 un élément de $\mathbb{R}^*$.

On a : $\forall\, x \in \mathbb{R}^* \setminus \{x_0\}$, $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \dfrac{\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}}{x - x_0} = \dfrac{-1}{xx_0}$.

Donc : $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \dfrac{-1}{{x_0}^2}$.

Propriété

La fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et sa dérivée est la fonction $f' : x \mapsto -\dfrac{1}{x^2}$.

Fonction $f : x \mapsto \sqrt{x}$

f n'est pas dérivable en 0, car il n'existe pas d'intervalle ouvert K tel que f est définie sur K et $0 \in K$.
Soit x_0 un élément de $\mathbb{R}_+^*$.

On a : $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{x_0\}$, $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \dfrac{\sqrt{x} - \sqrt{x_0}}{x - x_0} = \dfrac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}}$.

Donc : $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \dfrac{1}{2\sqrt{x_0}}$.

Propriété

La fonction $f : x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et sa dérivée est la fonction $f' : x \mapsto \dfrac{1}{2\sqrt{x_0}}$.

Fonction sinus et cosinus

Propriétés 1

- **La fonction sinus est dérivable en 0 et a pour nombre dérivé 1.**

On a : $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$.

- **La fonction cosinus est dérivable en 0 et a pour nombre dérivé 0.**

On a : $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos x - 1}{x} = 0$.

Ces résultats ont été établis dans le chapitre 12 § 2.4.

Propriétés 2

- **La fonction $x \mapsto \sin x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est la fonction $x \mapsto \cos x$.**
- **La fonction $x \mapsto \cos x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est la fonction $x \mapsto -\sin x$.**

Démonstration guidée

Soit x_0 un élément de $\mathbb{R}$. Pour tout nombre réel x, on pose : $h = x - x_0$.

- Démontrer que : $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{x_0\}$, $\dfrac{\sin x - \sin x_0}{x - x_0} = \sin x_0 \dfrac{\cos h - 1}{h} + \cos x_0 \dfrac{\sin h}{h}$.
- En déduire que : $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\sin x - \sin x_0}{x - x_0} = \cos x_0$.
- Démontrer de manière analogue que : $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\cos x - \cos x_0}{x - x_0} = -\sin x_0$.

2.2. Dérivées et opérations sur les fonctions

Soit u, v deux fonctions dérivables sur un intervalle ouvert K et u', v' leurs dérivées respectives.

Dérivée de la somme de deux fonctions dérivables

Soit x_0 un élément de K.

On a : $\forall x \in K \setminus \{x_0\}$, $\dfrac{(u+v)(x) - (u+v)(x_0)}{x - x_0} = \dfrac{u(x) - u(x_0)}{x - x_0} + \dfrac{v(x) - v(x_0)}{x - x_0}$.

Or : $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{u(x) - u(x_0)}{x - x_0} = u'(x_0)$ et $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{v(x) - v(x_0)}{x - x_0} = v'(x_0)$.

Donc : $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{(u+v)(x) - (u+v)(x_0)}{x - x_0} = u'(x_0) + v'(x_0) = (u' + v')(x_0)$.

Propriété

Soit u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle ouvert K.
La fonction $u + v$ est dérivable sur K et on a : $(u + v)' = u' + v'$.

Exemple

Soit f la fonction définie par : $f(x) = x^2 + \frac{1}{x}$.

On pose : $u(x) = x^2$ et $v(x) = \frac{1}{x}$; on a : $u'(x) = 2x$ et $v'(x) = -\frac{1}{x^2}$.

f est dérivable sur chacun des intervalles $]-\infty ; 0[$ et $]0 ; +\infty[$, donc sur $\mathbb{R}^*$, et sa dérivée est la fonction f' définie par : $f'(x) = 2x - \frac{1}{x^2}$.

Dérivée du produit de deux fonctions dérivables

Soit x_0 un élément de K.

On a : $\forall x \in K \setminus \{x_0\}$,
$$\frac{(u\,v)(x) - (u\,v)(x_0)}{x - x_0} = \frac{u(x)\,v(x) - u(x_0)\,v(x_0)}{x - x_0}$$
$$= \frac{u(x)\,v(x) - u(x_0)\,v(x) + u(x_0)\,v(x) - u(x_0)\,v(x_0)}{x - x_0}$$
$$= v(x)\,\frac{u(x) - u(x_0)}{x - x_0} + u(x_0)\,\frac{v(x) - v(x_0)}{x - x_0}$$

Or : $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{u(x) - u(x_0)}{x - x_0} = u'(x_0)$ et $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{v(x) - v(x_0)}{x - x_0} = v'(x_0)$.

De plus, la fonction v, dérivable en x_0, est continue en x_0 ; on en déduit que : $\lim\limits_{x \to x_0} v(x) = v(x_0)$.

Donc : $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{(u\,v)(x) - (u\,v)(x_0)}{x - x_0} = v(x_0)\,u'(x_0) + u(x_0)\,v'(x_0) = (u'v + uv')(x_0)$.

Propriété

Soit u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle ouvert K.
La fonction $u\,v$ est dérivable sur K et on a : $(u\,v)' = u'\,v + u\,v'$.

Cas particuliers

• Si v est la fonction définie par $v(x) = k$ ($k \in \mathbb{R}$), on a : $v'(x) = 0$.
On en déduit que : $(k\,u)' = k\,u'$.
• Si $u = v$, on a : $u' = v'$.
On en déduit que : $(u^2)' = 2u'u$.

Exemples

• Soit f la fonction définie par : $f(x) = x^2 \cos x$.
On pose : $u(x) = x^2$ et $v(x) = \cos x$; on a : $u'(x) = 2x$ et $v'(x) = -\sin x$.
f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est la fonction f' définie par : $f'(x) = 2x \cos x - x^2 \sin x$.

• Soit g la fonction définie par : $g(x) = 5x^2$.
On pose : $u(x) = x^2$; on a : $u'(x) = 2x$.
g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est la fonction g' définie par : $g'(x) = 10x$.

• Soit h la fonction définie par : $h(x) = \sin^2 x$.
On pose : $u(x) = \sin x$; on a : $u'(x) = \cos x$.
h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est la fonction h' définie par : $h'(x) = 2 \sin x \cos x$.

Dérivée de la puissance d'une fonction dérivable

On sait que : $(u^2)' = 2u'u$.

On en déduit que :

$$\begin{aligned}(u^3)' &= (u^2u)'\\ &= (u^2)'u + u^2u'\\ &= (2u'u)u + u^2u'\\ &= 3u'u^2.\end{aligned}$$

Puis :

$$\begin{aligned}(u^4)' &= (u^3u)'\\ &= (u^3)'u + u^3u'\\ &= (3u'u^2)u + u^3u'\\ &= 4u'u^3.\end{aligned}$$

Puis :

$$\begin{aligned}(u^5)' &= (u^4u)'\\ &= (u^4)'u + u^4u'\\ &= (4u'u^3)u + u^4u'\\ &= 5u'u^4.\end{aligned}$$

On conjecture que, pour tout nombre entier n supérieur ou égal à 2, on a : $(u^n)' = n\,u'u^{n-1}$.

Or, si $k \geq 2$ et $(u^k)' = k\,u'u^{k-1}$, alors on a :

$$\begin{aligned}(u^{k+1})' &= (u^k\,u)'\\ &= (u^k)'u + u^k\,u'\\ &= (k\,u'\,u^{k-1})u + u^k\,u'\\ &= (k+1)u'\,u^k.\end{aligned}$$

Donc la conjecture est vérifiée de proche en proche.

L

La méthode de démonstration précédente est appelée *raisonnement par récurrence*.
Pour démontrer qu'une proposition $P(n)$, qui concerne un nombre entier naturel n, est vraie pour tout n supérieur ou égal à n_0, on procède en deux étapes :

- on démontre que : $P(n_0)$ est vraie ;
- on démontre que : pour tout nombre entier k supérieur ou égal à n_0, si $P(k)$ est vraie alors $P(k+1)$ est vraie.

Exemple

Dans la démonstration précédente, $P(n)$ est la proposition : « $(u^n)' = n\,u'\,u^{n-1}$ ».

- On sait que : $(u^2)' = 2u'u$; c'est-à-dire : $P(2)$ est vraie.
- k étant un nombre entier supérieur ou égal à 2, on a démontré que :
  si $(u^k)' = k\,u'\,u^{k-1}$, alors $(u^{k+1})' = (k+1)u'\,u^k$;
  c'est-à-dire : si $P(k)$ est vraie, alors $P(k+1)$ est vraie.

Propriété

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle ouvert K et n un nombre entier supérieur ou égal à 2.
La fonction u^n est dérivable sur K et on a : $(u^n)' = n\,u'\,u^{n-1}$.

Exemples

- Soit n un nombre entier supérieur ou égal à 2 et f la fonction définie par : $f(x) = x^n$.

On pose : $u(x) = x$; on a : $u'(x) = 1$.

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est la fonction f' définie par : $f'(x) = n\,x^{n-1}$.

- Soit g la fonction définie par : $g(x) = \cos^3 x$.

On pose : $u(x) = \cos x$; on a : $u'(x) = -\sin x$.

g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est la fonction g' définie par : $g'(x) = -3\sin x\cos^2 x$.

Dérivée de l'inverse d'une fonction dérivable

On suppose que, pour tout x élément de K, $v(x)$ est non nul. Soit x_0 un élément de K.

On a : $\forall x \in K\setminus\{x_0\}$, $\dfrac{\frac{1}{v}(x) - \frac{1}{v}(x_0)}{x - x_0} = -\dfrac{1}{v(x)\,v(x_0)}\;\dfrac{v(x) - v(x_0)}{x - x_0}$.

Or, v est continue et dérivable en x_0. On en déduit que : $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\frac{1}{v}(x) - \frac{1}{v}(x_0)}{x - x_0} = -\dfrac{v'(x_0)}{v^2(x_0)}$.

Propriété

Soit v une fonction dérivable sur un intervalle ouvert K tel que, pour tout x élément de K, $v(x) \neq 0$.
La fonction $\frac{1}{v}$ est dérivable sur K et on a : $\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}$.

Exemples

• Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$.

On pose : $v(x) = x^2 + 1$; on a : $v'(x) = 2x$.

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est la fonction f' définie par : $f'(x) = -\frac{2x}{(x^2+1)^2}$.

• Soit g la fonction définie par : $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$.

On pose : $v(x) = \sqrt{x}$; on a : $v'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

g est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et sa dérivée est la fonction g' définie par : $g'(x) = -\frac{1}{2x\sqrt{x}}$.

• Soit n un nombre entier supérieur ou égal à 2 et h la fonction définie par : $h(x) = \frac{1}{x^n}$.

Sur chacun des intervalles $]-\infty ; 0[$ et $]0 ; +\infty[$, la fonction $x \mapsto x^n$ est dérivable et non nulle, donc la fonction h est dérivable sur son ensemble de définition.

On pose : $v(x) = x^n$; on a : $v'(x) = n\,x^{n-1}$.

h est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et sa dérivée est la fonction h' définie par : $h'(x) = -\frac{n}{x^{n+1}}$.

Dérivée du quotient de deux fonctions dérivables

On suppose que, pour tout x élément de K, $v(x)$ est non nul.

On a : $\frac{u}{v} = u \times \frac{1}{v}$; u et v sont dérivables sur K, donc $\frac{u}{v}$ est dérivable sur K.

On déduit des propriétés précédentes que : $\left(\frac{u}{v}\right)' = u' \times \frac{1}{v} + u \times \left(\frac{1}{v}\right)' = \frac{u'}{v} - \frac{uv'}{v^2} = \frac{u'v - uv'}{v^2}$.

Propriété

Soit u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle ouvert K tel que, pour tout x élément de K, $v(x) \neq 0$.
La fonction $\frac{u}{v}$ est dérivable sur K et on a : $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$.

Exemples

• Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{1-x}{2x^2+1}$.

On pose : $u(x) = 1 - x$ et $v(x) = 2x^2 + 1$; on a : $u'(x) = -1$ et $v'(x) = 4x$.

On en déduit que : $f'(x) = \frac{-(2x^2+1) - 4x(1-x)}{(2x^2+1)^2} = \frac{2x^2 - 4x - 1}{(2x^2+1)^2}$.

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est la fonction f' définie par : $f'(x) = \frac{2x^2-4x-1}{(2x^2+1)^2}$.

• Soit la fonction tangente définie par : $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$.

Cette fonction est définie sur tout intervalle de la forme $]-\frac{\pi}{2} + k\pi ; \frac{\pi}{2} + k\pi[$ ($k \in \mathbb{Z}$).

Sur chacun de ces intervalles, les fonctions sinus et cosinus sont dérivables et $\cos x$ est non nul, donc la fonction tangente est dérivable. Calculons sa dérivée.

On pose : $u(x) = \sin x$ et $v(x) = \cos x$; on a : $u'(x) = \cos x$ et $v'(x) = -\sin x$.

On en déduit que : $(\tan x)' = \frac{\cos^2 x - (-\sin^2 x)}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$.

La fonction tangente est dérivable sur son ensemble de définition et sa dérivée est la fonction $x \mapsto 1 + \tan^2 x$.

Dérivée de la racine carrée d'une fonction dérivable

On suppose que, pour tout x élément de K, $u(x)$ est strictement positif. Soit x_0 un élément de K.

On a : $\forall\, x \in K \setminus \{x_0\}$, $\dfrac{\sqrt{u(x)} - \sqrt{u(x_0)}}{x - x_0} = \dfrac{\sqrt{u(x)} - \sqrt{u(x_0)}}{x - x_0}$

$$= \frac{u(x) - u(x_0)}{x - x_0} \; \frac{1}{\sqrt{u(x)} + \sqrt{u(x_0)}}.$$

Donc : $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\sqrt{u(x)} - \sqrt{u(x_0)}}{x - x_0} = \dfrac{u'(x_0)}{2\sqrt{u(x_0)}} = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}(x_0)$.

Propriété

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle ouvert K tel que, pour tout x élément de K, $u(x) > 0$. La fonction $\sqrt{u}$ est dérivable sur K et on a : $\left(\sqrt{u}\right)' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$.

Exemples

- Soit f la fonction définie par : $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$.

On pose : $u(x) = x^2 + 1$; on a : $u'(x) = 2x$.

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est la fonction f' définie par : $f'(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$.

- Soit g la fonction définie par : $g(x) = \sqrt{1 - x^2}$.

On pose : $u(x) = 1 - x^2$; on a : $u'(x) = -2x$.

Pour tout x élément de l'intervalle $]-1\,;1[$, on a : $u(x) > 0$.

g est dérivable sur $]-1\,;1[$ et sa dérivée est la fonction g' définie par : $g'(x) = -\dfrac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$.

Dérivée de la fonction $x \mapsto u(ax + b)$

Soit u une fonction, a, b deux nombres réels tels que $a \neq 0$ et f la fonction définie par : $f(x) = u(ax + b)$.

On désigne par K' l'intervalle ouvert, image réciproque de K par la fonction $x \mapsto ax + b$.

Soit x_0 un élément de K'.

On a : $\forall\, x \in K' \setminus \{x_0\}$, $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \dfrac{u(ax + b) - u(ax_0 + b)}{x - x_0}$

$$= \frac{u(ax + b) - u(ax_0 + b)}{(ax + b) - (ax_0 + b)} \; \frac{(ax + b) - (ax_0 + b)}{x - x_0}$$

$$= a\, \frac{u(ax + b) - u(ax_0 + b)}{(ax + b) - (ax_0 + b)}.$$

On pose : $y = ax + b$ et $y_0 = ax_0 + b$.

On a : $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{u(ax + b) - u(ax_0 + b)}{(ax + b) - (ax_0 + b)} = \lim\limits_{y \to y_0} \dfrac{u(y) - u(y_0)}{y - y_0} = u'(y_0) = u'(ax_0 + b)$.

On en déduit que : $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = a\, u'(ax_0 + b)$.

Propriété

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle ouvert K, $x \mapsto ax + b$ ($a \neq 0$) une fonction affine et K' l'image réciproque de K par cette fonction affine.

La fonction $x \mapsto u(ax + b)$ est dérivable sur K' et sa dérivée est la fonction $x \mapsto au'(ax + b)$.

Exemples

• Soit f la fonction définie par : $f(x) = \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$.

On pose : $u(x) = \cos x$, $a = 2$ et $b = -\frac{\pi}{3}$; on a : $f(x) = u(ax + b)$ et $u'(x) = -\sin x$.

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est la fonction f' définie par : $f'(x) = -2\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$.

• Soit g la fonction définie par : $g(x) = \sqrt{4 - 3x}$.

g est dérivable sur $]-\infty\,;\,\frac{4}{3}[$ et sa dérivée est la fonction g' définie par : $g'(x) = \dfrac{-3}{2\sqrt{4 - 3x}}$.

2.3. Tableaux récapitulatifs

• Dérivées des fonctions élémentaires

f	f'	Ensemble de dérivabilité
$x \mapsto k$ $(k \in \mathbb{R})$	$x \mapsto 0$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto x$	$x \mapsto 1$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \frac{1}{x}$	$x \mapsto -\frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$
$x \mapsto x^n$ $(n \in \mathbb{N}^*\backslash\{1\})$	$x \mapsto n\,x^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \sqrt{x}$	$x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\mathbb{R}_+^*$
$x \mapsto \sin x$	$x \mapsto \cos x$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \cos x$	$x \mapsto -\sin x$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \tan x$	$x \mapsto 1 + \tan^2 x$	$\mathbb{R}\backslash\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

• Dérivées et opérations sur les fonctions

f	f'
$u + v$	$u' + v'$
$k\,u$ $(k \in \mathbb{R})$	$k\,u'$
$u\,v$	$u'\,v + u\,v'$
$\frac{1}{v}$	$-\frac{v'}{v^2}$
$\frac{u}{v}$	$\frac{u'v - uv'}{v^2}$
u^n $(n \in \mathbb{N}^*\backslash\{1\})$	$n\,u'\,u^{n-1}$
$\sqrt{u}$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$
$x \mapsto u(ax + b)$	$x \mapsto au'(ax + b)$

Remarques

• *On déduit des règles de dérivation établies au § 2.2. que les ensembles de dérivabilité des fonctions polynômes et des fonctions rationnelles sont leurs ensembles de définition.*

• *Si l'ensemble de dérivabilité des fonctions u et v est leur ensemble de définition, il en est de même des fonctions figurant dans le tableau de droite, à l'exception de la fonction $\sqrt{u}$ qui est dérivable en tout x tel que : $u(x) \neq 0$.*

Exercices

2.a 1. Déterminer la dérivée de la fonction f définie par : $f(x) = \cos^2 x$.

2. Déterminer la dérivée de la fonction g définie par : $g(x) = \sin^2 x + \cos^2 x$.

2.b Dans chacun des cas suivants, préciser l'ensemble de dérivabilité de la fonction f et calculer sa dérivée.

a) $f : x \mapsto x + \sin x$; *b)* $f : x \mapsto x\cos x$;

c) $f : x \mapsto \frac{1}{\sin x}$; *d)* $f : x \mapsto \tan^2 x$.

2.c Dans chacun des cas suivants, préciser l'ensemble de dérivabilité de la fonction f et calculer sa dérivée.

a) $f : x \mapsto 4x^3 - 5x^2 - 2$; *b)* $f : x \mapsto (x^3 + 3x)(x^4 - 3)$;

c) $f : x \mapsto \frac{2 - 3x}{x^2 - 1}$; *d)* $f : x \mapsto x\sin^3 x$.

2.d Dans chacun des cas suivants, préciser l'ensemble de définition, l'ensemble de dérivabilité de la fonction f et calculer sa dérivée.

a) $f : x \mapsto (x^3 + 2)\sqrt{2 - x}$; *b)* $f : x \mapsto \sqrt{x(3 - x)}$;

c) $f : x \mapsto \tan\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$; *d)* $f : x \mapsto \sin 2x$.

3 Applications de la dérivation

3.1. Sens de variation d'une fonction

Introduction

Soit f une fonction croissante et dérivable sur un intervalle ouvert K, x_0 un élément de K.

- Démontrer que : $\forall\, x \in K \setminus \{x_0\}$, $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$.
- En déduire que : $f'(x_0) \geq 0$.

Si une fonction est croissante et dérivable sur un intervalle ouvert, alors sa dérivée y est positive.
On admet que la réciproque est vraie et, plus généralement, le théorème suivant.

Théorème

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert K.
- **f est croissante sur K si et seulement si f' est positive sur K.**
- **f est décroissante sur K si et seulement si f' est négative sur K.**
- **f est constante sur K si et seulement si f' est nulle sur K.**

Exemples

- Soit f la fonction définie par : $f(x) = x^3 - 3x - 1$.

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est la fonction f' définie par : $f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1)$.

On a : $\forall\, x \in]-\infty\,;-1[,\quad f'(x) > 0$;
$\forall\, x \in]-1\,;1[,\quad f'(x) < 0$;
$\forall\, x \in]1\,;+\infty[,\quad f'(x) > 0$.

Donc : f est croissante sur $]-\infty\,;-1[$;
f est décroissante sur $]-1\,;1[$;
f est croissante sur $]1\,;+\infty[$.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		↗	1	↘	-3	↗	

On en déduit le tableau de variation de f, que l'on complète en calculant : $f(-1) = 1$ et $f(1) = -3$.

- Soit g la fonction définie par : $g(x) = \dfrac{1}{x}$.

g est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et sa dérivée est la fonction g' définie par : $g'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$.

On a : $\forall\, x \in]-\infty\,;0[\cup]0\,;+\infty[,\ g'(x) < 0$.

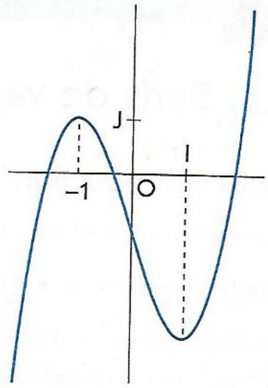
On en déduit que g est décroissante sur chacun des intervalles $]-\infty\,;0[$ et $]0\,;+\infty[$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	‖	$-$	
$g(x)$		↘	‖	↘	

Remarque

Si f' a un signe constant sur K et ne s'annule qu'en un nombre fini d'éléments de K, alors f est strictement monotone sur K.

Extremum relatif d'une fonction



La courbe ci-contre est la représentation graphique de la fonction f définie par : $f(x) = x^3 - 3x - 1$.

• On a : $\forall\, x \in\,]-\infty\,;-1[,\ f'(x) > 0$;
$f'(-1) = 0$;
$\forall\, x \in\,]-1\,;1[,\quad f'(x) < 0$.

On dit que f' s'annule et change de signe en -1.
f est croissante sur $]-\infty\,;-1[$; donc, $\forall\, x \in\,]-\infty\,;-1[,\ f(x) \leq f(-1)$;
f est décroissante sur $]-1\,;1[$; donc, $\forall\, x \in\,]-1\,;1[,\ f(x) \leq f(-1)$.
On en déduit que f admet $f(-1)$ pour maximum sur $]-\infty\,;1[$.
On dit que f admet un maximum relatif en -1.

• De même, f' s'annule et change de signe en 1 ; f admet un minimum relatif en 1.

Plus généralement, on a la propriété suivante.

Propriété

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle $]a\,;b[$ et x_0 un élément de $]a\,;b[$.
Si f' s'annule et change de signe en x_0, alors f admet un extremum relatif en x_0.

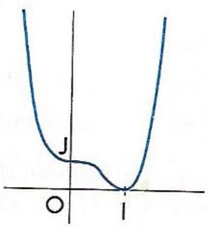
x	a		x_0		b
$f'(x)$		+	0	−	
$f(x)$		↗	M	↘	

f admet un maximum relatif M en x_0

x	a		x_0		b
$f'(x)$		−	0	+	
$f(x)$		↘	m	↗	

f admet un minimum relatif m en x_0

Exemple



La courbe ci-contre est la représentation graphique de la fonction f définie par : $f(x) = 3x^4 - 4x^3 + 1$.
On a : $f'(x) = 12x^2\,(x - 1)$.
On obtient le tableau de variation suivant.

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	0	+	
$f(x)$		↘	1	↘	0	↗	

La fonction f' s'annule et change de signe en 1, donc la fonction f admet un extremum relatif en 1.
On a : $\forall\, x \in\,]0\,;1[,\ f'(x) < 0$; $\forall\, x \in\,]1\,;+\infty[,\ f'(x) > 0$; donc cet extremum est un minimum.
La fonction f' s'annule mais ne change pas de signe en 0 ; la fonction f n'admet pas d'extremum relatif en 0.

3.2. Approximation d'une fonction par une fonction affine

Introduction

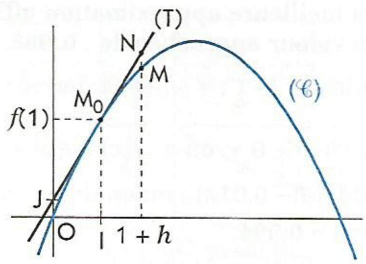
Soit f la fonction définie par $f(x) = -x^2 + 6x$, $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative, M_0 le point de $(\mathscr{C})$ d'abscisse 1 et (T) la tangente à $(\mathscr{C})$ en M_0.

Pour tout nombre réel h, on désigne par M et N les points d'abscisse $1 + h$, appartenant respectivement à $(\mathscr{C})$ et à (T).

• y_M et y_N désignant les ordonnées respectives des points M et N, vérifier que : $y_M = f(1+h)$ et $y_N = f(1) + h f'(1)$.

• Compléter le tableau suivant.

h	1	0,5	0,1	0,01	0,001
y_M					
y_N					



On constate que $f(1) + h f'(1)$ est une bonne approximation de $f(1+h)$, lorsque h est « proche de 0 ». Donc la fonction affine $g : x \mapsto f(1) + (x-1) f'(1)$ permet d'obtenir une bonne approximation de $f(x)$ lorsque x est « proche de 1 ».

Propriété

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert K et x_0 un élément de K.

Si f est dérivable en x_0, alors, pour tout nombre réel h tel que $x_0 + h$ appartient à K, on a :
$f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0)h + h\,\varphi(h)$, où φ est une fonction telle que $\lim\limits_{h \to 0} \varphi(h) = 0$.

Démonstration

On pose : $\varphi(h) = \dfrac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} - f'(x_0)$.

On en déduit que : $f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0)h + h\,\varphi(h)$ et $\lim\limits_{h \to 0} \varphi(h) = f'(x_0) - f'(x_0) = 0$.

Interprétation numérique

Cette propriété permet de déterminer une bonne approximation de $f(x_0+h)$, lorsque $f'(x_0)$ est non nul.
En effet, pour tout nombre réel h tel que $x_0 + h$ appartient à K, on a :
$f(x_0+h) = f(x_0) + h[f'(x_0) + \varphi(h)]$.
Lorsque h est « suffisamment proche de 0 », $\varphi(h)$ est « négligeable devant $f'(x_0)$ ».
On a alors : $f(x_0+h) \approx f(x_0) + f'(x_0)h$;
c'est-à-dire : $f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$, pour x « proche de x_0 ».

Nous admettons que la fonction $x \mapsto f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ est la meilleure approximation de la fonction f par une fonction affine, lorsque x est « proche de x_0 ».

Application au calcul numérique

1. Calculer une valeur approchée de $\dfrac{1}{(2{,}003)^2}$.

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$.
f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et sa dérivée est la fonction f' définie par : $f'(x) = -\dfrac{2}{x^3}$.
Pour des valeurs de h « proches de 0 », on a : $f(2+h) \approx f(2) + f'(2)h$.
En posant $h = 0{,}003$, on obtient : $f(2{,}003) \approx 0{,}25 + (-0{,}25)(0{,}003)$.

Donc : $\dfrac{1}{(2{,}003)^2} \approx 0{,}249\,25$.

(Une calculatrice donne : $\dfrac{1}{(2{,}003)^2} = 0{,}249\,251\,68....$)

2. Donner la meilleure approximation affine de la fonction $f : x \mapsto \sqrt{1+x}$ pour x « proche de 0 » et en déduire une valeur approchée de $\sqrt{0,988}$.

f est dérivable sur $]-1\,;+\infty[$ et sa dérivée est la fonction f' définie par : $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{1+x}}$.

Pour x « proche de 0 », on a : $f(x) \approx f(0) + f'(0)x$; c'est-à-dire : $\sqrt{1+x} \approx 1 + \dfrac{1}{2}x$.

On a : $\sqrt{0,988} = f(-0,012)$; on en déduit que : $\sqrt{0,988} \approx 1 + \dfrac{1}{2}(-0,012)$.

Donc : $\sqrt{0,988} \approx 0,994$.

(Une calculatrice donne : $\sqrt{0,988} = 0,993\,981\,89....$)

3.3. Travaux dirigés

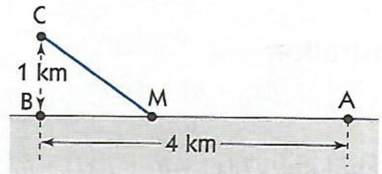
1. Un problème d'optimisation

Deux villages, A et B, sont situés sur une côte rectiligne, à 4 km l'un de l'autre.
Un pêcheur est en mer, sur sa pirogue, au point C situé à 1 km au large de B ; il veut se rendre en A le plus rapidement possible.
On se propose de déterminer le point D de la côte où le pêcheur doit débarquer, sachant qu'il se déplace en mer à une vitesse de 4 km/h et sur terre à une vitesse de 8 km/h.

1°) Démontrer que le point D appartient au segment [AB].

2°) On désigne par M un point du segment [AB] et par x la distance BM, exprimée en km.
***a)* Déterminer, en fonction de x, le temps t, exprimé en heures, mis par le pêcheur pour effectuer le trajet CMA.**
***b)* Étudier les variations de la fonction ainsi obtenue.**

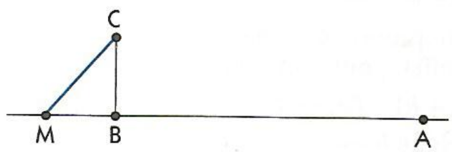
3°) En déduire la position du point D et le temps de parcours de C à A.

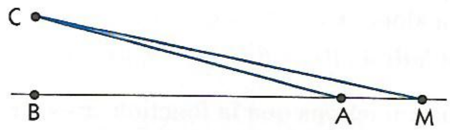


Solution

1°) D est un point de la côte, donc de la droite (AB).
Soit M un point de (AB) n'appartenant pas au segment [AB].
On envisage deux cas.

- Si M appartient à la demi-droite [AB), alors le trajet CBA est plus rapide que le trajet CMA ; donc D ≠ M.
- Si M appartient à la demi-droite [BA), alors le trajet CA est plus rapide que le trajet CMA ; donc D ≠ M.





D appartient donc au segment [AB].

2°) *a)* M appartient à [AB], donc : $x \in [0\,;4]$.

Le temps mis par le pêcheur pour parcourir CM, exprimé en heures, est : $\dfrac{CM}{4} = \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{4}$.

De même, le temps mis par le pêcheur pour parcourir MA est : $\dfrac{MA}{8} = \dfrac{4-x}{8}$.

On a donc : $t = \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{4} + \dfrac{4-x}{8}$.

b) Étudions les variations sur $[0\,;4]$ de la fonction f définie sur par : $f(x) = t = \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{4} + \dfrac{4-x}{8}$.

f est dérivable sur $\mathbb{R}$; on a : $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \dfrac{x}{4\sqrt{x^2+1}} - \dfrac{1}{8} = \dfrac{2x - \sqrt{x^2+1}}{8\sqrt{x^2+1}}$.

Pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0\,;4]$, on a :

$$f'(x) = 0 \iff 2x - \sqrt{x^2+1} = 0 \iff 4x^2 = x^2 + 1 \iff x = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

$$f'(x) < 0 \iff 2x < \sqrt{x^2+1} \iff 4x^2 < x^2 + 1 \text{ (car } x \text{ est positif)} \iff x < \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

On démontre de même que :
$(x \in [0 ; 4]$ et $f'(x) > 0) \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} < x < 4$.
De plus, $f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{4+\sqrt{3}}{8}$.
Ces résultats permettent de dresser le tableau de variation ci-contre.

x	0		$\frac{\sqrt{3}}{3}$		4
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	$\frac{4+\sqrt{3}}{8}$	$\nearrow$	

3°) On a : $\frac{\sqrt{3}}{3} \approx 0{,}577$ et $\frac{4+\sqrt{3}}{8} \approx 0{,}717$.
Le pêcheur doit donc débarquer au point D situé entre les villages A et B, à 577 m de B.
Son temps de parcours est de 0,717 *h*, soit environ 43 mn.

2. Comparaison de deux fonctions

Soit n un nombre entier naturel supérieur ou égal à 2.
On se propose de démontrer l'inégalité : $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $(1+x)^n \geq 1 + nx$ (1).
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par : $f(x) = (1+x)^n - 1 - nx$.
1°) Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.
2°) En déduire l'inégalité (1).

Solution

1°) On a :
$\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $f'(x) = n(1+x)^{n-1} - n = n[(1+x)^{n-1} - 1]$.
$x > 0 \Rightarrow 1 + x > 1$
$\Rightarrow (1+x)^{n-1} > 1$
$\Rightarrow f'(x) > 0$.
De plus, $f(0) = 0$. On en déduit le tableau de variation ci-contre.

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	$\Vert$	$+$
$f(x)$	0	$\nearrow$

2°) f admet 0 pour minimum sur $\mathbb{R}_+$, ce qui peut s'écrire : $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $f(x) > 0$.
On en déduit que : $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $(1+x)^n \geq 1 + nx$.

Remarques

- *L'inégalité (1) est vraie aussi pour $n = 1$. Donc : $\forall n \in \mathbb{N}^*$ et $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $(1+x)^n \geq 1 + nx$.*
- *Cette propriété peut également se démontrer à l'aide d'un raisonnement par récurrence.*

Exercices

3.a Dans chacun des cas suivants, préciser l'ensemble de dérivabilité de la fonction f, calculer sa dérivée et dresser son tableau de variation.
a) $f : x \mapsto -x^2 + 3x - 2$; *b)* $f : x \mapsto x^3 - 12$;
c) $f : x \mapsto 2x^4 - x^2 - 1$; *d)* $f : x \mapsto x^3 + 4x$.

3.b Dans chacun des cas suivants, préciser l'ensemble de dérivabilité de la fonction f, calculer sa dérivée et dresser son tableau de variation.
a) $f : x \mapsto \frac{4x-1}{x-2}$; *b)* $f : x \mapsto \frac{2x^2+7x+4}{x+3}$;
c) $f : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x^2+4x}}$; *d)* $f : x \mapsto \sqrt{x^2-1}$.

3.c Soit ABCD un rectangle de périmètre p.
On désigne par x la longueur du côté AB.
1. *a)* Calculer, en fonction de x, l'aire $\mathcal{A}(x)$ du rectangle ABCD.
b) Étudier les variations de la fonction $x \mapsto \mathcal{A}(x)$.
2. En déduire que l'aire d'un rectangle de périmètre constant est maximale lorsque ce rectangle est un carré.

3.d Donner la meilleure approximation affine de la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{1+x}$, pour x « proche de 0 ».
En déduire une valeur approchée de $\frac{1}{0{,}992}$; comparer le résultat obtenu avec celui donné par une calculatrice.

3.e Dans chacun des cas suivants, utiliser une approximation affine de fonction pour déterminer une valeur approchée de A, puis comparer le résultat obtenu avec celui donné par une calculatrice.
a) $A = \sqrt{25{,}000\,2}$; *b)* $A = (0{,}999\,97)^8$.

Exercices

On rappelle que le plan est muni du repère (O, I, J).

APPRENTISSAGE

Dérivation en x_0

1 Dans chacun des cas suivants, calculer, en utilisant la définition, le nombre dérivé de la fonction f en x_0.

a) $f(x) = -3x^2 + 4x + 5,\ x_0 = 2$;

b) $f(x) = \dfrac{2-3x}{x-2},\ x_0 = -\dfrac{1}{2}$;

c) $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2},\ x_0 = 1$;

d) $f(x) = \sqrt{2x+5},\ x_0 = -\dfrac{1}{2}$.

2 Dans chacun des cas suivants, déterminer une équation de la tangente à la courbe représentative de la fonction f au point d'abscisse x_0.

a) $f(x) = x^2 - 3x - 1,\ x_0 = -2$;

b) $f(x) = \dfrac{x^3+1}{x},\ x_0 = \dfrac{1}{3}$;

c) $f(x) = \dfrac{2-3x}{x-2},\ x_0 = 0$;

d) $f(x) = \sqrt{2x-3},\ x_0 = 2$.

3 Soit f la fonction définie par $f(x) = (x-1)(2x-3)$ et $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative.

1. Démontrer que : $\forall h \in \mathbb{R},\ f(2+h) = 1 + 3h + 2h^2$.

2. En déduire que f est dérivable en 2 et calculer son nombre dérivé en 2.

3. Déterminer une équation de la tangente (T) à $(\mathscr{C})$ au point d'abscisse 2.

4. Représenter $(\mathscr{C})$ et (T) sur le même graphique.

4 Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{2-x}{3x+1}$ et $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative.

1. Démontrer que :

$\forall h \in \mathbb{R}\setminus\{\frac{8}{3}\},\ f(-3+h) = f(-3) + \dfrac{7h}{24h-64}$.

2. En déduire que f est dérivable en -3 et calculer son nombre dérivé en -3.

3. Déterminer une équation de la tangente (T) à $(\mathscr{C})$ au point d'abscisse -3.

4. Représenter $(\mathscr{C})$ et (T) sur le même graphique.

5 Soit f la fonction définie par :

$f(x) = (x + \frac{1}{x})\sin(\pi x)$.

1. Démontrer que :

$\forall x \in \mathbb{R}^*\setminus\{1\},\ \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = -\pi(x+\dfrac{1}{x})\,\dfrac{\sin \pi(x-1)}{\pi(x-1)}$.

2. En déduire que f est dérivable en 1 et calculer son nombre dérivé en 1.

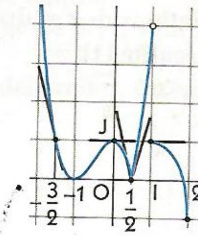
6 Soit f la fonction définie par $f(x) = x\sqrt{x}$ et $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.

2. Calculer le nombre dérivé de f en 2 et donner une équation de la tangente à $(\mathscr{C})$ au point d'abscisse 2.

3. Calculer le nombre dérivé de f à droite en 0 et donner une équation de la demi-tangente à $(\mathscr{C})$ au point d'abscisse 0.

7 La courbe ci-dessous est la représentation graphique d'une fonction f d'ensemble de définition $]-2\ ;2]$.



1. *a)* f est-elle dérivable en $\dfrac{1}{2}$?

b) f est-elle dérivable à gauche en 1 ? en 2 ?

2. On suppose que f est dérivable en $-\dfrac{3}{2}$, en -1, en 0 et à droite en 1.

a) Déterminer graphiquement $f'(-1)$, $f'(0)$ et le nombre dérivé de f à droite en 1.

b) Déterminer graphiquement le signe de $f'(-\frac{3}{2})$.

8 Soit f la fonction définie par : $f(x) = x\,|x-3|$.

1. *a)* Étudier la continuité de f en 3.

b) Calculer le nombre dérivé de f à droite et à gauche en 3. f est-elle dérivable en 3 ?

2. *a)* Étudier la continuité de f en 0.

b) Étudier la dérivabilité de f en 0.

9 Soit f la fonction définie par :

$$\begin{cases} f(x) = x^2 - 1, & \text{si } x < 1. \\ f(x) = \dfrac{x-1}{x+1}, & \text{si } x \geq 1. \end{cases}$$

1. Démontrer que f est continue en 1.

2. Étudier la dérivabilité de f en 1.

3. Déterminer une équation de la demi-tangente à gauche et une équation de la demi-tangente à droite à la courbe représentative de f au point d'abscisse 1.

10 Soit f la fonction définie par :

$$\begin{cases} f(x) = 3 - 2x, & \text{si } x < 0. \\ f(x) = 2x + 3 + \sqrt{x}, & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.

2. Démontrer que la courbe représentative de f admet une demi-tangente à gauche et une demi-tangente à droite au point d'abscisse 0.

Déterminer une équation de chacune de ces demi-tangentes.

Calculs de dérivées

11 Dans chacun des cas suivants, préciser l'ensemble de dérivabilité de la fonction f, puis déterminer sa fonction dérivée.

a) $f(x) = -x^2 + 3x + 1$; *b)* $f(x) = \frac{x^3}{3} + 2x^2 + 3x$;

c) $f(x) = (2x^2 + 5)^3$; *d)* $f(x) = (2x^2 + 1)(3x - 1)^2$

12 Dans chacun des cas suivants, préciser l'ensemble de dérivabilité de la fonction f, puis déterminer sa fonction dérivée.

a) $f(x) = \frac{1}{x + 1}$; *b)* $f(x) = -\frac{5x + 2}{3x + 4}$; *c)* $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x + 3}$.

13 Dans chacun des cas suivants, préciser l'ensemble de dérivabilité de la fonction f, puis déterminer sa fonction dérivée.

a) $f(x) = \sqrt{2x - 3}$; *b)* $f(x) = 2x\sqrt{x^2 + 1}$;

c) $f(x) = x^2 + 1 + \sqrt{x}$; *d)* $f(x) = \sqrt{\frac{1}{2 - x}}$.

14 Dans chacun des cas suivants, préciser l'ensemble de dérivabilité de la fonction f, puis déterminer sa fonction dérivée.

a) $f(x) = (\frac{1}{2}x)\cos(2x + \frac{\pi}{3})$; *b)* $f(x) = (\sin^3 x)\tan x$;

15 Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{x\sqrt{x + 1}}{2x - 3}$.
Préciser l'ensemble de dérivabilité de f, puis déterminer sa fonction dérivée.

16 Déterminer la fonction polynôme du second degré f telle que : $f(0) = 4$, $f'(0) = 3$ et $f(1) = 3$.

17 Soit a et b deux nombres réels. On considère la fonction f définie par : $f(x) = ax + b + \frac{1}{3 - x}$.
1. Calculer les valeurs de a et b sachant que : $f(2) = 2$ et $f'(2) = 0$.
2. Donner une équation cartésienne de la tangente au point d'abscisse 2 de la courbe représentative de f.

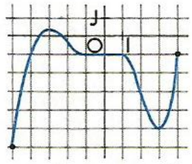
18 Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{x - 1}{(x^2 + 1)^2}$.
1. Préciser l'ensemble de dérivabilité de f, puis déterminer sa fonction dérivée.
2. Calculer les nombres dérivés de f en -1, 0, 1 et 2.
3. Déterminer des équations des tangentes à la courbe représentative de f aux points d'abscisses respectives -1, 0, 1 et 2.

19 Soit f la fonction définie par $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ et $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative.
1. Démontrer que $(\mathscr{C})$ est un demi-cercle de centre O, dont on déterminera le rayon. Tracer $(\mathscr{C})$.
2. Préciser l'ensemble de dérivabilité de f, puis déterminer sa fonction dérivée.
3. Soit x_0 un nombre réel de l'intervalle $]-2 ; 2[$.
a) Déterminer, en fonction de x_0, une équation de la tangente (T) à $(\mathscr{C})$ au point M_0 d'abscisse x_0.
b) Vérifier que : $(T) \perp (OM_0)$.

20 Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{1 - 2x}{x + 3}$ et $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative.
1. Préciser l'ensemble de dérivabilité de f, puis déterminer sa fonction dérivée.
2. *a)* Déterminer une équation de la tangente à $(\mathscr{C})$ au point d'abscisse -1.
b) Déterminer les points de $(\mathscr{C})$ où la tangente est parallèle à la tangente au point d'abscisse -1.
3. Démontrer que, pour tout nombre réel strictement négatif m, il existe deux points de $(\mathscr{C})$ où la tangente a pour coefficient directeur m.

Applications de la dérivation

21 La courbe ci-contre est la représentation graphique d'une fonction f d'ensemble de définition $[-5 ; 4]$.
On suppose que f est dérivable sur $]-5 ; 4[$.



1. Déterminer le signe de f' sur chacun des intervalles $]-5 ; -3[$, $]-3 ; -1[$, $]-1 ; 1[$, $]1 ; 3[$ et $]3 ; 4[$.
2. Dresser le tableau de variation de f.

22 Dans chacun des cas suivants :
- préciser l'ensemble de dérivabilité de la fonction f ;
- déterminer la dérivée de f et étudier son signe ;
- dresser le tableau de variation de f.

a) $f(x) = x^2 + 1$; *b)* $f(x) = x^3 + 3x^2 + 1$.

c) $f(x) = \frac{2x + 5}{2 - x}$; *d)* $f(x) = \frac{4x^2 - 11x - 2}{x - 3}$.

e) $f(x) = \sqrt{2 - 3x}$; *f)* $f(x) = x - \sqrt{x}$.

23 Dans chacun des cas suivants :
- préciser l'ensemble de dérivabilité de la fonction f ;
- déterminer la dérivée de f et étudier son signe sur l'intervalle K ;
- dresser le tableau de variation de f sur K.

a) $f(x) = \cos(\frac{\pi}{3} - 2x)$ et $K =]0 ; \pi[$;

b) $f(x) = \sin^2 x + \cos x$ et $K =]-\pi ; \pi[$;

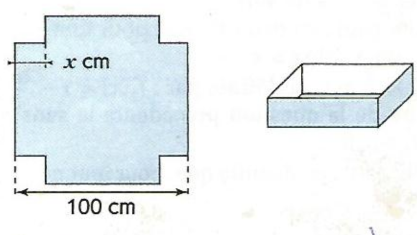
c) $f(x) = \frac{1 - 3\cos 3x}{\cos 3x - 2}$ et $K =]0 ; \pi[$.

24 Dans chacun des cas suivants, utiliser une approximation affine de fonction pout déterminer une valeur approchée de A, puis comparer le résultat obtenu avec celui donné par une calculatrice.

a) $A = (2{,}0002)^5$; *b)* $A = \frac{1}{(10{,}005)^2}$;

c) $A = \frac{2{,}0001}{(1{,}0001)^2}$; *d)* $A = \sin(0{,}002)$.

25 On dispose d'une feuille de carton carrée de côté 100 cm. Aux quatre coins de cette feuille, on découpe un carré de côté x cm puis on plie le morceau restant pour obtenir une boîte sans couvercle.
On désigne par $V(x)$ le volume de cette boîte, exprimé en cm^3.



1. *a)* Préciser l'ensemble des valeurs possibles de x.
b) Démontrer que : $V(x) = x(100 - 2x)^2$.
2. Étudier le sens de variation de la fonction V ainsi obtenue et dresser son tableau de variation.
3. En déduire la valeur de x pour laquelle le volume de la boîte est maximum. Calculer ce volume maximum.

APPROFONDISSEMENT

26 Soit a et b deux nombres réels. On considère la fonction f définie par : $f(x) = \dfrac{3x^2 + ax + b}{x^2 + 1}$.
Déterminer a et b pour que la représentation graphique de f :
- passe par $A\begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix}$;
- admette en A une tangente d'équation $y = 4x + 3$.

27 Soit a un nombre réel. On considère la fonction f définie par : $f(x) = 2x^3 + ax^2 + 3$.
1. Déterminer a pour que la représentation graphique de f admette au point d'abscisse 1 une tangente parallèle à l'axe des abscisses.
2. Étudier les variations de la fonction ainsi obtenue et préciser ses extremums.

28 Soit a, b et c trois nombres réels. On considère la fonction f définie par : $f(x) = \dfrac{x^2 + ax + b}{cx^2 + 1}$.
Déterminer a, b et c pour que la fonction f admette un extremum en -2 et un extremum, égal à 2, en 0.

29 Soit a, b et c trois nombres réels. On considère la fonction f définie par : $f(x) = \dfrac{ax^2 + bx + c}{x - 2}$.
Déterminer a, b et c pour que la représentation graphique de f :
- admette au point d'abscisse 0 une tangente parallèle à l'axe des abscisses ;
- coupe (Γ), courbe représentative de la fonction $x \mapsto -2x^2 + x + 5$, au point d'abscisse 1 et admette en ce point la même tangente que (Γ).

On dit que les courbes $(\mathscr{C})$ et (Γ) sont tangentes au point d'abscisse 1.

30 *Un nombre réel α est appelé racine double d'un polynôme P si et seulement si il existe un polynôme Q tel que, pour tout nombre réel x, on a : $P(x) = (x - \alpha)^2 Q(x)$.*
Soit P une fonction polynône et α un nombre réel.
On désigne par P' la fonction dérivée de P.
1. Démontrer que P' est une fonction polynôme.
2. On suppose que α est une racine double de P. Démontrer que α est une racine de P'.
3. On suppose que α est une racine de P et de P'. Démontrer que α est une racine double de P.

31 1. Soit f_1 la fonction définie par : $f_1(x) = x - \sin x$.
a) Étudier le sens de variation de f_1 sur $\mathbb{R}$.
b) Calculer $f_1(0)$; en déduire que, pour tout nombre réel positif x, on a : $\sin x \leq x$.
2. Soit f_2 la fonction définie par : $f_2(x) = 1 - \dfrac{x^2}{2} - \cos x$.
a) Déduire de la question précédente le sens de variation de f_2 sur $\mathbb{R}_+$.
b) Calculer $f_2(0)$; en déduire que, pour tout nombre réel x, on a : $1 - \dfrac{x^2}{2} \leq \cos x$.
3. Soit f_3 la fonction définie par : $f_3(x) = x - \dfrac{x^3}{6} - \sin x$.
a) Déduire de la question précédente le sens de variation de f_3 sur $\mathbb{R}$.
b) Calculer $f_3(0)$; en déduire que, pour tout nombre réel positif x, on a : $x - \dfrac{x^3}{6} \leq \sin x$.
4. Soit f_4 la fonction définie par :
$f_3(x) = 1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{24} - \cos x$.
a) Déduire de la question précédente le sens de variation de f_4 sur $\mathbb{R}_+$.
b) Calculer $f_4(0)$; en déduire que, pour tout nombre réel x, on a : $\cos x \leq 1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{24}$.

Application
Déduire des questions 1.*b)*, 2.*b)*, 3.*b)* et 4.*b)* un encadrement de $\sin\left(\dfrac{1}{2}\right)$ et un encadrement de $\cos\left(\dfrac{1}{2}\right)$.

32 Soit u une fonction définie sur un intervalle ouvert K et x_0 un élément de K. On suppose qu'il existe un nombre réel a et une fonction φ telle que, pour tout nombre réel h tel que $x_0 + h$ appartient à I, on a :
$u(x_0 + h) = u(x_0) + ah + h\varphi(h)$ et $\lim\limits_{h \to 0} \varphi(h) = 0$.
1. Démontrer que u est dérivable en x_0 et déterminer son nombre dérivé en x_0.
2. Soit v une nouvelle fonction définie sur I. On suppose qu'il existe un nombre réel b et une fonction χ telle que, pour tout nombre réel h tel que $x_0 + h$ appartient à I, on a :
$v(x_0 + h) = v(x_0) + bh + h\chi(h)$ et $\lim\limits_{h \to 0} \chi(h) = 0$.
a) Démontrer que la fonction uv est dérivable en x_0.
b) Déterminer le nombre dérivé de uv en x_0.

33 Soit f la fonction définie par : $f(x) = \dfrac{1}{4}x^2$.
On suppose que le repère (O, I, J) est orthonormé ; on désigne par $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de f et par $(\mathscr{D})$ la droite d'équation $y = -1$.
Soit x_0 un nombre réel et M_0 le point de $(\mathscr{C})$ d'abscisse x_0.
1. Déterminer, en fonction de x_0, une équation de la tangente (T_0) à $(\mathscr{C})$ en M_0.
2. Soit H_0 le projeté orthogonal de M_0 sur $(\mathscr{D})$.
a) Démontrer que $M_0J = M_0H_0$, puis que (T_0) est la médiatrice du segment $[JH_0]$.
b) En déduire une construction géométrique simple de M_0 et de (T_0), connaissant H_0.

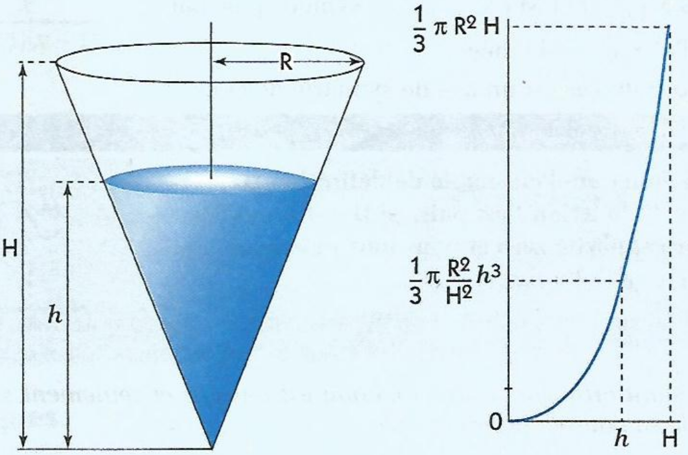
Application
Construire géométriquement les points de $(\mathscr{C})$ d'abscisses respectives -2 et 3, puis les tangentes à $(\mathscr{C})$ en ces points.

34 Soit f la fonction définie par $f(x) = -x^3 + 3x + 1$ et $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative.
Soit x_0 un nombre réel et M_0 le point de $(\mathscr{C})$ d'abscisse x_0.
1. Démontrer que la tangente (T_0) à $(\mathscr{C})$ en M_0 a une équation de la forme $y = (-3x_0{}^2 + 3)x + 2x_0{}^3 + 1$.
2. *a)* Écrire une équation dont les solutions sont les abscisses des points d'intersection de (T_0) et $(\mathscr{C})$.
b) Démontrer que cette équation peut s'écrire :
$(x - x_0)^2(x + 2x_0) = 0$.
c) En déduire que (T_0) et $(\mathscr{C})$ ont en général deux points communs.
Dans quel cas (T_0) et $(\mathscr{C})$ n'ont-elles qu'un point commun ?

14 Études de fonctions

Introduction

Dans les chapitres précédents, nous avons mis en place les notions de limites et de dérivées. Nous allons maintenant compléter les acquis de la classe de seconde et investir ces nouveaux outils dans l'étude et la représentation graphique de fonctions numériques.



Volume de liquide dans le récipient en fonction de sa hauteur.

SOMMAIRE

Dans ce chapitre, les fonctions étudiées sont des fonctions numériques à variables réelles et le plan est muni du repère (O, I, J).

1 Généralités sur les fonctions

1.1. Parité, périodicité

Fonctions paires

On suppose que le repère (O, I, J) est orthogonal.

La courbe $(\mathscr{C})$ ci-contre est la représentation graphique de la fonction f définie par : $f(x) = x^2 - 1$.

L'ensemble de définition de f est D_f tel que : $D_f = \mathbb{R}$.

On a : $\forall x \in D_f, -x \in D_f$

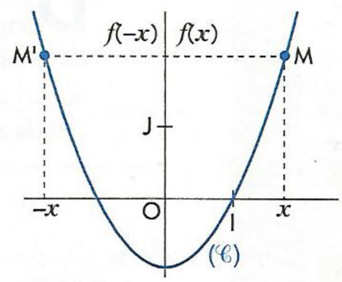
Nous dirons que D_f est symétrique par rapport à zéro.

De plus : $\forall x \in D_f, f(-x) = f(x)$.

On dit que f est une fonction paire.

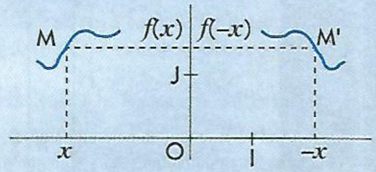
Les points $M\begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix}$ et $M'\begin{pmatrix} -x \\ f(-x) \end{pmatrix}$ sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées.

L'axe des ordonnées est un axe de symétrie de $(\mathscr{C})$.



Définition

Soit f une fonction d'ensemble de définition D_f. On dit que la fonction f est paire si D_f est symétrique par rapport à zéro et pour tout x élément de D_f, on a : $f(-x) = f(x)$.



Le repère étant orthogonal, une fonction est paire si et seulement si l'axe des ordonnées est un axe de symétrie de sa courbe représentative.

Exemples

- Les fonctions $x \mapsto k$ ($k \in \mathbb{R}$), $x \mapsto x^2$, $x \mapsto |x|$ et $x \mapsto \cos x$ sont des fonctions paires.
- La fonction f, définie par $f(x) = 3x^4 - 2x^2 + 1$, est une fonction paire.

En effet son ensemble de définition $\mathbb{R}$ est symétrique par rapport à zéro et pour tout x élément de $\mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} f(-x) &= 3(-x)^4 - 2(-x)^2 + 1 \\ &= 3x^4 - 2x^2 + 1 \\ &= f(x). \end{aligned}$$

- La fonction g, définie par $g(x) = \dfrac{1}{(x-1)(x+3)}$, n'est pas une fonction paire.

En effet son ensemble de définition $\mathbb{R}\backslash\{-3 ; 1\}$ n'est pas symétrique par rapport à zéro.

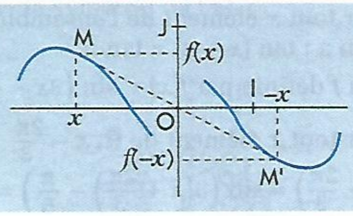
Remarque

Lorsqu'une fonction f, d'ensemble de définition D_f, est paire, il suffit de l'étudier sur l'ensemble $D_f \cap \mathbb{R}_+$. La courbe obtenue est ensuite complétée par symétrie par rapport à l'axe des ordonnées.

Fonctions impaires

Définition

**Soit f une fonction d'ensemble de définition D_f.
On dit que la fonction f est impaire si D_f est symétrique par rapport à zéro et pour tout x élément de D_f, on a : $f(-x) = -f(x)$.**



Une fonction est impaire si et seulement si l'origine du repère est un centre de symétrie de sa courbe représentative.

Exemples

- Les fonctions $x \mapsto x$, $x \mapsto x^3$, $x \mapsto \dfrac{1}{x}$, $x \mapsto \sin x$ et $x \mapsto \tan x$ sont des fonctions impaires.
- La fonction f, définie par $f(x) = \dfrac{x}{(x-1)(x+1)}$, est une fonction impaire.

En effet son ensemble de définition $\mathbb{R}\backslash\{-1\ ;\ 1\}$ est symétrique par rapport à zéro et pour tout x élément de $\mathbb{R}\backslash\{-1\ ;\ 1\}$, on a : $f(-x) = \dfrac{-x}{(-x-1)(-x+1)}$

$$= -\frac{x}{(x+1)(x-1)}$$

$$= -f(x).$$

- La fonction g, définie par $g(x) = \dfrac{1}{(x-1)(x+3)}$, n'est pas une fonction paire.

En effet son ensemble de définition $\mathbb{R}\backslash\{-3\ ;\ 1\}$ n'est pas symétrique par rapport à zéro.

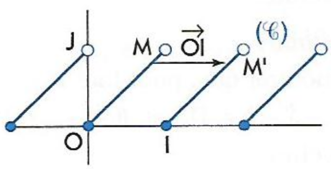
Remarque

Lorsqu'une fonction f, d'ensemble de définition D_f, est impaire, il suffit de l'étudier sur l'ensemble $D_f \cap \mathbb{R}_+$. La courbe obtenue est ensuite complétée par symétrie par rapport à l'origine du repère.

Fonctions périodiques

La courbe $(\mathscr{C})$ ci-jointe est la représentation graphique de la fonction mantisse m, définie par $m(x) = x - E(x)$, où E désigne la fonction partie entière.
Soit D l'ensemble de définition de la fonction m.
- Déterminer D et vérifier que : $\forall x \in D, x + 1 \in D$ et $x - 1 \in D$.
- Démontrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, E(x+1) = E(x) + 1$.

En déduire que : $\forall x \in D, m(x+1) = m(x)$.
On dit que m est périodique, de période 1.



Soit t la translation de vecteur $\overrightarrow{OI}$.
- Démontrer que : $\forall M \in (\mathscr{C}), t(M) \in (\mathscr{C})$.
- En déduire que $(\mathscr{C})$ est globalement invariante par la translation de vecteur $\overrightarrow{OI}$.

Définition

**Soit f une fonction d'ensemble de définition D_f et p un nombre réel non nul.
On dit que f est périodique, de période p, si pour tout x élément de D_f, $x - p$ et $x + p$ appartiennent à D_f et $f(x + p) = f(x)$.**

Une fonction f est périodique, de période p, si et seulement si sa courbe représentative est globalement invariante par la translation de vecteur $p\overrightarrow{OI}$.

Exemples

- Les fonctions cosinus et sinus sont périodiques, de période 2π.
- La fonction tangente est périodique, de période π.

En effet, pour tout x élément de l'ensemble de définition D de cette fonction, $x+\pi$ et $x-\pi$ appartiennent à D et on a : $\tan(x+\pi) = \tan x$.

- La fonction f définie par $f(x) = \sin\left(3x - \frac{\pi}{5}\right)$ est périodique, de période $\frac{2\pi}{3}$.

En effet, pour tout x élément de $\mathbb{R}$, $x - \frac{2\pi}{3}$ et $x + \frac{2\pi}{3}$ appartiennent à $\mathbb{R}$

et on a : $f\left(x+\frac{2\pi}{3}\right) = \sin\left(3\left(x+\frac{2\pi}{3}\right) - \frac{\pi}{5}\right) = \sin\left(3x - \frac{\pi}{5}\right) = f(x)$.

Remarques

- *Si p est une période de f, alors k p ($k \in \mathbb{Z}^*$) est aussi une période de f.*
- *Lorsqu'une fonction f, d'ensemble de définition D_f, est périodique de période p, il suffit de l'étudier sur un ensemble de la forme $D_f \cap [a\ ;\ a+p[$. La courbe obtenue est ensuite complétée en utilisant les translations de vecteurs $p\overrightarrow{OI}$ et $-p\overrightarrow{OI}$.*

1.2. Éléments de symétrie

Axe de symétrie

On suppose que le repère (O, I , J) est orthogonal.

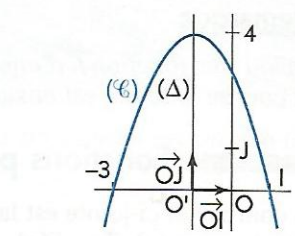
Soit f la fonction définie par $f(x) = -x^2 - 2x + 3$ et $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative.

On se propose de démontrer que la droite (Δ), d'équation $x = -1$, est un axe de symétrie de $(\mathscr{C})$.

1re méthode

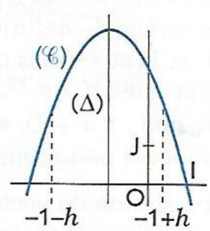
Soit $O'\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}$ le point d'intersection de la droite (Δ) avec l'axe des abscisses.

Soit M un point du plan ; on désigne par (x, y) et (X, Y) ses coordonnées respectives dans les repères (O, I, J) et $(O', \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$.



- Démontrer que : $\begin{cases} x = X - 1 \\ y = Y \end{cases}$.
- En déduire que : $M \in (\mathscr{C}) \Leftrightarrow Y = -X^2 + 4$.
- Vérifier que la fonction $g : x \mapsto -x^2 + 4$ est paire.
- Conclure.

2e méthode



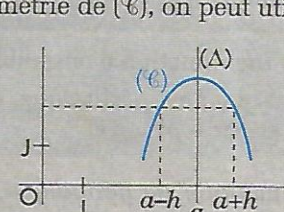
- Démontrer que, pour tout nombre réel h tel que $-1+h \in D_f$, on a : $-1-h \in D_f$ et $f(-1+h) = f(-1-h)$.
- Conclure.

M

Soit f une fonction et $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative dans le plan muni du repère orthogonal (O, I, J).

Pour démontrer que la droite (Δ) d'équation $x = a$ est un axe de symétrie de $(\mathscr{C})$, on peut utiliser l'un des procédés suivants.

- Démontrer que, dans le repère $(O', \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$ avec $O'\begin{pmatrix}a\\0\end{pmatrix}$, $(\mathscr{C})$ est la représentation graphique d'une fonction paire.
- Démontrer que pour tout nombre réel h tel que $a+h \in D_f$, on a : $a-h \in D_f$ et $f(a-h) = f(a+h)$.



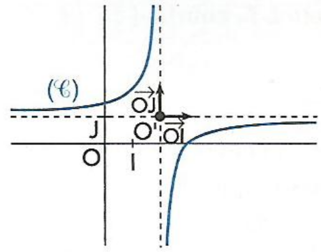
Centre de symétrie

Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{x-3}{x-2}$ et $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative.

On se propose de démontrer que le point $O'\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ est un centre de symétrie de $(\mathscr{C})$.

1re méthode

Soit M un point du plan ; on désigne par (x, y) et (X, Y) ses coordonnées respectives dans les repères (O, I, J) et $(O', \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$.



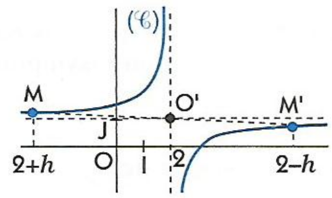
- Démontrer que : $\begin{cases} x = X + 2 \\ y = Y + 1 \end{cases}$.
- En déduire que : $M \in (\mathscr{C}) \Leftrightarrow Y = -\dfrac{1}{X}$.
- Vérifier que la fonction $g : x \mapsto -\dfrac{1}{x}$ est impaire.
- Conclure.

2e méthode

- Démontrer que, pour tout nombre réel h tel que $2 + h \in D_f$,

on a : $2 - h \in D_f$ et $\dfrac{f(2-h) + f(2+h)}{2} = 1$.

- Conclure.

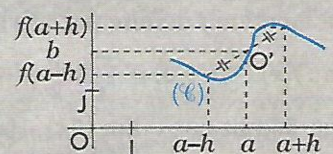


M

Soit f une fonction et $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative dans le plan muni du repère orthogonal (O, I, J).
Pour démontrer que le point $O'\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ est un centre de symétrie de $(\mathscr{C})$, on peut utiliser l'un des procédés suivants.

- Démontrer que, dans le repère $(O', \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$, $(\mathscr{C})$ est la représentation graphique d'une fonction impaire.
- Démontrer que pour tout nombre réel h tel que $a + h \in D_f$,

on a : $a - h \in D_f$ et $\dfrac{f(a-h) + f(a+h)}{2} = b$.



1.3. Notion d'asymptote

Asymptotes parallèles aux axes du repère

La courbe $(\mathscr{C})$ ci-contre est la représentation graphique de la fonction f définie par : $f(x) = \dfrac{-2x+2}{2x-3}$.

- On a : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -1$.

Soit (Δ) la droite d'équation $y = -1$.

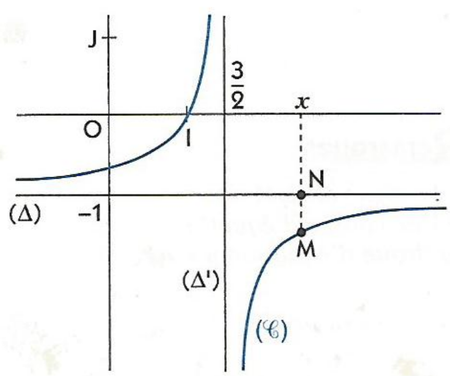
Pour tout nombre réel x distinct de $\dfrac{3}{2}$, on désigne par M et N les points d'abscisse x appartenant respectivement à $(\mathscr{C})$ et à (Δ).

On a : $\overline{NM} = f(x) + 1$; donc : $\lim\limits_{x \to +\infty} \overline{NM} = 0$.

On dit que la droite (Δ) est asymptote à la courbe $(\mathscr{C})$.

- On a : $\lim\limits_{\substack{x \to \frac{3}{2} \\ >}} f(x) = -\infty$.

On dit que la droite (Δ'), d'équation $x = \dfrac{3}{2}$, est asymptote à la courbe $(\mathscr{C})$.



Définitions

Soit f une fonction et $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative.
• Lorsque f a une limite finie l en $+\infty$ ou en $-\infty$, on dit que la droite d'équation $y = l$ est asymptote à la courbe $(\mathscr{C})$.
• Lorsque f a une limite infinie à droite ou à gauche en x_0, on dit que la droite d'équation $x = x_0$ est asymptote à la courbe $(\mathscr{C})$.

Exemples

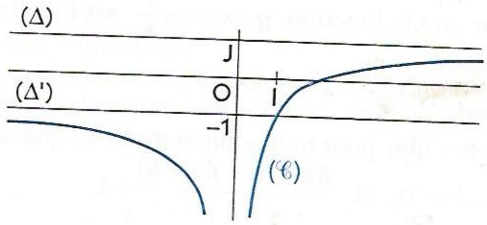
La courbe $(\mathscr{C})$ ci-contre est la représentation graphique de la fonction f définie par : $f(x) = \dfrac{x-2}{|x|}$.

• On a : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -1$.

Les droites (Δ) et (Δ'), d'équations respectives $y = 1$ et $y = -1$, sont donc asymptotes à $(\mathscr{C})$.

• On a : $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = -\infty$.

L'axe des ordonnées est donc asymptote à $(\mathscr{C})$.



Asymptotes obliques

La courbe $(\mathscr{C})$ ci-contre est la représentation graphique de la fonction f définie par : $f(x) = \dfrac{x^2-3}{x-2}$.

On a : $f(x) - (x+2) = \dfrac{x^2-3}{x-2} - \dfrac{x^2-4}{x-2} = \dfrac{1}{x-2}$.

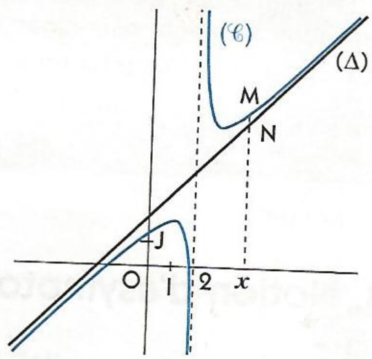
On en déduit que : $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - (x+2)] = 0$.

Soit (Δ) la droite d'équation $y = x + 2$.

Pour tout nombre réel distinct de 2, on désigne par M et N les points d'abscisse x appartenant respectivement à $(\mathscr{C})$ et à (Δ).

On a : $\overline{NM} = f(x) - (x+2)$; donc : $\lim\limits_{x \to +\infty} \overline{NM} = 0$.

On dit que la droite (Δ) est asymptote à la courbe $(\mathscr{C})$.



Définition

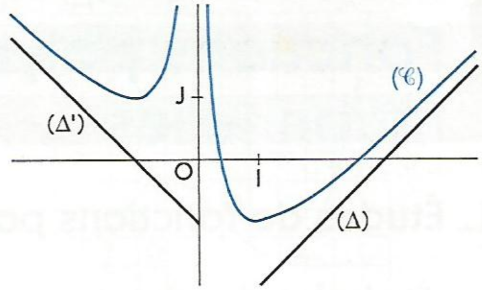
Soit f une fonction et $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative.
Lorsqu'il existe une fonction affine $x \mapsto ax + b$, telle que la fonction $x \mapsto f(x) - (ax+b)$ a pour limite 0 en $+\infty$ ou en $-\infty$, on dit que la droite d'équation $y = ax + b$ est asymptote à la courbe $(\mathscr{C})$.

Remarques

• *Le signe de $\overline{NM}$ donne la position de la courbe $(\mathscr{C})$ par rapport à son asymptote.*
• *Une courbe d'équation $y = ax + b + g(x)$, où g est une fonction de limite nulle en $+\infty$ ou en $-\infty$, admet la droite d'équation $y = ax + b$ pour asymptote.*

Exemples

La courbe $(\mathscr{C})$ ci-contre est la représentation graphique de la fonction f définie par :



$f(x) = \dfrac{x^2 - x + 1}{|x|} - 2.$

• On a : $\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*,\ f(x) = \dfrac{x^2 - x + 1}{x} - 2$

$= x - 3 + \dfrac{1}{x}.$

Donc, $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - (x - 3)] = 0.$

La droite (Δ), d'équation $y = x - 3$, est asymptote à $(\mathscr{C})$.
De plus, on a : $\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*,\ f(x) - (x - 3) > 0$; donc, $(\mathscr{C})$ est « au-dessus » de (Δ) sur $\mathbb{R}_+^*$.

• On a : $\forall\, x \in \mathbb{R}_-^*,\ f(x) = \dfrac{x^2 - x + 1}{-x} - 2 = -x - 1 - \dfrac{1}{x}.$

Donc, $\lim\limits_{x \to -\infty} [f(x) - (-x - 1)] = 0.$

La droite (Δ'), d'équation $y = -x - 1$, est asymptote à $(\mathscr{C})$.
De plus, on a : $\forall\, x \in \mathbb{R}_-^*, f(x) - (-x - 1) > 0$; donc, $(\mathscr{C})$ est « au-dessus » de (Δ') sur $\mathbb{R}_-^*$.

Exercices

1.a Dans chacun des cas suivants, étudier la parité de la fonction f.
a) $f : x \mapsto x^n$ $(n \in \mathbb{N}^*)$; *b)* $f : x \mapsto -2$;
c) $f : x \mapsto \dfrac{x}{2 - x^2}$; *d)* $f : x \mapsto \dfrac{x + 1}{x - 1}$.

1.b Dans chacun des cas suivants, démontrer que la fonction f est périodique, de période p.
a) $f : x \mapsto \sin^2 x$, $p = \pi$;
b) $f : x \mapsto \cos^2\left(\frac{x}{2}\right)$, $p = 2\pi$.

1.c Dans chacun des cas suivants, donner trois périodes de la fonction f.
a) $f : x \mapsto \cos\left(\frac{x}{3}\right)$; *b)* $f : x \mapsto \sin\left(\frac{5}{7}x\right)$;
c) $f : x \mapsto \sin\left(5x + \frac{\pi}{4}\right)$; *d)* $f : x \mapsto \cos\left(-4x - \frac{\pi}{6}\right)$.

1.d Démontrer que la droite d'équation $x = -1$ est un axe de symétrie pour la courbe représentative de la fonction $f : x \mapsto x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 3$.

1.e Démontrer que le point $\Omega\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ est un centre de symétrie pour la courbe représentative de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x^2}{x - 1}$.

1.f Déterminer deux asymptotes à la courbe représentative de la fonction $f : x \mapsto 2x + 3 - \dfrac{1}{x + 2}$.

1.g Démontrer que la droite (Δ) d'équation $y = 2x + 5$ est asymptote à la courbe représentative de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{2x^2 + 3x - 1}{x - 1}$.

2 Fonctions polynômes, fonctions rationnelles

2.1. Études de fonctions polynômes

Étude de la fonction $f : x \mapsto -\frac{1}{2}x^2 + 2x$

Ensemble de définition

La fonction f est un polynôme ; elle est donc définie et continue en tout élément de $\mathbb{R}$.

Dérivée et sens de variation

La fonction f est un polynôme, elle est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est la fonction $f' : x \mapsto -x + 2$.

On a : $f'(2) = 0$;

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x < 2$; donc, f est croissante sur $]-\infty\,;2[$;

$f'(x) < 0 \Leftrightarrow x > 2$; donc, f est décroissante sur $]2\,;+\infty[$.

Étude aux bornes de l'ensemble de définition

On a : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \left(-\frac{1}{2}x^2\right) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(-\frac{1}{2}x^2\right) = -\infty$.

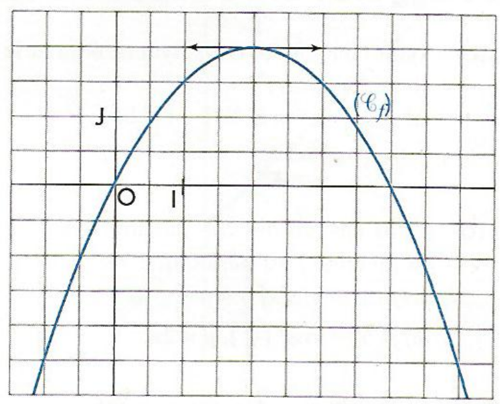
Tableau de variation

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$

Table de valeurs

x	-1	0	1	2	3	4	5
$f(x)$	$-\frac{5}{2}$	0	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{3}{2}$	0	$-\frac{5}{2}$

Courbe représentative



La courbe représentative de la fonction f est une parabole. Le point de coordonnées (2, 2) est le sommet de cette parabole et la droite d'équation $x = 2$ est son axe de symétrie.

Étude de la fonction $g : x \mapsto \frac{x^3}{3} - x^2 + 1$

Ensemble de définition

La fonction g est un polynôme ; elle est donc définie et continue en tout élément de $\mathbb{R}$.

Dérivée et sens de variation

La fonction g est un polynôme, elle est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est la fonction $g' : x \mapsto x^2 - 2x$.

On a : $\forall x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = x(x-2)$

Ainsi : $\forall x \in\ ]-\infty\,;0[\ \cup\ ]2\,;+\infty[$, $g'(x) > 0$; donc, g est croissante sur chacun des intervalles $]-\infty\,;0[$ et $]2\,;+\infty[$.

$\forall x \in\ ]0\,;2[$, $g'(x) < 0$; donc, g est décroissante sur l'intervalle $]0\,;2[$.

Étude aux bornes de l'ensemble de définition

On a : $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x^3}{3} = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^3}{3} = +\infty$.

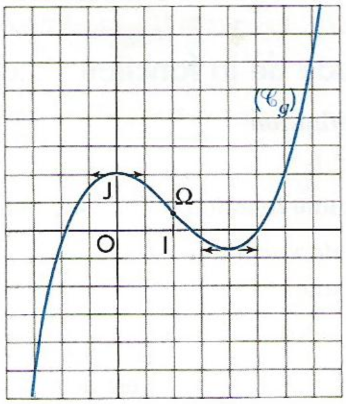
Tableau de variation

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\frac{1}{3}$	$\nearrow$	$+\infty$

Table de valeurs

x	-1	0	1	2	3
$g(x)$	$-\frac{1}{3}$	1	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	1

Courbe représentative



La figure suggère et on démontre que le point Ω de coordonnées $(1, \frac{1}{3})$ est centre de symétrie de la courbe.

Étude de la fonction $h : x \mapsto -x^3 - x$

Ensemble de définition

La fonction h est un polynôme ; elle est donc définie et continue en tout élément de $\mathbb{R}$.

Ensemble d'étude

On remarque que : $\forall x \in \mathbb{R}, h(-x) = h(x)$

Donc h est une fonction impaire et l'origine du repère est un centre de symétrie de sa courbe représentative. On peut restreindre l'étude de cette fonction à $\mathbb{R}_+$.

Dérivée et sens de variation

La fonction h est un polynôme, elle est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est la fonction $h' : x \mapsto -3x^2 - 1$.

On a : $\forall x \in \mathbb{R}_+, h'(x) < 0$; donc h est décroissante sur $\mathbb{R}_+$.

Étude aux bornes de [0 ; + ∞[

On a : $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} -x^3 = -\infty$.

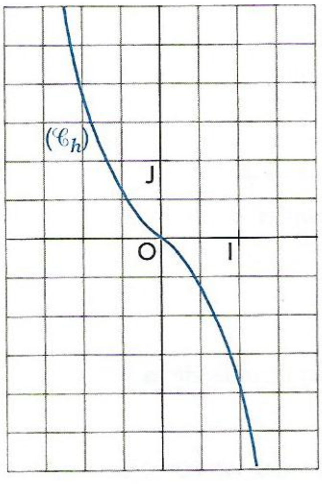
Tableau de variation

x	0		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	
$h(x)$	0	$\searrow$	$-\infty$

Table de valeurs

x	0	1	2
$g(x)$	0	-2	-10

Courbe représentative



M

Pour étudier une fonction f, en l'absence de consignes particulières, on peut adopter le plan suivant.

- Déterminer l'ensemble de définition et étudier la continuité de f en tout point de cet ensemble.
- Signaler la parité ou la périodicité éventuelles de f et en déduire une réduction de l'ensemble d'étude.
- Déterminer l'ensemble de dérivabilité de f, calculer sa dérivée et en déduire le sens de variation de f.
- Étudier le comportement de f aux bornes de l'ensemble d'étude et en déduire les éventuelles asymptotes.
- Regrouper les résultats ainsi obtenus dans un tableau de variation .
- Tracer la courbe représentative de f, après avoir éventuellement dressé une table de valeurs.

2.2. Études de fonctions rationnelles

Étude de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{2x-4}{2x-3}$

Ensemble de définition

On a : $D_f = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{3}{2} \right\}$

La fonction f est une fonction rationnelle ; elle est donc continue en tout élément de D_f

Dérivée et sens de variation

La fonction f est une fonction rationnelle, elle est donc dérivable sur D_f et sa dérivée est la fonction $f' : x \mapsto \dfrac{2}{(2x-3)^2}$.

On a : $\forall x \in D_f, f'(x) > 0$. Donc, f est décroissante sur $\left]-\infty ; \frac{3}{2}\right[$ et sur $\left]\frac{3}{2} ; +\infty\right[$.

Étude aux bornes de l'ensemble de définition

On a : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 1$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$.

Donc, la droite d'équation $y = 1$ est asymptote à la courbe représentative de f.

On a : $\lim\limits_{\substack{x \to \frac{3}{2} \\ <}} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to \frac{3}{2} \\ >}} f(x) = -\infty$.

Donc, la droite d'équation $x = \frac{3}{2}$ est asymptote à la courbe représentative de f.

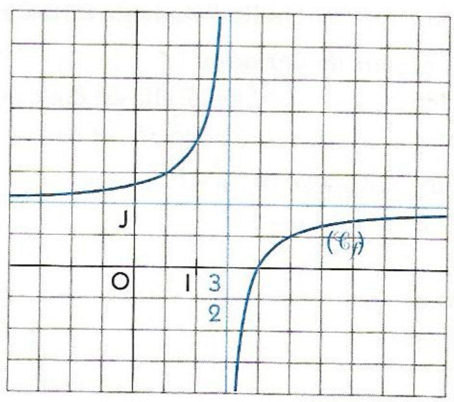
Tableau de variation

x	$-\infty$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		+	‖	+	
$f(x)$	1	↗ $+\infty$	‖	$-\infty$ ↗	1

Table de valeurs

x	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$f(x)$	$\frac{8}{7}$	$\frac{6}{5}$	$\frac{4}{3}$	2	0	$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{6}{7}$

Courbe représentative



La courbe représentative de la fonction f est une hyperbole. Le point d'intersection des asymptotes est son centre de symétrie.

Vocabulaire

Les fonctions non constantes de la forme $x \mapsto \dfrac{ax+b}{cx+d}$, où $c \neq 0$, sont appelées fonctions homographiques.

Étude de la fonction $g : x \mapsto \dfrac{1}{2}x + \dfrac{3}{2} + \dfrac{2}{x+1}$

Ensemble de définition

On a : $D_g = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

La fonction g est une fonction rationnelle ; elle est donc continue en tout élément de D_g.

Dérivée et sens de variation

La fonction g est une fonction rationnelle, elle est donc dérivable sur D_g et sa dérivée est la fonction $g' : x \mapsto \dfrac{(x-1)(x+3)}{(x+1)^2}$.

On a : $g'(1) = g'(-3) = 0$.

$\forall\, x \in\,]-\infty\,;-3[\, \cup\,]1\,;+\infty[,\ g'(x) > 0$; donc, g est croissante sur $]-\infty\,;-3[$ et sur $]1\,;+\infty[$.

$\forall\, x \in\,]-3\,;-1[\, \cup\,]-1\,;1[,\ g'(x) < 0$; donc, g est décroissante sur $]-3\,;-1[$ et sur $]-1\,;1[$.

Étude aux bornes de l'ensemble de définition

$\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$. De plus : $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2}{x+1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2}{x+1} = 0$

Donc, la droite d'équation $y = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{3}{2}$ est asymptote à la courbe représentative de g.

$\lim\limits_{\substack{x\to-1\\ <}} g(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\ >}} g(x) = +\infty$.

Donc, la droite d'équation $x = -1$ est asymptote à la courbe représentative de g.

Tableau de variation

x	$-\infty$		-3		-1		1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$-\infty$	↗	-1	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	3	↗	$+\infty$

Courbe représentative

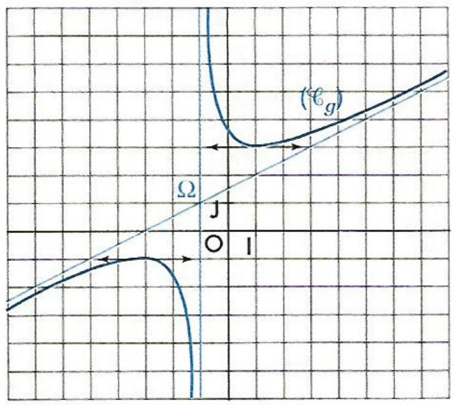


Table de valeurs

x	-5	-3	-2	0	1	3
$f(x)$	$-1{,}5$	-1	$-1{,}5$	$3{,}5$	3	$3{,}5$

La figure suggère et on démontre que $\Omega\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$*, point d'intersection des asymptotes, est un centre de symétrie de la courbe.*

2.3. Travaux dirigés

Résolution d'une équation par dichotomie

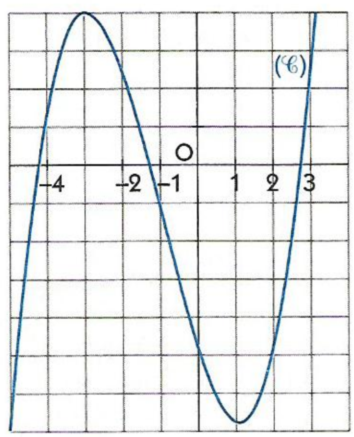
La courbe $(\mathscr{C})$ ci-contre est la représentation graphique de la fonction f définie par : $f(x) = \dfrac{1}{3}x^3 + x^2 - 3x - 5$.

1°) Utiliser ce graphique pour conjecturer le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$ et donner un encadrement à 1 près de chacune de ces solutions.

2°) *a)* Démontrer qu'il existe un nombre réel α tel que : $2 < \alpha < 3$ et $f(\alpha) = 0$.

***b)* Calculer $f\left(\dfrac{2+3}{2}\right)$ et en déduire un nouvel encadrement de α.**

3°) En utilisant la méthode précédente, déterminer de proche en proche un encadrement à 10^{-3} près de α.



Solution

1°) Le graphique permet de conjecturer que l'équation $f(x) = 0$ admet trois solutions α, β et γ telles que : $2 < \alpha < 3$; $-2 < \beta < -1$ et $-5 < \gamma < -4$.

Les nombres α, β et γ sont les abscisses respectives des points d'intersection de $(\mathscr{C})$ et de l'axe (OI).

2°) *a)* Pour tout nombre réel x, on a : $f'(x) = x^2 + 2x - 3$.

$\forall x \in]2\ ;\ 3[$, $f'(x) > 0$; donc, f est strictement croissante sur $]2\ ;\ 3[$.

De plus : $f(2) = -\frac{13}{3}$ et $f(3) = 4$; donc 0 admet un antécédent α et un seul tel que : $2 < \alpha < 3$.

b) On a : $f\left(\frac{2+3}{2}\right) = f(2{,}5) \approx -1{,}041$.

Un raisonnement analogue au précédent nous permet d'en déduire que : $2{,}5 < \alpha < 3$.

3°) On utilise la méthode précédente et on obtient, de proche en proche et avec une calculatrice, les encadrements suivants où a et b désignent les bornes des encadrements successifs :

a	b	$\frac{a+b}{2}$	$f\left(\frac{a+b}{2}\right)$	Encadrement de α
2	3	2,5	– 1,041	$2{,}5 < \alpha < 3$
2,5	3	2,75	1,24	$2{,}5 < \alpha < 2{,}75$
2,5	2,75	2,625	0,045	$2{,}5 < \alpha < 2{,}625$
2,5	2,625	2,562 5	– 0,512	$2{,}5625 < \alpha < 2{,}625$
2,562 5	2,625	2,593 7	– 0,237	$2{,}593\,7 < \alpha < 2{,}625$
2,593 7	2,625	2,609 3	– 0,097	$2{,}609\,3 < \alpha < 2{,}625$
2,609 3	2,625	2,617 1	– 0,026	$2{,}617\,1 < \alpha < 2{,}625$
2,617 1	2,625	2,621 0	0,009	$2{,}617\,1 < \alpha < 2{,}621\,0$
2,617 1	2,621 0	2,619 1	– 0,008	$2{,}619\,1 < \alpha < 2{,}621\,0$
2,617 1	2,621 0	2,620 1	0,000 3	$2{,}619\,1 < \alpha < 2{,}620\,1$

Exercices

2.a Soit f la fonction définie par : $f(x) = -x^3 + 3x^2$.

1. Étudier f et construire sa courbe représentative ($\mathscr{C}$) dans un repère orthonormé (unité : 1 cm sur chaque axe).

2. Démontrer que le point $\Omega\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ est un centre de symétrie de ($\mathscr{C}$). Donner une équation de la tangente à ($\mathscr{C}$) en ce point et tracer cette tangente.

3. Construire, sur le même graphique, la courbe représentative (Γ) de la fonction g définie par : $g(x) = x^2\,|3 - x|$.

2.b Soit f la fonction définie par : $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$.

1. Étudier f et construire sa courbe représentative.

2. Déterminer, graphiquement et suivant les valeurs du nombre réel m, le nombre de solutions de l'équation $f(x) = m$.

2.c Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{x-1}{x+2}$.

1. Étudier f et construire sa courbe représentative ($\mathscr{C}$) dans le plan muni d'un repère orthonormé.

2. Résoudre graphiquement le système d'inéquations : $0 < \frac{x-1}{x+2} < 4$.

Retrouver les résultats par le calcul.

2.d Soit f la fonction définie par :

$f(x) = -x + 1 + \frac{2}{-x+1}$.

1. Étudier f et construire sa courbe représentative ($\mathscr{C}$) dans le plan muni d'un repère orthonormé.

2. Démontrer que le point $\Omega\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ est un centre de symétrie de ($\mathscr{C}$).

3 Fonctions trigonométriques

3.1. Fonctions circulaires

Étude de la fonction sinus

Ensemble de définition

La fonction sinus est définie et continue en tout élément de $\mathbb{R}$.

Ensemble d'étude

La fonction sinus est périodique, de période 2π ; donc il suffit de l'étudier sur $[-\pi ; \pi]$.

La fonction sinus est impaire, donc on peut réduire l'intervalle d'étude à $[0 ; \pi]$.

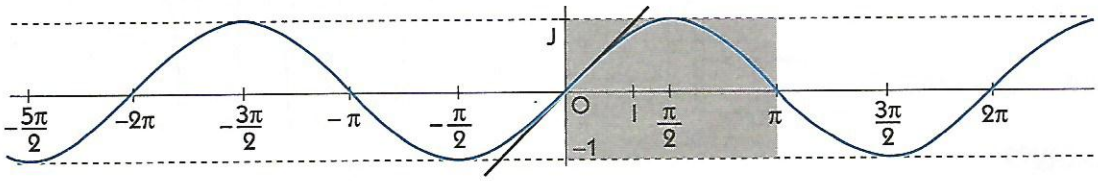
Dérivée et sens de variation

La fonction sinus est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est la fonction cosinus. On en déduit que la fonction sinus est croissante sur $\left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$ et décroissante sur $\left[\frac{\pi}{2} ; \pi\right]$.

Tableau de variation

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
$\cos x$		$+$	0	$-$	
$\sin x$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

Courbe représentative



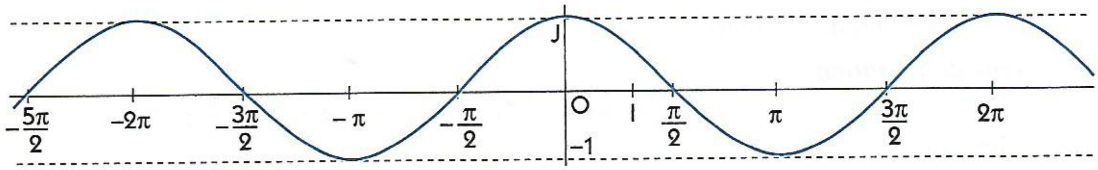
Remarques

- *La courbe représentative de la fonction sinus est une sinusoïde.*
- *Les points de coordonnées $(k\pi ; 0)$, $k \in \mathbb{Z}$, sont les centres de symétrie de la courbe.*
- *Les droites d'équations $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, sont les axes de symétries de la courbe.*
- *La tangente en O à la courbe est la droite d'équation $y = x$. La courbe est au-dessous de cette droite sur $\left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$ et au-dessus sur $\left[-\frac{\pi}{2} ; 0\right]$. (Cf. chapitre 12 § 2.4.)*
- *La fonction sinus n'a de limite ni en $+\infty$, ni en $-\infty$.*

Étude de la fonction cosinus

On a : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$.

On en déduit que la courbe représentative de la fonction cosinus est l'image de la courbe représentative de la fonction sinus par la translation de vecteur $-\frac{\pi}{2}\overrightarrow{OI}$. (Cf. chapitre 9 § 3.2.)



Remarques

- *La courbe représentative de la fonction cosinus est une sinusoïde.*
- *Les points de coordonnées $\left(\frac{\pi}{2} + k\pi ; 0\right)$, $k \in \mathbb{Z}$, sont les centres de symétrie de la courbe.*
- *Les droites d'équations $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, sont les axes de symétries de la courbe.*
- *La fonction cosinus n'a de limite ni en $+\infty$, ni en $-\infty$.*

Étude de la fonction tangente

Ensemble de définition

L'ensemble de définition de la fonction tangente est $\mathbb{R}\backslash\left\{\frac{\pi}{2}+k\,\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$

Cette fonction est continue en tout point de cet ensemble.

Ensemble d'étude

La fonction tangente est périodique, de période π, on peut donc l'étudier sur $\left]-\frac{\pi}{2}\ ;\ \frac{\pi}{2}\right[$.

La fonction tangente est impaire, donc on peut réduire l'intervalle d'étude à $\left[0\ ;\ \frac{\pi}{2}\right[$.

Étude aux bornes de $\left[0\ ;\ \frac{\pi}{2}\right[$

On a : $\lim\limits_{\substack{x \to \frac{\pi}{2} \\ <}} \tan x = +\infty$.

Donc la droite d'équation $x = \frac{\pi}{2}$ est asymptote à la courbe représentative de la fonction tangente.

Dérivée et sens de variation

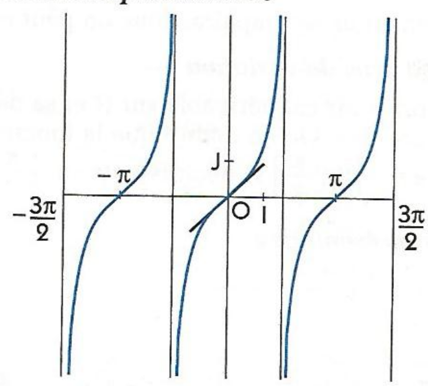
La fonction tangente est dérivable sur son ensemble de définition et sa dérivée est la fonction $x \mapsto 1 + \tan^2 x$.

On en déduit que la fonction tangente est strictement croissante sur $\left[0\ ;\ \frac{\pi}{2}\right[$.

Tableau de variation

x	0	$\frac{\pi}{2}$
$1+\tan^2 x$	$+$	‖
$\tan x$	$0 \nearrow +\infty$	‖

Courbe représentative



Remarques

- *Les points de coordonnées* $(k\,\frac{\pi}{2}\ ;\ 0)$, $k \in \mathbb{Z}$, *sont les centres de symétrie de la courbe.*
- *Les droites d'équations* $x = \frac{\pi}{2} + k\,\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, *sont les asymptotes de la courbe.*
- *La tangente en O à la courbe est la droite d'équation* $y = x$. *La courbe est au-dessus de cette droite sur* $\left[0\ ;\ \frac{\pi}{2}\right[$ *et au-dessous sur* $\left]-\frac{\pi}{2}\ ;\ 0\right]$. *(Cf. chapitre 12 § 2.4.)*

3.2. Exemples d'études de fonctions trigonométriques

Étude de la fonction $f : x \mapsto 2\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$

Ensemble de définition

La fonction f est définie et continue en tout élément de $\mathbb{R}$.

Ensemble d'étude

La fonction f est périodique, de période 4π ; en effet : $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $f(x + 4\pi) = 2\sin\left(\frac{x}{2} + 2\pi + \frac{\pi}{4}\right) = f(x)$.

On peut donc réduire l'étude à l'intervalle $[-2\pi\ ;\ 2\pi]$.

Dérivée et sens de variation

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est la fonction $f' : x \mapsto \cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$.

Étudions le signe de $f'(x)$ pour $x \in [-2\pi\ ;\ 2\pi]$.

$$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{x}{2}+\frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{2} \quad \text{ou} \quad \frac{x}{2}+\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

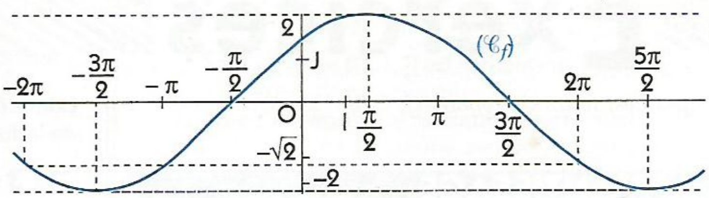
$$\Leftrightarrow \quad x = -\frac{3\pi}{2} \quad \text{ou} \quad x = \frac{\pi}{2}.$$

La fonction f est croissante sur $\left[-\frac{3\pi}{2}\ ;\ \frac{\pi}{2}\right]$, décroissante sur $\left[-2\pi\ ;\ -\frac{3\pi}{2}\right]$ et sur $\left[\frac{\pi}{2}\ ;\ 2\pi\right]$.

Tableau de variation

x	-2π		$-\frac{3\pi}{2}$		$\frac{\pi}{2}$		2π
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\sqrt{2}$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\sqrt{2}$

Courbe représentative



Étude de la fonction $g : x \mapsto 2\sin x + \cos 2x$

Ensemble de définition

La fonction g est définie et continue en tout élément de $\mathbb{R}$.

Ensemble d'étude

La fonction g est périodique, de période 2π ;

en effet : $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $g(x + 2\pi) = 2\sin(x + 2\pi) + \cos(2x + 4\pi) = 2\sin x + \cos 2x = g(x)$.

On peut donc réduire l'étude à l'intervalle $[0 ; 2\pi]$.

Dérivée et sens de variation

La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est la fonction $g' : x \mapsto 2\cos x - 2\sin 2x$.

Étudions le signe de $g'(x)$ pour $x \in [0 ; 2\pi]$.

$g'(x) = 2\cos x + 4\sin x\cos x$

$\quad = 2\cos x\,(1 - 2\sin x)$.

$\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2}$ ou $x = \frac{3\pi}{2}$.

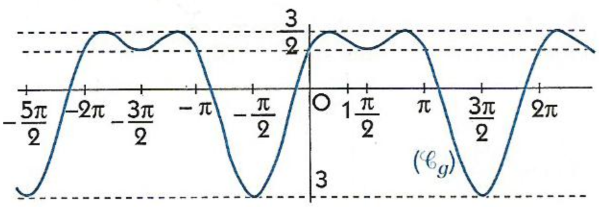
$1 - 2\sin x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6}$ ou $x = \frac{5\pi}{6}$.

x	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{5\pi}{6}$		$\frac{3\pi}{2}$		2π
$\cos x$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$1 - 2\sin x$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Tableau de variation

x	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{5\pi}{6}$		$\frac{3\pi}{2}$		2π
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	1	$\nearrow$	$\frac{3}{2}$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$\frac{3}{2}$	$\searrow$	-3	$\nearrow$	1

Courbe représentative



Démontrer que la droite (Δ), d'équation $y = \frac{\pi}{2}$, est un axe de symétrie de la courbe $(\mathscr{C}_g)$.

Exercices

3.a Déduire, de la courbe représentative de la fonction sinus, la courbe représentative des fonctions suivantes.

a) $x \mapsto \sin\left(x + \frac{5\pi}{3}\right)$; *b)* $x \mapsto \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$;

c) $x \mapsto \sin\left(-\frac{2\pi}{3} - x\right)$; *d)* $x \mapsto \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$;

e) $x \mapsto \cos\left(\frac{5\pi}{6} - x\right)$; *f)* $x \mapsto \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$.

3.b Déduire, de la courbe représentative de la fonction tangente, la courbe représentative des fonctions suivantes.

a) $x \mapsto \tan\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$; *b)* $x \mapsto \tan\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$;

c) $x \mapsto \tan\left(-\frac{\pi}{2} - x\right)$; *d)* $x \mapsto \tan\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + 1$.

3.c Pour tout nombre réel x, exprimer $\cos x + \sin x$ en fonction de $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$.

En déduire la courbe représentative de la fonction $x \mapsto \dfrac{\cos x + \sin x}{\sqrt{2}}$, à partir de celle de la fonction sinus.

Exercices

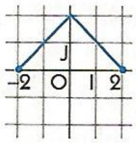
Le plan est muni du repère (O, I, J).

APPRENTISSAGE

Généralités sur les fonctions

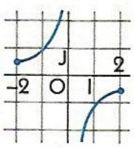
1 Chacune des courbes suivantes est la représentation graphique d'une fonction $f : [-2\ ;\ 2] \to \mathbb{R}$.

a)

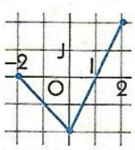


b)

c)

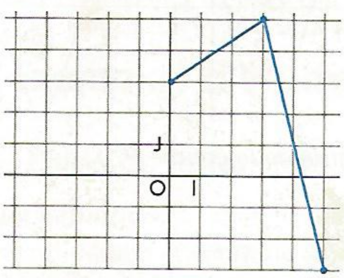


d)



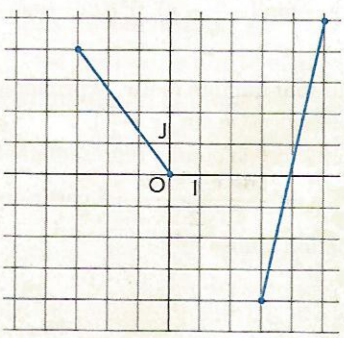
Dans chaque cas, dire si la fonction f est :
- paire ;
- impaire ;
- ni paire, ni impaire.

2 **1.** Voici une partie de la courbe représentative d'une fonction paire, définie sur $[-5\ ;\ 5]$.



Compléter la courbe et donner le tableau de variation de la fonction.

2. Voici une partie de la courbe représentative d'une fonction impaire, définie sur $[-5\ ;\ 5]$.



Compléter la courbe et donner le tableau de variation de la fonction.

3 Dans chacun des cas suivants, étudier la parité de la fonction f sur son ensemble de définition.

a) $f(x) = x - \dfrac{1}{x}$; *b)* $f(x) = \dfrac{7 + x^2}{3x^2 - 2}$;
c) $f(x) = x\,|x|$; *d)* $f(x) = x^2\,|x|$;
e) $f(x) = |x - 2| + |x + 2|$; *f)* $f(x) = |x + 3| - |x - 3|$.

4 Dans chacun des cas suivants, étudier la parité de la fonction f sur son ensemble de définition.

a) $f(x) = \cos 3x$; *b)* $f(x) = \sin 4x$;
c) $f(x) = \sin 2x \cos x$; *d)* $f(x) = \sin 3x \sin 2x$;
e) $f(x) = 1 + \cos x$; *f)* $f(x) = \sin x - 1$;
g) $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$; *h)* $f(x) = \dfrac{\cos x}{x}$;
i) $f(x) = \dfrac{\cos x - 1}{5 - 2\cos x}$; *j)* $f(x) = \dfrac{\sin x}{\sin^3 x - 1}$.

5 Les fonctions suivantes sont-elles périodiques ? Si oui, en préciser une période.

a) $x \mapsto \sin^2 x$; *b)* $x \mapsto x - \sin x$;
c) $x \mapsto \sin(x^2)$; *d)* $x \mapsto \sin x + \sin 2x$;
e) $x \mapsto \dfrac{1}{1 + \sin x}$; *f)* $x \mapsto \cos^2\left(\dfrac{x}{2}\right)$.

6 Le repère (O, I, J) est orthogonal.
a) Tracer la courbe représentative de la fonction f, définie par : $f(x) = |x + 1| + |x + 5|$.
b) Démontrer que cette courbe admet un axe de symétrie.

7 Le repère (O, I, J) est orthogonal.
Démontrer que la droite d'équation $x = \dfrac{1}{2}$ est un axe de symétrie de la courbe représentative de la fonction g, définie par : $g(x) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{1 - x}$.

8 Le point $\Omega\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$ est-il un centre de symétrie des courbes d'équations suivantes ?

a) $y = 3 + \dfrac{1}{x - 2}$; *b)* $y = 3(x - 2)^2$;
c) $y = \dfrac{2 - x}{3}$; *d)* $y = \dfrac{1}{(x - 2)^3} + 3$.

Fonctions polynômes

9 Dans chacun des cas suivants, étudier la fonction f et tracer sa courbe représentative.

a) $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$; *b)* $f(x) = -x^2 + 3x$;
c) $f(x) = -\dfrac{1}{3}x^3 + x + 2$; *d)* $f(x) = \dfrac{1}{3}x^3 - 4x - 1$.

10 Le repère (O, I, J) est orthogonal.
a) Tracer la courbe représentative de la fonction :
$$x \mapsto x^2 - 6x + 5.$$
b) En déduire la courbe représentative de la fonction :
$$x \mapsto |x^2 - 6x + 5|.$$

11 Le repère (O, I, J) est orthogonal.
a) Tracer la courbe représentative de la fonction :
$x \mapsto -x^2 + 2x$.
b) En déduire la courbe représentative de la fonction :
$x \mapsto -x^2 + 2|x|$.

12 Étudier et tracer la courbe représentative des fonctions suivantes.
a) $x \mapsto -x^3 + x^2 + 5x$; *b)* $x \mapsto 2x^3 + x$;
c) $x \mapsto \max(-x^3 + x^2 + 5x\ ;\ 2x^3 + x)$.

13 **1.** Déterminer les nombres réels a, b et c pour que la parabole d'équation $y = ax^2 + bx + c$:
- passe par le point $A\begin{pmatrix}0\\-3\end{pmatrix}$;
- ait un sommet d'abscisse -1 ;
- admette, au point d'abscisse 1, une tangente de coefficient directeur 4.

2. Construire les courbes représentatives $(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{C}')$ des fonctions f et g respectivement définies par :
$f(x) = x^2 + 2x - 3$ et $g(x) = 1 - x^2$.
Déterminer les coordonnées des points d'intersection, B et D, de $(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{C}')$.
3. Donner une équation de la droite (BD).
4. Étudier graphiquement le signe de :
$P(x) = x^2 + 2x - 3 - (1 - x^2)$.

Fonctions rationnelles

14 Dans chacun des cas suivants, étudier la fonction f et tracer sa courbe représentative.
a) $f(x) = 1 - \dfrac{1}{x-2}$; *b)* $f(x) = \dfrac{2x+1}{3x+2}$;
c) $f(x) = x - 1 - \dfrac{2}{x}$; *d)* $f(x) = x - 2 - \dfrac{2}{x+3}$.

15 Le repère (O, I, J) est orthogonal.
a) Tracer la courbe représentative de la fonction :
$x \mapsto \dfrac{-2x+3}{x+2}$.
b) En déduire la courbe représentative de la fonction :
$x \mapsto \dfrac{2x+3}{-x+2}$.

16 Soit f la fonction définie par : $f(x) = \dfrac{1-4x^2}{2-x}$.
a) Déterminer les nombres réels a, b et c tels que :
$\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{2\},\ f(x) = ax + b + \dfrac{c}{2-x}$.
b) Étudier la fonction f et tracer sa courbe représentative.

17 Soit g la fonction définie par : $g(x) = \dfrac{2x^2+2x-1}{2x-1}$.
a) Déterminer les nombres réels a', b' et c' tels que :
$\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{\frac{1}{2}\},\ g(x) = a'x + b' + \dfrac{c'}{2x-1}$.
b) Étudier la fonction g et tracer sa courbe représentative.

18 **1.** Déterminer les nombres réels a, b et c pour que l'hyperbole $(\mathscr{H})$ d'équation $y = \dfrac{ax+b}{x+c}$.
- ait le point $\Omega\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$ comme centre de symétrie ;
- admette, au point d'abscisse 1, une tangente parallèle à la droite d'équation $y = -x$.

2. Construire $(\mathscr{H})$.

Fonctions trigonométriques

19 Le repère (O, I, J) est orthonormé.
Soit la fonction $f : x \mapsto \cos 2x$.
a) Étudier f et construire sa courbe représentative $(\mathscr{C}_f)$.
b) Déduire de $(\mathscr{C}_f)$ la courbe représentative des fonctions suivantes :
$f_1 : x \mapsto \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$; $f_2 : x \mapsto \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) + 1$.

20 Le repère (O, I, J) est orthonormé.
Soit la fonction $g : x \mapsto \sin 3x$.
a) Étudier g et construire sa courbe représentative $(\mathscr{C}_g)$.
b) Déduire de $(\mathscr{C}_g)$ la courbe représentative des fonctions suivantes :
$g_1 : x \mapsto \sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right)$; $g_2 : x \mapsto 2 + \sin\left(\frac{\pi}{4} - 3x\right)$.

21 Le repère (O, I, J) est orthonormé.
Soit f la fonction définie par : $f(x) = 4\sin^2 x . \cos 2x$.
On désigne par $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de f.
1. *a)* Démontrer que f est périodique, de période π.
b) Démontrer que la droite d'équation $x = \frac{\pi}{2}$ est un axe de symétrie de $(\mathscr{C})$.
2. *a)* Démontrer que :
$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = 4\sin 2x\,(1 - 4\sin^2 x)$.
b) Dresser le tableau de variation de f sur $\left[0\ ;\ \frac{\pi}{2}\right]$.
3. Tracer $(\mathscr{C})$ sur $\left[-\frac{3\pi}{2}\ ;\ \frac{3\pi}{2}\right]$.

22 Le repère (O, I, J) est orthonormé.
Soit f la fonction définie par : $f(x) = 2\sin x + \sin 2x$.
On désigne par $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de f.
1. Démontrer que f est impaire et périodique, de période 2π.
2. Démontrer que :
$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = 2\,(2\cos x - 1)(\cos x + 1)$.
3. Dresser le tableau de variation de f sur $[0\ ;\ \pi]$.
4. Tracer $(\mathscr{C})$ sur $\left[-\frac{7\pi}{3}\ ;\ \frac{7\pi}{3}\right]$.

23 Le repère (O, I, J) est orthonormé.
Soit f la fonction définie par : $f(x) = -2\cos x - \frac{1}{2}\cos 2x$.
On désigne par $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de f.
1. Démontrer que f est paire et périodique, de période 2π.
2. Démontrer que : $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = 2\sin x\,(1 + \cos x)$.
3. Dresser le tableau de variation de f sur $[0\ ;\ \pi]$.
4. Tracer $(\mathscr{C})$ sur $\left[-\frac{7\pi}{3}\ ;\ \frac{7\pi}{3}\right]$.

APPROFONDISSEMENT

24 Soit f et g deux fonctions definies sur $\mathbb{R}$.
Étudier la parité du produit fg dans les cas suivants.
a) les fonctions f et g sont paires ;
b) les fonctions f et g sont impaires ;
c) l'une est paire et l'autre impaire.

25 Soit f une fonction, dont l'ensemble de dérivabilité est $\mathbb{R}$, et f' sa fonction dérivée.
1. Démontrer que si f est paire, alors f' est impaire.
2. Démontrer que si f est impaire, alors f' est paire.
3. Démontrer que si f est périodique de période p, alors f' est périodique de période p.

26 Le repère (O, I, J) est orthonormé.
On considère une fonction f dont l'ensemble de dérivabilité est $\mathbb{R}$, $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative et $(\mathscr{C}')$ la courbe représentative de sa fonction dérivée.

1. Démontrer que si le point $\Omega\binom{a}{b}$ est un centre de symétrie de $(\mathscr{C})$, alors la droite (Δ) d'équation $x = a$ est un axe de symétrie de $(\mathscr{C}')$.

2. Démontrer que si la droite (Δ) d'équation $x = a$ est un axe de symétrie de $(\mathscr{C})$, alors le point $\Omega\binom{a}{0}$ est un centre de symétrie de $(\mathscr{C}')$.

(On pourra utiliser l'exercice précédent.)

27 On considère la fonction $f : x \mapsto x^3 + px + 2$ et on désigne par $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative.

1. Démontrer que $\Omega\binom{0}{2}$ est un centre de symétrie de $(\mathscr{C})$.

2. Déterminer p sachant que la droite (OI) est tangente à $(\mathscr{C})$, puis construire $(\mathscr{C})$.

28 On considère la fonction $f : x \mapsto ax + b + \frac{1}{x}$.

1. Déterminer a et b pour que la représentation graphique $(\mathscr{C})$ de f passe par le point $A\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}\\ 2\sqrt{2}-1\end{pmatrix}$ et admette, en ce point, une tangente parallèle à l'axe des abscisses.

2. Démontrer que $\Omega\binom{0}{-1}$ est un centre de symétrie de $(\mathscr{C})$.

3. Étudier f et tracer $(\mathscr{C})$.

29 Le repère (O, I, J) est orthonormé.
On considère les paraboles $(\mathscr{P}_a)$ d'équations
$y = \frac{1}{2}x^2 + 2ax - 2a(1 - a)$, $(a \in \mathbb{R}.)$

1. Démontrer que, pour tout nombre réel a, $(\mathscr{P}_a)$ est l'image de $(\mathscr{P}_0)$ par la translation de vecteur $-2a\,(\overrightarrow{OI} + \overrightarrow{OJ})$.

2. Construire les paraboles $(\mathscr{P}_0)$, $(\mathscr{P}_1)$ et $(\mathscr{P}_2)$.

3. Déterminer la courbe décrite par les sommets S_a des paraboles $(\mathscr{P}_a)$.

4. Déterminer une droite (Δ) tangente à toutes les paraboles $(\mathscr{P}_a)$.

30 On considère les fonctions $f_a : x \mapsto ax^3 - 3x + 1$, $a \in \mathbb{R}$.
On désigne par $(\mathscr{C}_a)$ la courbe représentative de f_a.

1. Étudier et représenter graphiquement f_a, pour $a = \frac{1}{2}$ et $a = 0$.

2. Démontrer que les courbes $(\mathscr{C}_a)$ passent toutes par un même point Ω, dont on déterminera les coordonnées.

3. Démontrer que Ω est centre de symétrie de toutes les courbes $(\mathscr{C}_a)$.

4. Étudier, suivant les valeurs de a, les variations de f_a.

31 Le repère (O, I, J) est orthonormé.
Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{2x - 3}{x + 2}$ et $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative.

1. Trouver les deux droites asymptotes à $(\mathscr{C})$ et le centre de symétrie Ω de $(\mathscr{C})$.

2. Tracer $(\mathscr{C})$ et ses deux asymptotes.

3. Pour tout point M de $(\mathscr{C})$, on désigne par :
– (Δ_M) la tangente en M à $(\mathscr{C})$,
– P et Q les points d'intersection de (Δ_M) avec les asymptotes.

Démontrer que le produit $\overline{\Omega P} \times \overline{\Omega Q}$ est constant et que M est le milieu du segment [PQ].

32 Le repère (O, I, J) est orthonormé.
Soit $(\mathscr{P})$ la parabole d'équation $y = \frac{x^2}{4}$.

1. Construire $(\mathscr{P})$, placer le point $F\binom{0}{1}$ et tracer la droite (Δ) d'équation $y = -1$.

2. On considère un point M de $(\mathscr{P})$ et H son projeté orthogonal sur la droite (Δ). Comparer MH et MF. En déduire une propriété géométrique de la parabole.

33 Une entreprise fabrique n articles par mois. Les charges se répartissent en charges fixes d'un montant de 750 000 F par mois et en charges variables d'un montant de 1 200 F par article et par mois.

1. Exprimer en fonction de n le prix de revient r d'un article.

2. *a)* Étudier la fonction $x \mapsto 1\,200 + \dfrac{750\,000}{x}$.

b) Le repère du plan étant orthogonal, tracer sa courbe représentative sur [500 ; 1 500].

c) Construire, sur le même graphique, la droite d'équation $y = 2\,000$.

3. Chaque article est vendu 2 000 F.
Déterminer le nombre minimum d'articles à produire, pour que l'entreprise soit rentable.

4. Retrouver graphiquement ce résultat.

34 Le repère (O, I, J) est orthogonal.

1. Soit f la fonction $x \mapsto 2x^3 - 60x^2 + 450\,x$ et $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative.

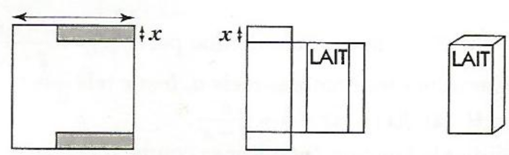
a) Dresser le tableau de variation de f.

b) Déterminer une équation de la tangente (Δ) en O à $(\mathscr{C})$.

c) Calculer $f(5)$, $f(10)$, $f(15)$ et $f(20)$. Tracer $(\mathscr{C})$ et (Δ). *(Prendre 1 cm pour représenter 2 unités sur l'axe des abscisses et 100 unités sur l'axe des ordonnées.)*

d) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $f(x) = 500$.

2. Un fabricant envisage la production de boîtes de lait en cartons obtenues en découpant deux bandes de même largeur dans une feuille carrée, comme l'indique la figure ci-dessous.



Le côté de la feuille mesure 30 cm et on désigne par x la largeur en cm des bandes découpées.

a) Calculer les dimensions de la boîte et son volume lorsque $x = 10$.

b) On suppose maintenant que : $0 < x < 15$. Exprimer, en fonction de x et en cm³, le volume $V(x)$ de la boîte. Vérifier que $V(x) = 2x^3 - 60x^2 + 450x$.

c) Pour quelle valeur de x le volume $V(x)$ est-il maximal ? Calculer ce volume maximal.

d) Le fabricant veut obtenir des boîtes de 500 cm³. Quelle valeur doit-il donner à x ?

15 Suites numériques

Introduction

Les suites numériques se retrouvent dans de nombreux domaines de la vie : arts, économie, biologie... Grâce à la diversité de leurs applications, elles présentent un grand intérêt pour les mathématiciens. Les suites ont également un intérêt historique ; en effet, ce sont elles qui ont provoqué le premier choc des mathématiciens avec l'infini.

Qui ne connaît les célèbres paradoxes de Zénon, philosophe né en 490 ou 485 av. J.-C. à Élée, grande Grèce ?

Le paradoxe d'« Achille et la tortue » peut être mathématisé de la façon suivante.
« Achille veut rattraper une tortue qui est 100 m devant lui en courant 10 fois plus vite que n'avance la tortue. Lorsque Achille a parcouru 100 m, la tortue en a parcouru 10 ; lorsque Achille a parcouru ces 10 m, la tortue en a parcouru 1, ...
Achille arrivera-t-il à rattraper la tortue et quelle distance aura-t-il alors parcouru ? ».
Les distances successives séparant Achille de la tortue forment une suite de nombres dont l'étude mathématique permet de résoudre ce paradoxe (cf. exercice n° 40).

Photo Jean-Loup Charmet

Zénon d'Élée,
gravure du XVII^e siècle.

SOMMAIRE

1 Généralités

1.1. Définition

Introduction

• On lâche un ballon d'une hauteur de 4 mètres au-dessus du sol où il rebondit.

On suppose que la hauteur de chaque rebond est la moitié de la hauteur du rebond précédent.

– Compléter le tableau ci-contre.

– Calculer la hauteur du 10^e rebond.

Rebond	0	1	2	3	4	5	6
Hauteur (en cm)	400	200					

À tout entier naturel, numéro d'ordre du rebond, on associe un nombre réel, la hauteur de ce rebond.

• Voici les quatre premiers termes d'une liste de nombres : $\frac{1}{3}$; $\frac{4}{5}$; $\frac{9}{7}$; $\frac{16}{9}$; ...

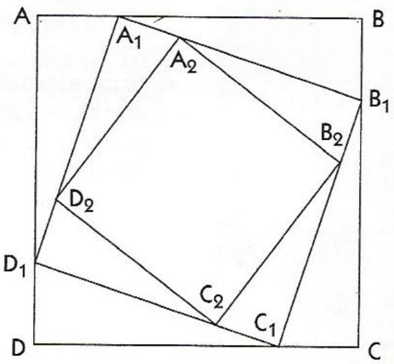
– Compléter cette liste jusqu'au 10^e terme.

– Exprimer, pour tout entier naturel n non nul, le $n^{\text{ième}}$ terme en fonction de n.

– Calculer le 20^e et le 32^e terme de la liste.

– Les nombres réels $\frac{625}{51}$ et $\frac{49}{21}$ sont-ils des termes de cette liste ?

• ABCD est un carré de côté 8.



$A_1B_1C_1D_1$ est le carré inscrit dans ABCD tel que :
$AA_1 = BB_1 = CC_1 = DD_1 = \frac{AB}{4}$.

$A_2B_2C_2D_2$ est le carré inscrit dans $A_1B_1C_1D_1$ tel que :
$A_1A_2 = B_1B_2 = C_1C_2 = D_1D_2 = \frac{A_1B_1}{4}$.

– Construire, de manière analogue, les carrés $A_3B_3C_3D_3$ et $A_4B_4C_4D_4$.

– Pour tout entier naturel n non nul, on désigne par P_n le périmètre du carré $A_nB_nC_nD_n$.

Exprimer P_{n+1} en fonction de P_n.

Calculer P_1, P_2, P_3, P_4.

– Conjecturer l'expression de P_n en fonction de l'entier naturel n.

Dans les trois exemples précédents, on a associé des nombres réels à des entiers naturels. On définit ainsi des suites numériques.

Définition

On appelle suite numérique, toute fonction de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{R}$.

Notations et vocabulaire

• Si E désigne l'ensemble de définition d'une suite numérique u, on a les notations suivantes.

– notation fonctionnelle

$u : E \to \mathbb{R}$.

$n \mapsto u(n)$.

– notation indicielle

$(u_n)_{n \in E}$ ou, plus simplement, (u_n).

• $u(n)$ ou u_n est appelé terme d'indice n ou terme général ; le $n^{\text{ième}}$ terme est appelé terme de rang n.

Déterminations d'une suite numérique

En général, une suite numérique (u_n) est déterminée par :

- ou bien une formule explicite permettant de calculer u_n en fonction de n ;
- ou bien le premier terme et une formule de récurrence exprimant u_n en fonction de u_{n-1}.

Exemples

- Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par : $u_n = \dfrac{2n+1}{n+2}$.

– Cette suite est déterminée par une formule explicite.

– Le terme général de cette suite est : $\dfrac{2n+1}{n+2}$.

– Le premier terme est : $u_0 = \dfrac{1}{2}$; le 15^{e} terme, ou terme de rang 15, est : $u_{14} = \dfrac{29}{16}$.

- Soit $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite de terme général : $v_n = \sqrt{n^2 - 1}$.

– Cette suite est déterminée par une formule explicite.

– Le premier terme est : $v_1 = 0$; le 3^{e} terme est : $v_3 = 2\sqrt{2}$.

- Soit $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par : $\begin{cases} w_0 = 0 \\ \forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ w_n = -\dfrac{1}{2}\, w_{n-1} + 3. \end{cases}$

– Cette suite est définie par son premier terme et une formule de récurrence.

– On a : $w_1 = 3$; $w_2 = \dfrac{3}{2}$; $w_3 = \dfrac{9}{4}$; ...

1.2. Représentations graphiques d'une suite numérique

Une suite numérique est une fonction, donc elle peut être représentée graphiquement dans le plan muni d'un repère.

Il est également possible de représenter les termes d'une suite sur un axe.

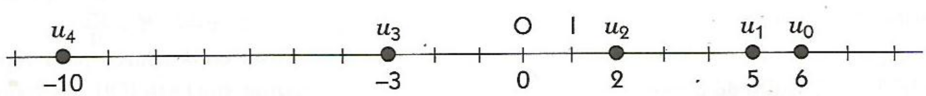
Suites définies par une formule explicite

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite de terme général : $u_n = 6 - n^2$.

Représentation sur un axe

On a : $u_0 = 6$; $u_1 = 5$; $u_2 = 2$; $u_3 = -3$; $u_4 = -10$; ...

On en déduit une représentation graphique de cette suite sur un axe.



Représentation dans le plan

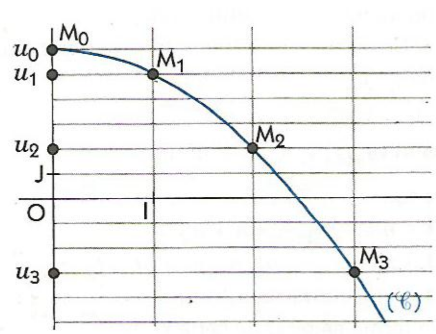
Le plan est muni du repère (O, I, J).

Soit $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de la fonction $f : x \mapsto 6 - x^2$.

Pour tout entier naturel n, on désigne par M_n le point de coordonnées $(n, f(n))$.

L'ensemble des points M_n est une représentation graphique de la suite (u_n) dans le plan.

Lorsqu'on projette les points M_n sur l'axe des ordonnées, on obtient une représentation des termes de la suite sur l'axe (OJ).



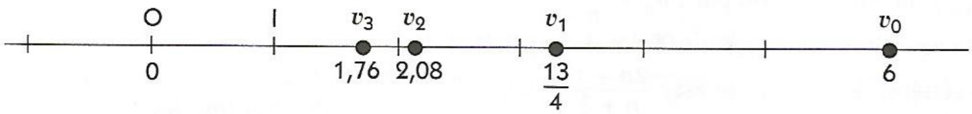
Suites définies par une formule de récurrence

- Soit $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par : $\begin{cases} v_0 = 6 \\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(v_n + \dfrac{3}{v_n}\right). \end{cases}$

Représentation sur un axe

On a : $v_0 = 6$; $v_1 = \dfrac{13}{4}$; $v_2 = \dfrac{217}{104} \approx 2{,}08$; $v_3 \approx 1{,}76$; ...

On en déduit une représentation graphique de cette suite sur un axe.



Représentation dans le plan

Le plan est muni du repère orthonormé (O, I, J).
Soit $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de la fonction $g : x \mapsto \dfrac{1}{2}\left(x + \dfrac{3}{x}\right)$
et (Δ) la droite d'équation $y = x$.

Construction de v_1

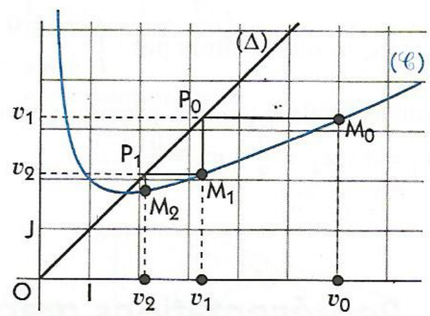
Soit M_0 le point de $(\mathscr{C})$ d'abscisse $v_0 = 6$;
l'ordonnée de M_0 est $v_1 = g(v_0)$.

Soit P_0 le point de (Δ) d'ordonnée v_1 ;
l'abscisse de P_0 est v_1.

Construction de v_2

Soit M_1 le point de $(\mathscr{C})$ d'abscisse v_1 ;
l'ordonnée de M_1 est $v_2 = g(v_1)$.

Soit P_1 le point de (Δ) d'ordonnée v_2 ;
l'abscisse de P_1 est v_2.



Cette méthode permet une construction, de proche en proche sur l'axe (OI), des termes d'une suite définie par une formule de récurrence.

Exercices

1.a Voici les 4 premiers termes d'une suite numérique : $\dfrac{1}{3}$; $\dfrac{4}{9}$; $\dfrac{7}{27}$; $\dfrac{10}{81}$; ...

1. Conjecturer les 2 termes suivants de cette suite.
2. Conjecturer une formule explicite donnant le terme de rang n de cette suite.

1.b Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite de terme général :
$u_n = \cos\left(\dfrac{n\pi}{4}\right)$.

1. Calculer et représenter sur un axe les 8 premiers termes de cette suite.
2. Démontrer que, pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+8} = u_n$.

1.c Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par :
$\begin{cases} u_0 = \dfrac{1}{3} \\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = n + u_n. \end{cases}$

1. Calculer u_1, u_2, u_3, u_4 et u_5.
2. Conjecturer une formule explicite donnant le terme général de cette suite.

1.d Le plan est muni du repère (O, I, J).
Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite de terme général :
$u_n = -1 + \dfrac{n^2}{9}$.

1. Construire la courbe représentative de la fonction $f : x \mapsto -1 + \dfrac{x^2}{9}$.
2. Utiliser cette courbe pour représenter, dans le plan et sur l'axe (OJ), les 7 premiers termes de cette suite.

1.e Le plan est muni du repère orthonormé (O, I, J).
Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par :
$\begin{cases} u_0 = \dfrac{3}{2} \\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 4 - u_n. \end{cases}$

1. Calculer les 4 premiers termes de cette suite et conjecturer une expression de son terme général.
2. Construire les droites $(\mathscr{D})$ et (Δ) d'équations respectives $y = -x + 4$ et $y = x$; en déduire une construction des 4 premiers termes de cette suite sur l'axe (OI).

2 Étude d'une suite numérique

2.1. Minoration, majoration

Les suites numériques sont des fonctions ; on peut donc leur appliquer les définitions concernant la minoration et la majoration d'une fonction.

Définitions

Soit $(u_n)_{n \in E}$ une suite numérique.

- **(u_n) est minorée s'il existe un nombre réel m tel que, pour tout n élément de E, on a : $u_n \geq m$.**
- **(u_n) est majorée s'il existe un nombre réel M tel que, pour tout n élément de E, on a : $u_n \leq M$.**
- **(u_n) est bornée si elle est à la fois minorée et majorée.**

On dit que m est un minorant de (u_n) et M est un majorant de (u_n).

Remarque

Une suite est positive (respectivement négative) si elle est minorée (respectivement majorée) par 0.

Exemples

• Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite de terme général : $\frac{3n}{n+1}$.

– La suite (u_n) est positive.

– La suite (u_n) est majorée par 3.

En effet, on a : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n - 3 = -\frac{3}{n+1}$;

donc : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n < 3$.

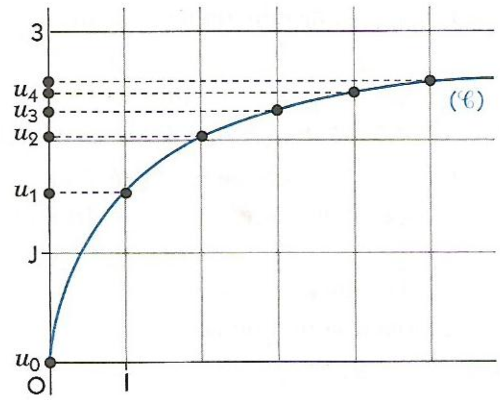
– On en déduit que la suite (u_n) est bornée :

$\forall\, n \in \mathbb{N},\ 0 \leq u_n < 3$.

Ces résultats sont illustrés sur la figure ci-contre.

$(\mathscr{C})$ est la courbe représentative, dans l'intervalle $[0 ; +\infty[$, de la fonction $f : x \mapsto \frac{3x}{x+1}$.

$(\mathscr{C})$ est « entre » les droites d'équations $y = 0$ et $y = 3$.



• Soit $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite de terme général : $n^2 - 2n - 2$.

On a : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ v_n = (n-1)^2 - 3$.

– On en déduit que la suite (v_n) est minorée par -3.

– Démontrons par l'absurde que (v_n) n'est pas majorée.

S'il existait un majorant M de (v_n), on aurait :

$\forall\, n \in \mathbb{N},\ (n-1)^2 \leq M + 3$.

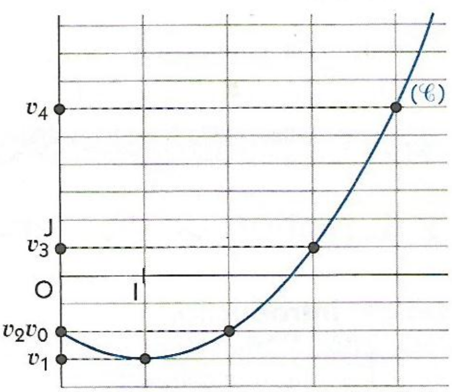
Or, cette inégalité n'est pas vérifiée pour : $n > \sqrt{M+3} + 1$.

– La suite (v_n) n'est pas bornée.

Ces résultats sont illustrés sur la figure ci-contre.

$(\mathscr{C})$ est la courbe représentative, dans l'intervalle $[0 ; +\infty[$, de la fonction $g : x \mapsto x^2 - 2x - 2$.

$(\mathscr{C})$ est « au-dessus » de la droite d'équation $y = -3$.



• Soit $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par : $\begin{cases} w_0 = 1 \\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ w_{n+1} = \sin w_n. \end{cases}$

On a : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ -1 \leq w_n \leq 1$. Donc la suite (w_n) est bornée.

2.2. Sens de variation

Les suites numériques sont des fonctions ; on peut donc reprendre les définitions concernant le sens de variation d'une fonction.

Soit $(u_n)_{n \in E}$ une suite numérique.
- La suite (u_n) est croissante lorsque, pour tous m et n éléments de E, on a : $m < n \Rightarrow u_m \leq u_n$.
- La suite (u_n) est décroissante lorsque, pour tous m et n éléments de E, on a : $m < n \Rightarrow u_m \geq u_n$.
- La suite (u_n) est constante lorsque, pour tous m et n éléments de E, on a : $u_m = u_n$.
- La suite (u_n) est monotone lorsqu'elle est soit croissante, soit décroissante.

Pour étudier le sens de variation d'une suite, on utilise la propriété suivante que nous admettons.

Propriété

Soit $(u_n)_{n \in E}$ une suite numérique.
- **Si pour tout n élément de E $u_n \leq u_{n+1}$, alors la suite (u_n) est croissante.**
- **Si pour tout n élément de E $u_n \geq u_{n+1}$, alors la suite (u_n) est décroissante.**
- **Si pour tout n élément de E $u_n = u_{n+1}$, alors la suite (u_n) est constante.**

Exemples

• Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite de terme général : $\dfrac{1}{n\,(n+1)}$.

On a : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{(n+1)(n+2)} - \dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{-2}{n(n+1)(n+2)}$.

Donc : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} - u_n < 0$; la suite (u_n) est décroissante.

• Soit $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite de terme général : $n - \sqrt{n^2 + 1}$.

On a : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} - v_n = n + 1 - \sqrt{(n+1)^2 + 1} - n + \sqrt{n^2 + 1}$
$= 1 - \sqrt{(n+1)^2 + 1} + \sqrt{n^2 + 1}$.

Le signe de cette expression est difficile à étudier ; nous utiliserons dans ce cas une autre méthode.

Soit f la fonction définie par : $f(x) = x - \sqrt{x^2 + 1}$.

On a : $\forall\, x \in \mathbb{R},\ f'(x) = 1 - \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} = \dfrac{1}{(\sqrt{x^2 + 1} + x)\sqrt{x^2 + 1}}$.

La dérivée de la fonction f est positive sur $]0\,;+\infty[$, donc f est croissante sur cet intervalle.

On en déduit que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ f(n+1) > f(n)$; la suite (v_n) est croissante.

• Soit $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par : $\begin{cases} w_0 = -1 \\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ w_{n+1} = w_n^{\,2} + w_n + 1. \end{cases}$

On a : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ w_{n+1} - w_n = w_n^{\,2} + 1$.

Donc, $\forall\, n \in \mathbb{N},\ w_{n+1} - w_n > 0$; la suite (w_n) est croissante.

2.3. Notion de convergence

Introduction

• Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = 4 \\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sqrt{u_n}. \end{cases}$

On se propose d'étudier le comportement de cette suite lorsque n prend des valeurs « de plus en plus grandes ».

Approche numérique

– Afficher le nombre 4 sur une calculatrice.

– À l'aide de la touche $\boxed{\sqrt{}}$ calculer les 15 premiers termes de la suite (u_n).

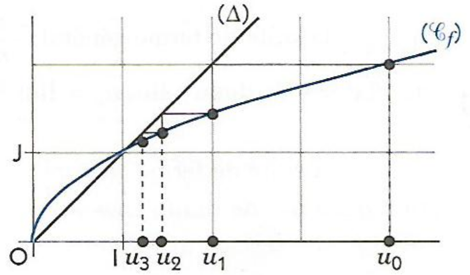
On peut remarquer que si on continue d'appuyer sur la touche $\boxed{\sqrt{}}$ un grand nombre de fois, la calculatrice affiche le nombre 1.

Approche graphique

Le plan est muni du repère orthonormé (O, I, J).

On désigne par $(\mathscr{C}_f)$ la représentation graphique de la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x}$ et par (Δ) la droite d'équation $y = x$.

Le graphique permet de conjecturer que lorsque n prend des valeurs « de plus en plus grandes », les termes de la suite se rapprochent de 1, ce qui confirme le résultat obtenu avec la calculatrice.



On dit que u_n tend vers 1 lorsque n tend vers $+\infty$ ou que la suite (u_n) a pour limite 1.

On note : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1$.

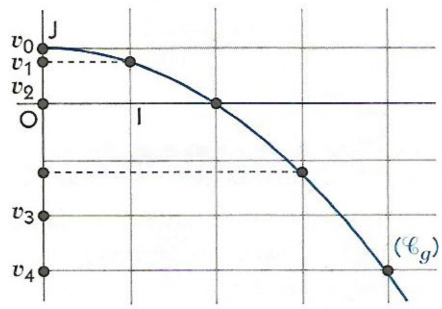
• Soit $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite de terme général : $1 - \frac{1}{4}n^2$.

Le plan est muni du repère (O, I, J).

On désigne par $(\mathscr{C}_g)$ la représentation graphique de la fonction $g : x \mapsto 1 - \frac{1}{4}x^2$.

On a : $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$.

On admet que : $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = -\infty$.



• Soit $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite de terme général : $(-1)^n$.

Pour tout nombre entier naturel n pair, on a : $w_n = 1$.

Pour tout nombre entier naturel n impair, on a : $w_n = -1$.

On admet que w_n n'a pas de limite lorsque n tend vers $+\infty$.

On a vu dans les exemples précédents que :

– la suite (u_n) a une limite finie, on dit qu'elle est convergente ;

– la suite (v_n) a une limite infinie, on dit qu'elle est divergente ;

– la suite (w_n) n'a pas de limite, on dit qu'elle est divergente.

Définitions et propriété

Définitions

- **Une suite est convergente si elle a une limite finie.**
- **Une suite est divergente si elle n'est pas convergente.**

On admet la propriété suivante concernant les suites définies par une formule explicite.

Propriété

Soit (u_n) une suite numérique définie par $u_n = f(n)$, où f est une fonction numérique.

Si f a une limite en $+\infty$, alors u_n a une limite et on a : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

Remarques

- *Les règles de calculs sur les limites de fonctions s'appliquent aux suites.*
- *On admet que si une suite a une limite, cette limite est unique.*
- *Si la fonction f n'a pas de limite en + ∞, on ne peut rien conclure sur l'éventuelle limite de (u_n).*

Exemples

- Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite de terme général $\frac{-2n+1}{n+2}$ et f la fonction définie par : $f(x) = \frac{-2x+1}{x+2}$.

On a : $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -2$; donc : $\lim_{n \to +\infty} u_n = \lim_{n \to +\infty} f(n) = -2$.

- Soit $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite de terme général $\sin(\pi n)$ et g la fonction définie par : $g(x) = \sin \pi x$.

La fonction g n'a pas de limite en $+\infty$.
Par contre, la suite (v_n) est une suite constante dont tous les termes sont nuls ; elle a pour limite 0.

- Soit $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite de terme général $\sqrt{n^4 + 3n^2 + 1}$ et h la fonction définie par :

$h(x) = \sqrt{x^4 + 3x^2 + 1}$.
On a : $\lim_{x \to +\infty} h(x) = +\infty$; donc : $\lim_{n \to +\infty} w_n = +\infty$.

Exercices

2.a Déterminer, s'ils existent, un minorant et un majorant des suites définies par :
a) $u_n = -n^2 + 1$, $n \in \mathbb{N}$;
b) $v_n = 2 - \frac{1}{2n}$, $n \in \mathbb{N}^*$;
c) $w_n = -1 + 2\sqrt{n}$, $n \in \mathbb{N}$.

2.b Étudier le sens de variation des suites définies par :
a) $u_n = -n^2 + 1$, $n \in \mathbb{N}$;
b) $v_n = 2 - \frac{1}{2n}$, $n \in \mathbb{N}^*$;
c) $w_n = \sqrt{\frac{n+2}{n+1}}$, $n \in \mathbb{N}$.

2.c Déterminer, si elles existent, les limites des suites définies par :
a) $u_n = \frac{3n^2 + 1}{5n^2 + n + 1}$, $n \in \mathbb{N}$;
b) $v_n = \frac{1}{n} \sin \frac{n\pi}{4}$, $n \in \mathbb{N}^*$;
c) $w_n = \sqrt{\frac{n+2}{n+1}}$, $n \in \mathbb{N}$.

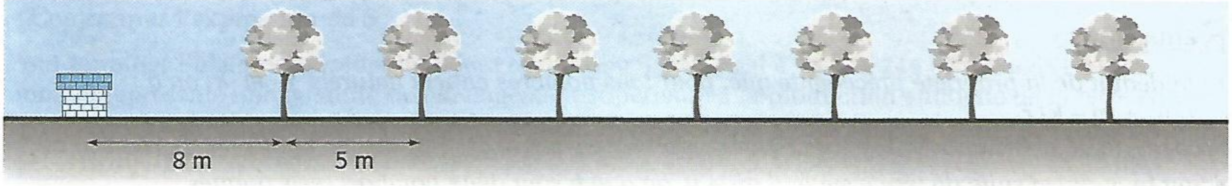
2.d Le plan est muni du repère orthonormé (O, I, J).
1. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par :
$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{3}{2} u_n + 1. \end{cases}$$
a) Construire les 4 premiers termes de cette suite sur l'axe (OI).
b) Conjecturer la limite de cette suite.
2. Répondre aux mêmes questions avec $u_0 = -2$, puis $u_0 = -3$.

3 Suites arithmétiques, suites géométriques

3.1. Suites arithmétiques

Définition et propriété

Un jardinier doit arroser le pied de chacun des arbres formant une rangée de sa plantation. La distance entre deux arbres consécutifs est 5 m et le puits est situé à 8 m du premier arbre.



- Quelle est la distance du puits au 1er arbre ? au 2^{e} arbre ? au 3^{e} arbre ? au 4^{e} arbre ?
- On désigne par d_n la distance du puits au $n^{\text{ième}}$ arbre. Calculer d_{n+1} en fonction de d_n.
- Le jardinier fait un trajet aller-retour au puits pour chaque arbre ; calculer la distance qu'il doit parcourir pour arroser les 7 arbres et revenir au puits.

Définition

Soit $(u_n)_{n \in E}$ une suite numérique.
(u_n) est une suite arithmétique s'il existe un nombre réel r tel que, pour tout n élément de E, on a :
$u_{n+1} = u_n + r$.
Le nombre réel r est appelé raison de la suite (u_n).

Remarque

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r.
- *Si $r > 0$, alors la suite (u_n) est croissante.*
- *Si $r < 0$, alors la suite (u_n) est décroissante.*
- *Si $r = 0$, alors la suite (u_n) est constante.*

Exemples

- Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = -1 \\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n - 3. \end{cases}$

(u_n) est une suite arithmétique de raison -3 et de premier terme -1.

- La suite des nombres entiers naturels impairs est une suite arithmétique de raison 2 et de premier terme 1.
- La suite des nombres entiers naturels multiples de 5 est une suite arithmétique de raison 5 et de premier terme 0.

Propriété

Soit (u_n) une suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r.
Pour tout nombre entier naturel n, on a : $u_n = u_0 + n\,r$.

Démonstration

1re méthode

En appliquant n fois la définition, on obtient les égalités suivantes : $u_1 = u_0 + r$

$$u_2 = u_1 + r$$
$$u_3 = u_2 + r$$
$$\vdots$$
$$u_n = u_{n-1} + r.$$

On additionne membre à membre ces n égalités et on simplifie.

On obtient : $u_n = u_0 + n\,r$.

2e méthode

On fait un raisonnement par récurrence.

– On a : $u_0 = u_0 + 0r$; donc la propriété est vraie pour $n = 0$.

– Pour tout entier naturel k, on a :

si $u_k = u_0 + kr$, alors $u_{k+1} = u_k + r$

$$= u_0 + kr + r$$
$$= u_0 + (k + 1)\,r.$$

Donc pour tout entier naturel n, on a : $u_n = u_0 + nr$.

Remarques

• *On déduit de la propriété précédente que, pour tous nombres entiers naturels* n *et* k*, on a :* $u_n = u_k + (n - k)\,r$.

En particulier, si (u_n) *a pour premier terme* u_1*, le terme général est :* $u_n = u_1 + (n - 1)\,r$.

• *Soit* $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *la suite de terme général* $an + b$*, où* a *et* b *sont deux nombres réels donnés ;*
on a : $u_{n+1} = a(n + 1) + b = (an + b) + a = u_n + a$.

Donc, (u_n) *est une suite arithmétique de raison* a *et de premier terme* b.

M

Pour démontrer qu'une suite (u_n) est arithmétique, on peut utiliser l'un des procédés suivants.

• Établir que la différence de deux termes consécutifs est un nombre réel indépendant de n : $u_n - u_{n-1} = r$.

• Écrire u_n sous la forme $u_n = an + b$, où a et b sont deux nombres réels indépendants de n.

Somme de termes consécutifs

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r.
On se propose de calculer la somme S de n termes consécutifs de cette suite.
On désigne par a le premier terme et par b le dernier terme de la somme à calculer.

On peut écrire S de deux façons différentes :

$$S = a + (a + r) + (a + 2r) + (a + 3r) + \ldots + [a + (n - 1)r] \;;$$
$$S = b + (b - r) + (b - 2r) + (b - 3r) + \ldots + [b - (n - 1)r].$$

En additionnant membre à membre ces deux égalités, on obtient :

$$2\,S = \underbrace{(a + b) + (a + b) + (a + b) + \ldots + (a + b)}_{n \text{ termes}} = n(a + b).$$ On en déduit que : $S = n\,\dfrac{a + b}{2}$.

Propriété

La somme de n termes consécutifs d'une suite arithmétique est égale au produit par n de la demi-somme des termes extrêmes.

Exemples

• La somme des n premiers nombres entiers naturels non nuls est :

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = n \times \frac{1 + n}{2} = \frac{n\,(n + 1)}{2}.$$

• La somme des n premiers nombres impairs est :

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n \times \frac{1 + (2n - 1)}{2} = n^2.$$

• La somme des n premiers nombres pairs non nuls est : $2 + 4 + 6 + \ldots + 2n = n(n + 1)$.

3.2. Suites géométriques

Définition et propriété

Un auteur arabe, Al Séphadi, rapporte que le roi des Perses demanda à Sessa, l'inventeur du jeu des échecs, quelle récompense il souhaitait recevoir. Celui-ci répondit qu'il désirait simplement 1 grain de blé pour la 1re case de l'échiquier, 2 pour la 2e case, 4 pour la 3e, en doublant ainsi le nombre de grains jusqu'à la 64e case. Le roi sourit de la modestie de cette demande.

Pour tout nombre entier n compris entre 1 et 64, on note u_n le nombre de grains de blé correspondant à la $n^{\text{ième}}$ case et S_n le nombre total de grains de la 1re à la $n^{\text{ième}}$ case.

- Calculer $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_{12}$.
- Exprimer u_n en fonction de u_{n-1}, puis conjecturer son expression en fonction de n.
- Calculer $S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6$.
- Conjecturer l'expression de S_{64}.

Pour terminer l'histoire précédente, il faut savoir que S_{64} est égal à 18 446 744 073 709 551 615 et que ce nombre représente une quantité de blé largement supérieure à la production annuelle de la terre entière !

Définition

Soit $(u_n)_{n \in E}$ une suite numérique.
(u_n) est une suite géométrique s'il existe un nombre réel q tel que, pour tout n élément de E, on a : $u_{n+1} = q\, u_n$.
Le nombre réel q est appelé raison de la suite (u_n).

On suppose désormais que les suites géométriques ont un premier terme et une raison non nuls.

Exemples

- La suite (u_n) des nombres de grains de blé de l'inventeur du jeu des échecs est une suite géométrique de raison 2 et de premier terme 1.
- Soit $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par : $\begin{cases} v_0 = \dfrac{5}{4} \\ \forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} = -2\, v_n. \end{cases}$

(v_n) est une suite géométrique de raison -2 et de premier terme $\dfrac{5}{4}$.

- Soit $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite de terme général : $w_n = 10^{-n}$.

(w_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{10}$ et de premier terme 1.

Propriété

Soit (u_n) une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison q.
Pour tout nombre entier naturel n, on a : $u_n = u_0\, q^n$.

Démonstration

1re méthode

En appliquant n fois la définition, on obtient les égalités suivantes :

$$\begin{aligned} u_1 &= q\, u_0 \\ u_2 &= q\, u_1 \\ u_3 &= q\, u_2 \\ &\vdots \\ u_n &= q\, u_{n-1}. \end{aligned}$$

On fait le produit membre à membre de ces n égalités et on simplifie.

On obtient : $u_n = u_0\, q^n$.

2e méthode

On fait un raisonnement par récurrence.

– On a : $u_0 = u_0\, q^0$; donc la propriété est vraie pour $n = 0$.

– Pour tout entier naturel k, on a :

si $u_k = u_0\, q^k$, alors $u_{k+1} = q\, u_k = q\, u_0\, q^k = u_0\, q^{k+1}$.

Donc pour tout entier naturel n, on a :

$u_n = u_0\, q^n$.

Remarques

• *On déduit de la propriété précédente que, pour tous nombres entiers naturels n et k, on a :*
$u_n = u_k\, q^{n-k}$.
En particulier, si une suite (u_n) *a pour premier terme* u_1*, le terme général est :* $u_n = u_1\, q^{n-1}$.
• *Soit* $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *la suite de terme général* $a\, q^n$*, où a et q sont deux nombres réels donnés ;*
on a : $u_{n+1} = a\, q^{n+1} = q\,(a\, q^n) = q\, u_n$.
Donc, (u_n) *est une suite géométrique de raison q et de premier terme a.*

M

Pour démontrer qu'une suite (u_n) est géométrique, on peut utiliser l'un des procédés suivants.
• Établir que le quotient de deux termes consécutifs est un nombre réel indépendant de n :
$$\frac{u_n}{u_{n-1}} = q.$$
• Écrire u_n sous la forme $u_n = a\, q^n$, où a et q sont deux nombres réels indépendants de n.

Somme de termes consécutifs

Soit (u_n) une suite géométrique de raison q.
On se propose de calculer la somme S de n termes consécutifs de cette suite.
On désigne par a le premier terme de la somme à calculer.

On a : $S = a + (a\,q) + (a\,q^2) + (a\,q^3) + \dots + (a\,q^{n-2}) + (a\,q^{n-1})$ (1).

On multiplie les deux membres de cette égalité par q ; on obtient :
$$Sq = (a\,q) + (a\,q^2) + (a\,q^3) + \dots + (a\,q^{n-1}) + (a\,q^n) \qquad (2).$$
Par différence entre (1) et (2), on obtient : $S(1-q) = a - a\,q^n = a\,(1-q^n)$.
• Si $q \neq 1$, on a : $S = a \times \dfrac{1-q^n}{1-q}$.
• Si $q = 1$, (u_n) est une suite constante et on a : $S = n\,a$.

Propriété

Soit S la somme de n termes consécutifs d'une suite géométrique de premier terme a et de raison q.
• **Si $q \neq 1$, alors $S = a \times \dfrac{1-q^n}{1-q}$.**
• **Si $q = 1$, alors $S = n\,a$.**

Exemples

• La somme des grains de blé de l'échiquier du savant Perse est : $S_{64} = 2^{64} - 1$.
• Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{1}{3}\,u_n. \end{cases}$

(u_n) est la suite géométrique de raison $\dfrac{1}{3}$ et de premier terme $u_0 = 2$.
On a : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n = 2 \times \dfrac{1}{3^n}$.
La somme des 20 premiers termes de cette suite est :
$$u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_{19} = u_0 \times \frac{1-q^{20}}{1-q}\ ;$$
$$2 + \frac{2}{3} + \frac{2}{3^2} + \dots + \frac{2}{3^{19}} = 2 \times \frac{1-\dfrac{1}{3^{20}}}{1-\dfrac{1}{3}} = 3\left(1 - \frac{1}{3^{20}}\right) = 2{,}999\dots$$

Limite de la suite géométrique (q^n)

Propriété

Soit q un nombre réel strictement positif.

- **Si $q = 1$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 1$.**
- **Si $q > 1$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = +\infty$.**
- **Si $0 < q < 1$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0$.**

Démonstration

- Dans le cas particulier où $q = 1$, la suite est constante ; tous ses termes sont égaux à 1 et $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 1$.
- Si $q > 1$, on pose : $q = 1 + \alpha$, avec $\alpha > 0$.

On a : $\forall n \in \mathbb{N}$, $(1 + \alpha)^n \geq 1 + n\alpha$ (cf. Chapitre 13 § 3.3).

Or : $\lim\limits_{n \to +\infty} (1 + n\alpha) = +\infty$; donc : $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = +\infty$.

- Si $0 < q < 1$, on pose : $q' = \dfrac{1}{q}$; on a donc : $\forall n \in \mathbb{N}$, $q^n = \dfrac{1}{q'^n}$.

Or : $q' > 1$, donc : $\lim\limits_{n \to +\infty} q'^n = +\infty$; on en déduit que : $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0$.

Remarque

Lorsque $q < 0$, les termes de la suite (q^n) sont alternativement positifs et négatifs ;
– si $-1 < q < 0$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0$;
– si $q \leq -1$, alors la suite (q^n) n'a pas de limite.

Exemples

On reprend la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{1}{3} u_n \end{cases}$.

On désigne par S_n la somme des n premiers termes de cette suite.

On a : $\forall n \in \mathbb{N}$, $S_n = 2 \times \dfrac{1 - \dfrac{1}{3^n}}{1 - \dfrac{1}{3}} = 3\left(1 - \dfrac{1}{3^n}\right)$.

Or : $\lim\limits_{n \to +\infty} 3^n = +\infty$; donc : $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = 3$.

3.3. Travaux dirigés

Suite arithmético-géométrique

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2} u_n + 4. \end{cases}$

1°) Le plan est muni du repère orthonormé (O, I, J).

***a)* Tracer les droites $(\mathscr{D})$ et (Δ) d'équations respectives $y = \dfrac{1}{2} x + 4$ et $y = x$, puis construire les 4 premiers termes de la suite (u_n) sur l'axe des abscisses.**

***b)* Utiliser cette construction pour conjecturer le sens de variation et la limite de (u_n).**

2°) Soit $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie pour tout entier naturel n par : $v_n = u_n - 8$.

***a)* Démontrer que (v_n) est une suite géométrique.**

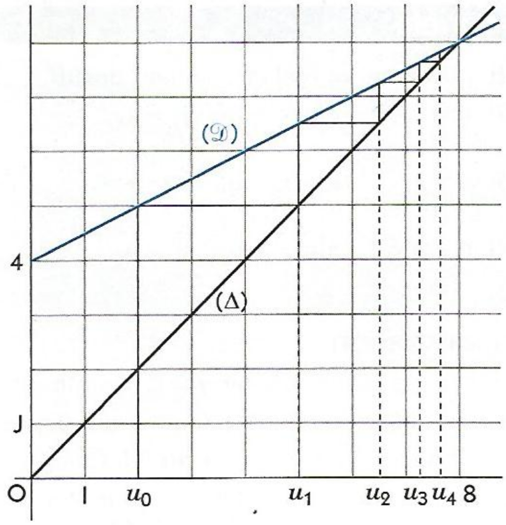
***b)* Exprimer v_n, puis u_n en fonction de n.**

***c)* En déduire la limite de la suite (v_n), puis de la suite (u_n).**

Solution

1°) *a)* On a vu (cf. §1.2) une méthode de construction des termes d'une suite définie par une formule de récurrence.

La figure ci-contre illustre cette construction.



b) Le graphique conduit à conjecturer que la suite (u_n) est croissante et converge vers 8.

2°) *a)* On a :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} = u_{n+1} - 8 = \frac{1}{2}\,u_n + 4 - 8$$

$$= \frac{1}{2}(u_n - 8) = \frac{1}{2}\,v_n.$$

Donc, (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme v_0 tel que : $v_0 = u_0 - 8 = -6$.

b) On a : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ v_n = -\dfrac{6}{2^n}$;

donc : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n = -\dfrac{6}{2^n} + 8$.

c) On a : $0 < \frac{1}{2} < 1$; donc : $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 0$.

On en déduit que : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 8$.

Exercices

3.a Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

a) $u_n = \frac{1}{5}n$;

b) $\begin{cases} u_0 = 4 \\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = -2u_n \end{cases}$;

c) $u_n = 3^{n+2}$;

d) $\begin{cases} u_0 = -1 \\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - u_n = 5 \end{cases}$.

3.b Soit $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite définie par :

$\begin{cases} v_1 = 2 \\ \forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ v_{n+1} - v_n = 0{,}5 \end{cases}$;

1. Quelle est la nature de cette suite ?
Donner une expression de son terme général.

2. Calculer la somme des 20 premiers termes de cette suite.

3. On désigne par s_n la somme des n premiers termes de cette suite.
Déterminer n pour que $s_n = 1\,422$.

3.c On considère la suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme -1.
Déterminer, pour tout nombre entier naturel n, la somme S_n des n premiers termes de cette suite.
Quelle est la limite de la suite (S_n) ainsi définie ?

3.d Déterminer la raison d'une suite géométrique dont le 3ᵉ terme est 729 et le 8ᵉ terme est 3.
Quel est le 1ᵉʳ terme de cette suite ?
Quelle est la limite de cette suite ?

3.e Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite définie par :

$$u_n = \frac{3^0 + 3^1 + \ldots + 3^{n+1}}{3^n}.$$

1. Calculer u_1, u_2, u_3, u_4.

2. Donner une expression de u_n en fonction de n et calculer, à 10^{-4} près, les valeurs de u_5, u_{10}, u_{25}.

3. Démontrer que cette suite a une limite et calculer cette limite.

Exercices

APPRENTISSAGE

Généralités

1 On donne : $\pi = 3{,}14159265458...$
On désigne par (u_n) la suite des arrondis d'ordre n du nombre π. Écrire les 10 premiers termes de (u_n).

2 On donne les premiers termes d'une suite (u_n). Conjecturer, dans chaque cas, les trois termes suivants.
a) 0,1 ; 0,101 ; 0,101 001 ; ...
b) $\frac{1}{2}$; $\frac{3}{4}$; $\frac{7}{8}$; $\frac{15}{16}$; ...
c) 1 ; 2 ; 3 ; 5 ; 8 ; 13 ; 21 ; ...

3 Soit une droite $(\mathscr{D})$ et O un point extérieur à $(\mathscr{D})$. Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on se propose de déterminer le nombre u_n de triangles que l'on obtient en reliant n points de la droite $(\mathscr{D})$ au point O.
1. Déterminer u_2, u_3 et u_4.
2. Conjecturer une relation entre u_{n+1} et u_n.
Vérifier : que $u_9 = 36$ et $u_{10} = 45$.

4 Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite de terme général : $u_n = n^2$.
Démontrer que :
a) $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{2n} = 4u_n$;
b) $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} + u_{n-1} = 2u_n + 2$.

5 Soit $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite de terme général :
$v_n = 2 + n\,(-1)^n$.
Calculer les 5 premiers termes de cette suite et représenter ces termes sur un axe.

6 Le plan est muni du repère orthonormé (O, I, J).
Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par :
$$\begin{cases} u_0 = -1 \\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{2 + 2u_n}{2 + u_n}. \end{cases}$$
1. Construire la courbe représentative $(\mathscr{C})$ de la fonction $x \mapsto \dfrac{2x+2}{x+2}$ dans l'intervalle $]-2\,;+\infty[$, ainsi que la droite droite $(\mathscr{D})$ d'équation $y = x$.
2. En déduire une construction des 4 premiers termes de cette suite sur l'axe (OI).

7 Le plan est muni du repère orthonormé (O, I, J).
Dans chacun des cas suivants, représenter sur l'axe des abscisses les 5 premiers termes de la suite (u_n).
a) $\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 1 + 2\sqrt{u_n}\ ; \end{cases}$
b) $\begin{cases} u_0 = \dfrac{1}{2} \\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{u_n}\ ; \end{cases}$
c) $\begin{cases} u_0 = 3 \\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{1}{3}\,{u_n}^2 - 3. \end{cases}$

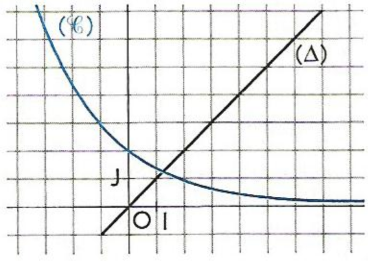
Étude d'une suite numérique

8 Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite de terme général : $u_n = \dfrac{2^n}{n}$.
1. Calculer les 3 premiers termes de la suite.
2. Étudier le signe de l'expression $u_{n+1} - u_n$.
En déduire le sens de variation de cette suite.

9 Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite de terme général :
$u_n = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \ldots \sqrt{1 + \sqrt{1}}}}$.
(L'expression comporte n radicaux.)
a) Calculer u_1, u_2, u_3.
b) Conjecturer une expression de u_n en fonction de u_{n-1}.
c) En déduire le sens de variation de cette suite.

10 Dans chacun des cas suivants, déterminer le signe, le sens de variation et la limite, si elle existe, de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
a) $u_n = \dfrac{n}{n+1}$; *b)* $u_n = \dfrac{n^2}{1+n^2}$;
c) $u_n = \dfrac{3}{-4n^2 - 5}$; *d)* $u_n = \dfrac{n^2}{n+3}$;
e) $u_n = \sqrt{n^2 + 1}$; *f)* $u_n = \dfrac{n}{\sqrt{n^2+1}}$.

11 Le plan est muni du repère orthonormé (O, I, J).
$(\mathscr{C})$ est la représentation graphique d'une fonction numérique f et (Δ) la droite d'équation $y = x$.



Soit (u_n) la suite définie par :
$$\begin{cases} u_0 = -1 \\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n). \end{cases}$$
1. Construire, sur l'axe (OI), les 4 premiers termes de cette suite.
2. Conjecturer le sens de variation de cette suite.
3. Donner un encadrement de sa limite éventuelle par deux nombres entiers consécutifs.

12 Le plan est muni du repère orthonormé (O, I, J).
Dans chacun des cas suivants, représenter sur l'axe des abscisses les 4 premiers termes de la suite (u_n), puis conjecturer le sens de variation et la limite de cette suite.
a) $\begin{cases} u_0 = 0 \\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = -\dfrac{1}{2}\,u_n + 3\ ; \end{cases}$
b) $\begin{cases} u_0 = \dfrac{3}{4} \\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{2 - u_n}. \end{cases}$

13 Le plan est muni du repère orthonormé (O, I, J). Dans chacun des cas suivants, calculer et représenter sur l'axe des abscisses les 5 premiers termes de la suite (u_n), puis conjecturer le sens de variation et la limite de cette suite.

a) $\begin{cases} u_0 = -1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 0{,}2\, u_n^{\,2} + u_n + 1\ ; \end{cases}$

b) $\begin{cases} u_0 = -3 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = -\dfrac{2}{3}\, u_n + 2. \end{cases}$

14 Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite de terme général :

$u_n = \dfrac{1}{n(n+1)}$.

1. Déterminer deux nombres réels a et b tels que :

$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \dfrac{a}{n} + \dfrac{b}{n+1}$.

2. Calculer, en fonction de n, la somme s_n des n premiers termes de cette suite.

3. Calculer la limite de la suite (s_n).

Suites arithmétiques, suites géométriques

15 Dans chacun des cas suivants, préciser si la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est arithmétique, géométrique ou ni l'une, ni l'autre.

a) $u_n = (-1)^n$; *b)* $u_n = 2^n - 3^n$;
c) $u_n = -3(n+2)$; *d)* $u_n = (-3)^{n+2}$;
e) $u_n = (-3)^n + 2$; *f)* $u_n = 10^{-2n}$.

16 Dans chacun des cas suivants, démontrer que (u_n) est une suite arithmétique dont on précisera le premier terme et la raison.

a) $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 4 - 3(n-1)$;

b) $\begin{cases} u_5 = -1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ 5u_{n+1} = 5\, u_n - 2. \end{cases}$

17 Dans chacun des cas suivants, démontrer que (u_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.

a) $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 2^{n+3}$; *b)* $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 4^{n-1}$;
c) $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \dfrac{3^n}{24^n}$; *d)* $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \dfrac{2^{n+2}}{5^n}$.

18 Soit p, q, p' et q' quatre nombres entiers naturels tels que : $p + q = p' + q'$.

1. Démontrer que pour toute suite arithmétique (u_n), on a : $u_p + u_q = u_{p'} + u_{q'}$.

2. Démontrer que pour toute suite géométrique (v_n), on a : $v_p \times v_q = v_{p'} \times v_{q'}$.

19 x, y et z sont, dans cet ordre, trois termes consécutifs d'une suite arithmétique.
Calculer ces trois nombres, sachant que leur somme est 9 et la somme de leurs carrés est 59.

20 x, y et z sont, dans cet ordre, trois termes consécutifs d'une suite géométrique croissante.
Calculer ces trois nombres, sachant que leur somme est 63 et la somme de leurs inverses est $\dfrac{7}{16}$.

21 Pour tout entier naturel n, calculer en fonction de n :

a) $s_1 = 1 + 10 + 20 + 30 + ... + 10n$;
b) $s_2 = 1 + 10 + 100 + 1\,000 + ... + 10^n$;
c) $s_3 = 1 - 10 + 100 - 1\,000 + ... + (-1)^n\, 10^n$.

22 Dans un pays de 50 millions d'habitants, le taux d'accroissement annuel de la population est de 20 ‰. Quelle sera la population de ce pays dans 1 an ? dans 2 ans ? dans 10 ans ?

23 Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite définie par :

$\begin{cases} u_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 1 + 10u_n. \end{cases}$

a) Calculer u_2, u_3, u_4 et u_5.
b) Démontrer que, pour tout entier naturel n non nul, u_n est la somme de n termes consécutifs d'une suite géométrique que l'on déterminera.
c) En déduire l'expression de u_n en fonction de n.

24 Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ les suites définies par :

• $\begin{cases} u_0 = 6 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{1}{5}\, u_n + \dfrac{4}{5}\ ; \end{cases}$

• $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = u_n - 1$.

1. Démontrer que (v_n) est une suite géométrique.
2. Exprimer v_n et u_n en fonction de n.
3. En déduire les limites des suites (u_n) et (v_n).

25 Soit α un nombre réel et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite de terme général : $u_n = (\cos \alpha)^n$.

1. Etudier cette suite lorsque :

a) $\alpha \equiv 0\ [2\pi]$; *b)* $\alpha \equiv \pi\ [2\pi]$; *c)* $\alpha \equiv \dfrac{\pi}{2}\ [\pi]$.

2. On suppose α différent des valeurs précédentes. Étudier la convergence de la suite (u_n).

26 Un propriétaire désire vendre sa maison qui comporte deux étages de 16 marches chacun. L'acheteur devra payer 10 F pour la 1re marche, 20 F pour la 2e marche, 40 F pour la 3e marche, ainsi de suite, en doublant chaque fois jusqu'à la dernière marche.
Quel est le prix de vente de cette maison ?

27 Le loyer mensuel d'une maison est de 50 000 F CFA. Ce loyer augmente chaque année de 6 %.

1. Quel sera le montant du loyer dans 8 ans ?
2. Au bout de combien d'années le loyer aura-t-il doublé ?
3. Calculer le total des loyers payés pendant les 10 premières années.

APPROFONDISSEMENT

28 Dans un village d'Afrique, vit un très vieil homme, au milieu de ses enfants, petits-enfants, arrière-petits-enfants et arrière-arrière-petits-enfants. Chacun d'eux a le même nombre n d'enfants (sauf les arrière-arrière-petits-enfants qui n'ont pas encore procréé) et tous sont en vie.

1. Calculer, en fonction de n, le nombre de membres de cette famille.

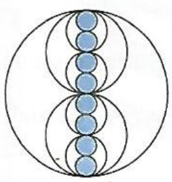
2. On suppose que la famille comprend 2 801 personnes. Combien le patriarche a-t-il eu d'enfants ?

29 Des élections opposent n candidats au premier tour. Chacun d'eux réunit exactement deux fois plus de voix que son suivant immédiat.
Pour tout entier naturel k tel que $k \in [1\ ;\ n]$, on désigne par v_k le nombre de voix obtenues par le candidat placé au $k^{\text{ième}}$ rang.
1. Démontrer que (v_k) est une suite géométrique et exprimer v_k en fonction de k et de v_1.
2. *a)* Calculer, en fonction de n et de v_1, le nombre total de voix réunies par les n candidats.
b) On suppose que, pour être élu au premier tour, un candidat doit obtenir plus de la moitié des suffrages exprimés. Un second tour est-il nécessaire ?
3. Déterminer le nombre de candidats à cette élection sachant qu'il y a 945 votants et que le candidat élu obtient 480 voix.

30 Un homme veut placer la somme de 1 000 000 F au taux annuel de 6,5 %. Il peut le faire de deux façons :
- placement à intérêts simples (chaque fin d'année, le capital produit le même intérêt) ;
- placement à intérêts composés (chaque fin d'année, l'intérêt est capitalisé).

On désigne respectivement par C_n et D_n les valeurs acquises par le capital au bout de n années dans chacun des cas.
1. *a)* Calculer C_1, C_2 et C_3.
b) Exprimer C_n en fonction de C_{n-1}.
En déduire que (C_n) est une suite arithmétique, dont on précisera la raison.
2. *a)* Calculer D_1, D_2 et D_3.
b) Exprimer D_n en fonction de D_{n-1}.
En déduire que (D_n) est une suite géométrique, dont on précisera la raison.
3. Calculer, dans chacun des cas, la valeur acquise par le capital au bout de 10 ans.

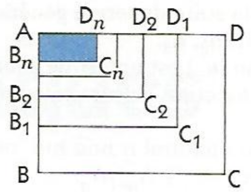
31



« Je suis UN qui devient DEUX,
Je suis DEUX qui devient QUATRE,
Je suis QUATRE qui devient HUIT,
mais Je suis UN qui protège cela. »

La figure ci-dessus est une représentation de l'unicité de Dieu dans la mythologie égyptienne.
On suppose que le cercle initial a pour rayon 1.
1. *a)* Combien y a-t-il de cercles coloriés après n divisions ?
Calculer, en fonction de n, le rayon r_n de chacun de ces cercles.
b) Démontrer que (r_n) est une suite géométrique dont on déterminera le premier terme et la raison.
Calculer la limite de la suite (r_n).
2. On désigne par a_n l'aire totale coloriée après n divisions.
a) Exprimer a_n en fonction de n et démontrer que (a_n) est une suite géométrique dont on déterminera le premier terme et la raison.
b) Calculer la limite de la suite (a_n).

32



ABCD est un rectangle tel que : AB = 30 et AD = 40.
- $AB_1C_1D_1$ est le rectangle inscrit dans ABCD tel que :

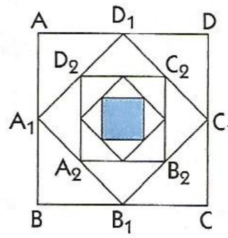
$\overrightarrow{AB_1} = \frac{2}{3}\,\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD_1} = \frac{3}{4}\,\overrightarrow{AD}$;
- $AB_2C_2D_2$ est le rectangle inscrit dans $AB_1C_1D_1$ tel que :

$\overrightarrow{AB_2} = \frac{2}{3}\,\overrightarrow{AB_1}$ et $\overrightarrow{AD_2} = \frac{3}{4}\,\overrightarrow{AD_1}$;

...

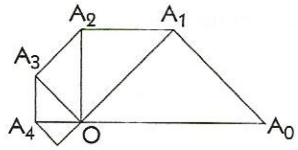
On désigne respectivement par l_n, L_n et a_n la largeur, la longueur et l'aire du $n^{\text{ième}}$ rectangle obtenu.
1. Démontrer que les suites (l_n), (L_n) et (a_n) sont des suites géométriques dont on précisera la raison et le premier terme.
2. Calculer la limite de chacune de ces suites.
3. Pour tout nombre entier naturel n non nul, on pose : $s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$.
a) Calculer s_n en fonction de n.
b) Démontrer que la suite (s_n) admet une limite égale à l'aire du rectangle ABCD.

33 Les carrés emboîtés



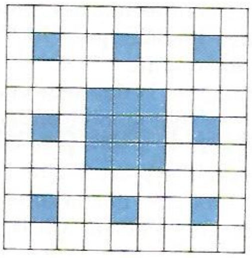
ABCD est un carré de côté 10 cm.
$A_1B_1C_1D_1$ est le carré inscrit dans ABCD tel que : A_1, B_1, C_1, D_1 sont les milieux respectifs des côtés [AB], [BC], [CD], [DA].
On construit ainsi une suite de carrés dont les sommets sont les milieux du carré précédent.
1. Calculer $A_{10}B_{10}$ et $A_{25}B_{25}$ ainsi que les aires des carrés correspondants.
2. On désigne respectivement par c_n et a_n le côté et l'aire du carré $A_nB_nC_nD_n$.
a) Démontrer que les suites (c_n) et (a_n) sont des suites géométriques et préciser leurs raisons respectives.
b) Calculer c_n et a_n en fonction de n ainsi que les limites des suites (c_n) et (a_n).

34 Les points sur une spirale
On construit une suite de points A_n, $n \in \mathbb{N}$, tels que :
- O et A_0 sont donnés, avec $OA_0 = 16$;
- pour tout entier naturel n, le triangle OA_nA_{n+1} est rectangle isocèle en A_{n+1}.



1. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite de terme général : $u_n = OA_n$.
a) Calculer u_0, u_1, u_2, u_3.
b) Démontrer que (u_n) est une suite géométrique.
Exprimer u_n en fonction de n et calculer la limite de la suite (u_n).
2. Pour tout entier naturel n non nul, on pose :
$s_n = A_0A_1 + A_1A_2 + ... + A_{n-1}A_n$.
a) Calculer s_n en fonction de n.
b) Calculer la limite de la suite (s_n).
3. Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par : $a_n = \text{aire}(OA_nA_{n+1})$.
a) Calculer a_0, a_1, a_2, a_3.
b) Démontrer que (a_n) est une suite géométrique.
Exprimer a_n en fonction de n et calculer la limite de la suite (a_n).
c) Exprimer, en fonction de n, la somme σ_n des n premiers termes de cette suite et calculer la limite de la suite (σ_n).

35 On donne un carré de côté 1. On partage ce carré en 9 petits carrés de même côté, puis on colorie le petit carré central. On fait la même opération avec chacun des 8 carrés restants (voir figure ci-contre). On répète cette opération n fois.



1. Déterminer, en fonction de n, le nombre de carrés non coloriés de côté $(\frac{1}{3})^n$.
2. On désigne par a_n l'aire totale des carrés coloriés après n opérations.
a) Calculer a_1, a_2, a_3.
b) Exprimer a_n en fonction de n.
c) Calculer la limite de la suite (a_n).

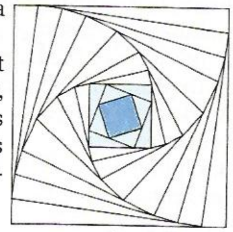
36 Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite définie par :
$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{10^n}. \end{cases}$$
1. Calculer u_2, u_3, u_4 et u_5.
2. Démontrer que, pour tout entier naturel n non nul, u_n est la somme de n termes consécutifs d'une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.
3. En déduire une expression de u_n en fonction de n et démontrer que la suite (u_n) est convergente.
4. On désigne par S_n la somme des n premiers termes de cette suite. Démontrer que :
$S_n = \dfrac{10n}{9} + \dfrac{10}{9^2}\left(\dfrac{1}{10^n} - 1\right)$.
Calculer la limite de la suite (S_n).

37 On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par :
$u_1 = 0{,}19$
$u_2 = 0{,}199$
...
$u_n = 0{,}199...99$ (n fois le chiffre 9).
1. Conjecturer une formule de récurrence exprimant u_n en fonction de u_{n-1}.
2. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = 0{,}2 - \dfrac{1}{10^{n+1}}$.
3. Calculer la limite de la suite (u_n).

38 Le plan est muni du repère orthonormé (O, I, J).
On considère la suite numérique $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :
$$\begin{cases} u_0 = 4 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n - 3. \end{cases}$$
1. Construire les 5 premiers termes de cette suite sur l'axe des abscisses.
2. *a)* Démontrer que :
$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{2}(u_n - u_{n-1})$.
b) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n = -5\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.
c) Quel est le sens de variation de la suite (u_n) ?
3. *a)* Démontrer que :
$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n + 6 = \dfrac{1}{2}(u_{n-1} + 6)$.
b) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n + 6 = (u_0 + 6)\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.
c) Calculer la limite de la suite (u_n).

39 Un paradoxe de Zénon
Zénon d'Eulée, philosophe grec (5e siècle av.J.-C.), imagina le paradoxe suivant mettant en scène Achille et une tortue :
« Achille veut rattraper une tortue qui est 100 m devant lui en courant 10 fois plus vite que n'avance la tortue.
Lorsqu'Achille a parcouru 100 m, la tortue en a parcouru 10 ; lorsqu'Achille a parcouru ces 10 m, la tortue en a parcouru 1, ...
Achille arrivera-t-il à rattraper la tortue ? Si oui, quelle distance aura-t-il alors parcourue ? ».

40 Le carré C_0 ci-dessous a pour côté 8.
À partir de ce carré, on construit une suite (C_n) de carrés tels que, pour tout entier naturel n, les sommets du carré C_{n+1} sont situés à une distance égale à 1 des sommets du carré C_n.



C_0

1. Pour tout entier naturel n, on désigne par a_n le côté du carré C_n.
Démontrer que la suite (a_n) est définie par :
$$\begin{cases} a_0 = 8 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, a_n = \sqrt{1 + (a_{n-1} - 1)^2}. \end{cases}$$
2. Démontrer que la suite (a_n) est décroissante et minorée strictement par 1.
3. On se propose de démontrer que la limite de la suite (a_n) est 1.
a) Établir la relation : $a_n - 1 = \dfrac{(a_{n-1} - 1)^2}{a_n + 1}$.
b) En déduire que : $0 \leq a_n - 1 \leq \dfrac{1}{2}(a_{n-1} - 1)^2$.
c) Déterminer, en utilisant une calculatrice, un entier N tel que si $n \geq N$, alors on a : $a_n \leq 2$.
En déduire que si $n \geq N + 1$, alors on a :
- $0 \leq a_n - 1 \leq \dfrac{1}{2}(a_{n-1} - 1)$;
- $0 \leq a_n - 1 \leq \dfrac{7}{2^n}$.

Conclure.

16 Statistiques

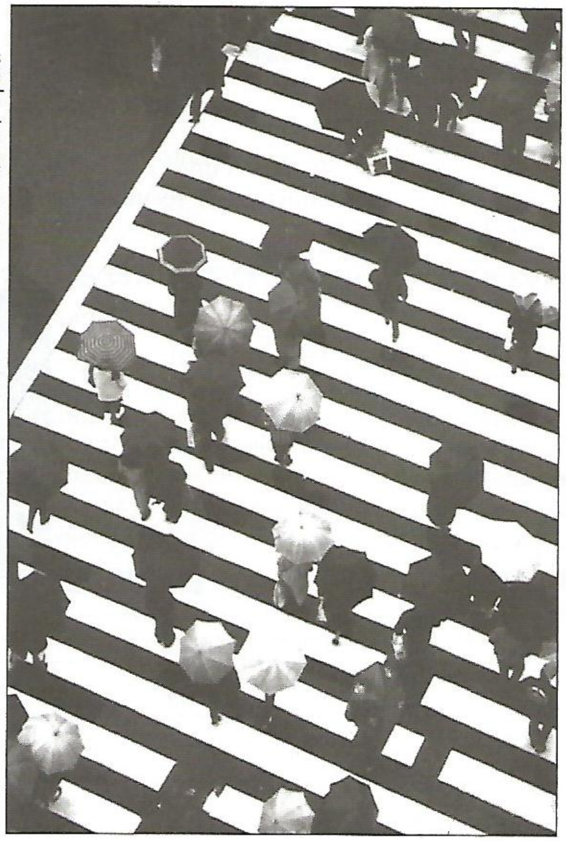


Photo Ken Straiton / Explorer

Ce chapitre a deux objectifs : d'une part, étendre aux séries statistiques à modalités regroupées en classes les notions de caractéristiques de position et de dispersion, d'autre part aborder l'étude simultanée de deux caractères quantitatifs sur une population.

SOMMAIRE

1 Séries statistiques présentant un regroupement en classes

On a vu en classe de seconde que, pour réaliser l'étude statistique d'un caractère quantitatif pouvant prendre toute valeur sur un intervalle I, on regroupe parfois ces valeurs en classes. Ces classes sont des intervalles qui forment une partition de I.

Dans cette leçon, on ne considère que des séries statistiques à modalités regroupées en classes. Une telle série, comportant p classes de bornes $a_0, a_1, a_2, \dots, a_p$ ($a_0 < a_1 < a_2 < \dots < a_p$), est notée :

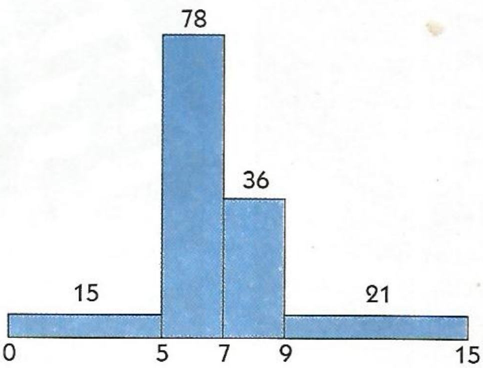
$$([a_{i-1} ; a_i[, n_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}, \text{ où } n_i \text{ est l'effectif de la classe } [a_{i-1} ; a_i[.$$

1.1. Effectifs cumulés, fréquences cumulées

Introduction

On a relevé la distance parcourue par chacun des 150 taxis d'une compagnie entre leur mise en circulation et leur première panne. Les résultats de cette enquête sont résumés dans le tableau ci-dessous, les distances étant exprimées en milliers de kilomètres.

Distance parcourue	[0 ; 5[	[5 ; 7[	[7 ; 9[	[9 ; 15[
Effectif (n_i)	15	78	36	21
Fréquence (f_i)	10 %	52 %	24 %	14 %



Cette série statistique est représentée graphiquement par l'histogramme ci-contre. Les aires des rectangles sont proportionnelles aux effectifs des classes correspondantes.

Comme cela a été fait pour les séries statistiques à modalités non regroupées en classes, on dresse les tableaux des effectifs cumulés croissants et décroissants.

Distance parcourue	[0 ; 5[	[5 ; 7[	[7 ; 9[	[9 ; 15[
Effectif cumulé croissant	15	93	129	150
Effectif cumulé décroissant	150	135	57	21

De façon plus générale, pour une série statistique $([a_{i-1} ; a_i[, n_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$:

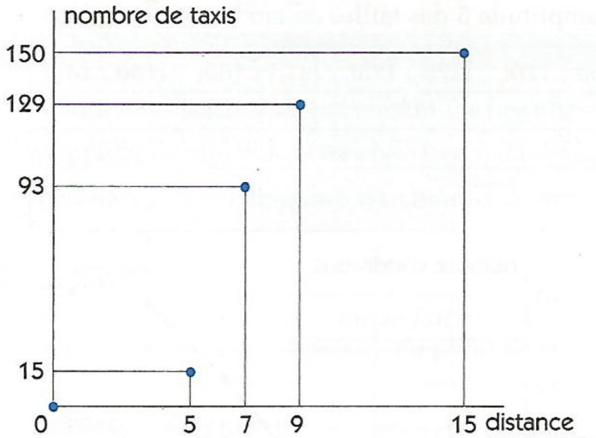
- l'effectif cumulé croissant de la classe $[a_{k-1} ; a_k[$ est : $\sum_{i=1}^{k} n_i = n_1 + n_2 + \dots + n_k$;
- l'effectif cumulé décroissant de la classe $[a_{k-1} ; a_k[$ est : $\sum_{i=k}^{p} n_i = n_k + n_{k+1} + \dots + n_p$.

Dans le tableau précédent, la troisième colonne, par exemple, s'interprète ainsi : 129 taxis ont parcouru au plus 9 000 km et 57 taxis ont parcouru au moins 7 000 km avant d'avoir leur première panne. On en déduit le tableau suivant.

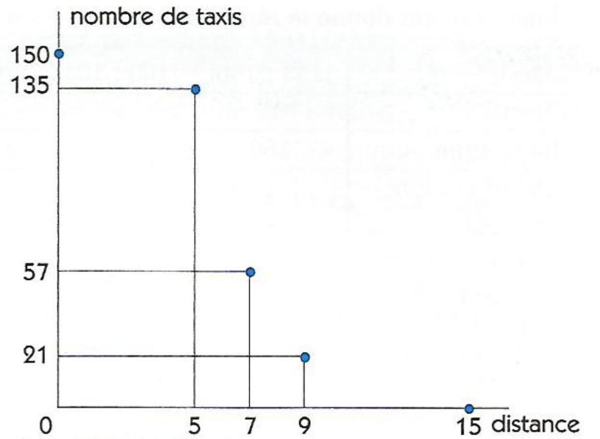
a_i	0	5	7	9	15
Nombre de taxis ayant parcouru au plus a_i (× 1 000 km)	0	15	93	129	150
Nombre de taxis ayant parcouru au moins a_i (× 1 000 km)	150	135	57	21	0

Dans ce tableau, la somme des effectifs de chaque colonne est égale à l'effectif total.

Ces résultats sont représentés par les graphiques suivants.



Effectifs cumulés croissants



Effectifs cumulés décroissants

Remarque

On obtient de manière analogue les tableaux et les graphiques des fréquences cumulées croissantes ou décroissantes.

Polygones des effectifs et des fréquences cumulés

Reprenons l'exemple précédent.

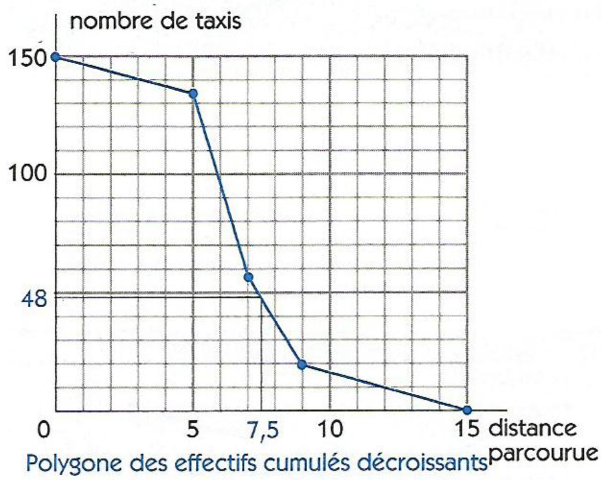
Les données ne nous permettent pas de déterminer, par exemple, le nombre de taxis ayant parcouru au moins 7 500 km avant la première panne.

Le graphique des effectifs cumulés décroissants permet cependant d'en déterminer une estimation. Pour cela, on joint les points consécutifs de ce graphique par des segments (figure 1).

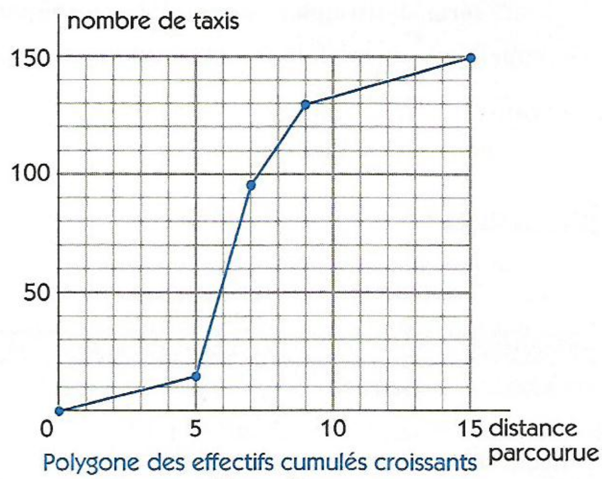
Le point d'abscisse 7,5 de la ligne brisée ainsi obtenue a pour ordonnée 48.

On estime à 48 le nombre de taxis ayant parcouru au moins 7 500 km avant la première panne.

Ce graphique est appelé polygone des effectifs cumulés décroissants.



Polygone des effectifs cumulés décroissants (figure 1)



Polygone des effectifs cumulés croissants (figure 2)

On construit de manière analogue le polygone des effectifs cumulés croissants (figure 2), ainsi que les polygones des fréquences cumulées croissantes et décroissantes.

Remarques

- *Le polygone des effectifs cumulés croissants (respectivement décroissants) est la ligne brisée reliant les points consécutifs du graphique des effectifs cumulés croissants (respectivement décroissants).*
- *Si on suppose que la répartition des individus dans chaque classe est régulière, pour tout point M de coordonnées $(x\ ;\ n)$ du polygone des effectifs cumulés croissants (respectivement décroissants), n est le nombre d'individus dont la modalité est inférieure (respectivement supérieure) à x.*

Exemple

Le tableau suivant donne la répartition en classes d'amplitude 5 des tailles en cm de 40 individus.

Classe	[155 ; 160[	[160 ; 165[	[165 ; 170[	[170 ; 175[	[175 ; 180[	[180 ; 185[
Effectif	3	8	10	10	7	2
Borne supérieure	160	165	170	175	180	185
Effectif cumulé croissant	3	11	21	31	38	40

On en déduit le polygone des effectifs cumulés croissants représenté ci-contre.

On se propose d'estimer le nombre d'individus mesurant moins de 177 cm.

Soit n_0 l'ordonnée du point d'abscisse 177 de ce polygone.

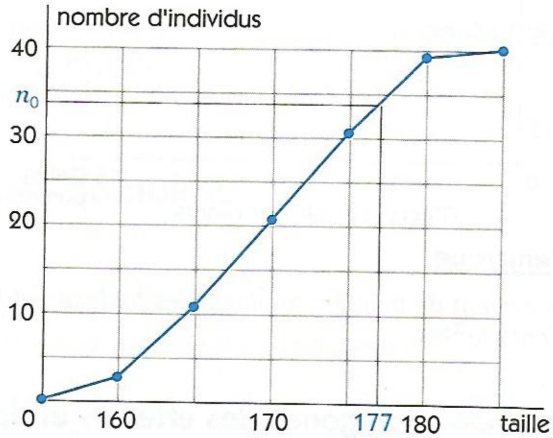
Ce point appartient à la droite passant par les points de coordonnées (175 ; 31) et (180 ; 38).

On a : $\dfrac{n_0 - 31}{177 - 175} = \dfrac{38 - 31}{180 - 175}$.

Donc : $n_0 = 33{,}8$.

Ce procédé est appelé ***interpolation linéaire***.

On estime à 34 le nombre d'individus mesurant moins de 177 cm.



1.2. Caractéristiques de position

Classe modale

Définition

Soit une série statistique présentant un regroupement en classes.

On appelle classe modale de cette série toute classe d'effectif maximal.

Exemple

Dans l'exemple introductif (distances parcourues par les taxis), la classe modale est [5 ; 7[.

Remarques

- *Une série statistique peut avoir plusieurs classes modales. Par exemple, la série des tailles de l'exemple précédent a deux classes modales : [165 ; 170[et [170 ; 175[.*
- *Le centre d'une classe modale est appelé mode de la série statistique.*

Médiane

Reprenons l'exemple introductif (§ 1.1.).

L'effectif total de la série est 150.

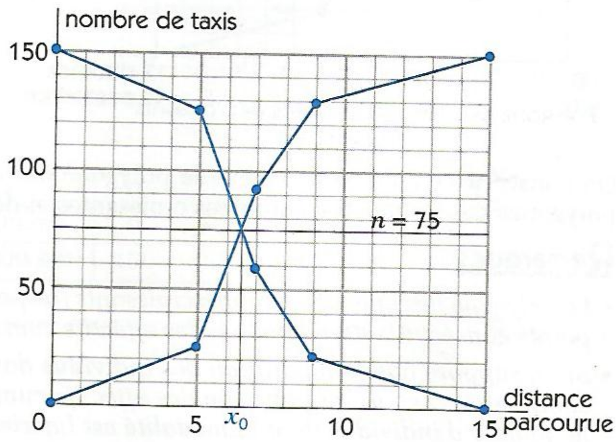
On représente sur le même graphique les polygones des effectifs cumulés croissants et décroissants.

Ces polygones sont symétriques par rapport à la droite d'équation $n = 75$. Donc leur point d'intersection a pour ordonnée 75. Soit x_0 son abscisse.

On a : $x_0 \in [5 ; 7[$; donc : $\dfrac{75 - 15}{x_0 - 5} = \dfrac{93 - 15}{7 - 5}$.

On en déduit : $x_0 = 5 + \dfrac{10}{30}$; donc : $x_0 \approx 6{,}54$.

On estime que la moitié des taxis ont parcouru au plus 6 540 km avant la première panne.



Le nombre 6,54 partage la population de la série en deux parties de même effectif. Ce nombre est appelé médiane de la série.

Définition

Soit une série statistique présentant un regroupement en classes, d'effectif total N.

On appelle médiane de cette série le nombre réel M tel que le nombre d'individus de modalité supérieure à M et le nombre d'individus de modalité inférieure à M soient tous deux égaux à $\frac{N}{2}$.

Remarques

La détermination de la médiane se fait aussi à l'aide des polygones des fréquences cumulées croissantes ou décroissantes. C'est l'abscisse du point de ces polygones qui a pour ordonnée 50 %.

Moyenne

Si, dans une série, les modalités des n_i individus d'une classe $[a_{i-1} ; a_i[$ de centre x_i sont régulièrement réparties dans cet intervalle, alors la moyenne arithmétique de ces modalités est x_i et leur somme est $n_i\, x_i$.

La définition suivante est donc justifiée par l'hypothèse d'une répartition régulière des modalités dans chacune des classes de la série considérée.

Définition

Soit $\left([a_{i-1} ; a_i[\, , n_i\right)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ une série statistique.

On appelle moyenne de cette série la moyenne $\bar{x}$ de la série statistique $(x_i , n_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$, où x_i est le centre de la classe $[a_{i-1} ; a_i[$.

Si N est l'effectif total de la série, on a : $\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{p} n_i\, x_i$.

Exemple

Reprenons l'exemple introductif (§ 1.1).

On déduit du tableau ci-contre que : $\bar{x} = \frac{1045{,}5}{150} = 6{,}97$.

Les taxis parcourent donc « en moyenne » 6 970 km avant leur première panne.

Classe	Centre de la classe (x_i)	Effectif (n_i)	$n_i\, x_i$
[0 ; 5[	2,5	15	37,5
[5 ; 7[	6	78	468
[7 ; 9[	8	36	288
[9 ; 15[	12	21	252
Total		**150**	**1 045,5**

1.3. Caractéristiques de dispersion

Pour calculer les caractéristiques de dispersion d'une série statistique présentant un regroupement en classes, comme pour le calcul de la moyenne, on remplace chaque classe par son centre.

Définition

Soit $\left([a_{i-1} ; a_i[\, , n_i\right)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ une série statistique d'effectif total N et de moyenne $\bar{x}$.

Pour tout nombre entier i tel que $1 \leqslant i \leqslant p$, on désigne par x_i le centre de la classe $[a_{i-1} ; a_i[$.

- **L'écart moyen est le nombre réel e_m tel que : $e_m = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{p} n_i\, |x_i - \bar{x}|$.**
- **La variance est le nombre réel V tel que : $V = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{p} n_i \left(x_i - \bar{x}\right)^2$.**
- **L'écart type est le nombre réel σ tel que : $\sigma = \sqrt{V}$.**

Remarque

Dans la pratique, le calcul de la variance se fait à l'aide de la formule de Koenig :

$V = \left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{p} n_i\, x_i^2\right) - \bar{x}^2$.

Exemple

Reprenons l'exemple introductif (§ 1.1).

Classe	Centre de la classe (x_i)	Effectif (n_i)	$\lvert x_i - \bar{x} \rvert$	$n_i \lvert x_i - \bar{x} \rvert$	x_i^2	$n_i x_i^2$
[0 ; 5[	2,5	15	4,47	67,05	6,25	93,75
[5 ; 7[	6	78	0,97	75,66	36	2 808
[7 ; 9[	8	36	1,03	37,08	64	2 304
[9 ; 15[	12	21	5,03	105,63	144	3 024
Total		**150**		**285,42**		**8 229,75**

On déduit du tableau précédent que :

$e_m = \dfrac{285{,}42}{150} = 1{,}902\,8$; $V = \dfrac{8\,229{,}75}{150} - 6{,}97^2 = 6{,}284\,1$; $\sigma \approx 2{,}506\,8$.

Exercices

1.a Une enquête sur la durée en minutes des communications passées d'une cabine téléphonique a donné les résultats suivants.

Classe	[0 ; 1[	[1 ; 2[	[2 ; 3[	[3 ; 5[	[5 ; 10[	[10 ; 15[
Effectif	30	54	51	45	63	57

1. Construire un histogramme représentant cette série.
2. Dresser le tableau des effectifs cumulés croissants et décroissants, puis construire les polygones des effectifs cumulés croissants et décroissants.
3. À l'aide d'interpolations linéaires, déterminer le nombre de communications dont la durée :
a) est supérieure à 4 min ; *b)* est inférieure à 7 min ; *c)* est comprise entre 4 et 7 min.

1.b Les moyennes des notes obtenues par les 50 candidats à un concours se répartissent comme suit.

Classe	[0 ; 4[	[4 ; 8[	[8 ; 12[	[12 ; 16[	[16 ; 20[
Effectif	5	14	20	7	4

1. Dresser le tableau des fréquences cumulées croissantes et décroissantes, puis construire les polygones des fréquences cumulées croissantes et décroissantes.
2. *a)* Déterminer la classe modale et la médiane de cette série statistique.
b) Déterminer la moyenne des notes obtenues par l'élève qui s'est classé quinzième au concours.

1.c On a mesuré la taille en centimètres de 40 individus (exemple du § 1.1.).
1. Calculer la médiane et la moyenne $\bar{x}$ de cette série.
2. Compléter le tableau suivant.

Classe	Centre de la classe (x_i)	Effectif (n_i)	$\lvert x_i - \bar{x} \rvert$	$n_i \lvert x_i - \bar{x} \rvert$	$n_i x_i^2$
[155 ; 160[		3			
[160 ; 165[		8			
[165 ; 170[		10			
[170 ; 175[		10			
[175 ; 180[		7			
[180 ; 185[		2			
Total					

3. Déterminer l'écart moyen et l'écart type de cette série.

1.d On reprend les données de l'exercice 1.*b*.
1. Calculer la moyenne $\bar{x}$ de cette série statistique.
2. *a)* Calculer la variance V et l'écart type σ. *(On donnera les résultats à 10^{-3} près.)*
b) Quel est le pourcentage d'élèves dont la note appartient à l'intervalle $]\bar{x} - \sigma ; \bar{x} + \sigma[$?

2. Séries statistiques à deux caractères

On peut, sur une population, étudier deux caractères quantitatifs ; la modalité associée à chaque individu est alors un couple de nombres réels. On construit ainsi une série statistique à deux caractères, ou série double.

2.1. Organisation des données

Introduction

On a relevé le poids (en kg) et la taille (en cm) de 30 personnes ; on a obtenu les résultats suivants.

Poids (x)	65	68	62	62	68	68	59	71	74	68	68	74	71	65	65
Taille (y)	165	177	174	168	165	171	165	177	174	171	165	174	174	174	171
Poids (x)	62	65	68	71	65	74	74	71	65	77	74	62	77	68	71
Taille (y)	174	174	171	171	174	168	177	174	165	180	177	168	180	171	174

Ces données permettent de définir deux séries statistiques à un caractère, (x_i, n_i) et (y_j, n_j), représentées par les deux tableaux suivants.

x_i	59	62	65	68	71	74	77
n_i	1	4	6	7	5	5	2

y_j	165	168	171	174	177	180
n_j	5	3	6	10	4	2

Soit X = {59, 62, 65, 68, 71, 74, 77} et Y = {165, 168, 171, 174, 177, 180}.

À chaque couple (x_i, y_j) de l'ensemble X × Y, on associe le nombre d'élèves ayant le poids x_i et la taille y_j ; ce nombre est noté n_{ij}.

On définit ainsi une ***série statistique à deux caractères*** ; n_{ij} est appelé effectif de la modalité (x_i, y_j).

Cette série, notée (x_i, y_j, n_{ij}), est représentée par le tableau à double entrée ci-contre.

Les totaux obtenus dans la dernière ligne du tableau sont les effectifs de la série (x_i, n_i) ; ceux de la dernière colonne sont les effectifs de la série (y_j, n_j).

Ces effectifs apparaissent « en marge » du tableau à double entrée ; les séries statistiques (x_i, n_i) et (y_j, n_j) sont appelées ***séries marginales*** de la série double (x_i, y_j, n_{ij}).

y_j \ x_i	59	62	65	68	71	74	77	**Total**
165	1	0	2	2	0	0	0	5
168	0	2	0	0	0	1	0	3
171	0	0	1	4	1	0	0	6
174	0	2	3	0	3	2	0	10
177	0	0	0	1	1	2	0	4
180	0	0	0	0	0	0	2	2
Total	1	4	6	7	5	5	2	30

Nuage de points associé à une série double

Soit (x_i, y_j, n_{ij}) une série statistique à deux caractères quantitatifs.

Le plan est muni d'un repère orthogonal. L'ensemble des points M_{ij} de coordonnées (x_i, y_j) est appelé nuage de points associé à la série.

Dans le cas où les effectifs des modalités (x_i, y_j) ne sont pas tous égaux, on représente ce nuage de points de deux façons.

- Représentation par points pondérés : on indique à côté de chaque point M_{ij} l'effectif n_{ij} (figure 1).
- Représentation par taches : chaque point M_{ij} est remplacé par un disque dont l'aire est proportionnelle à n_{ij} (figure 2).

Pour l'exemple introductif (poids et taille de 30 personnes), on obtient les nuages de points suivants.

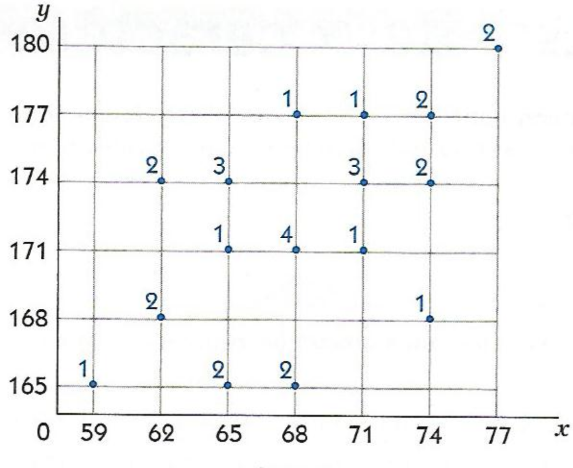


figure 1

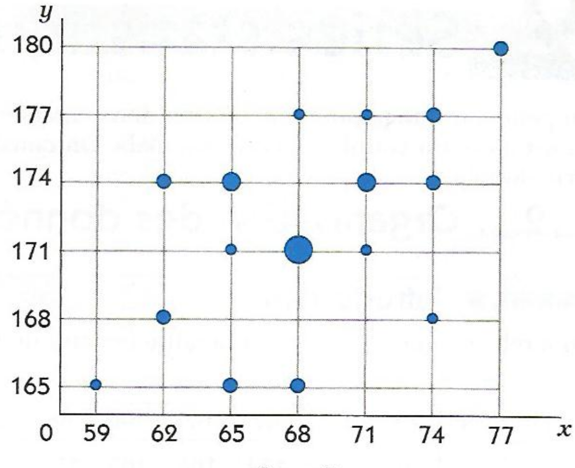


figure 2

Point moyen d'un nuage

Reprenons l'exemple précédent.

On se propose de déterminer le barycentre G des points pondérés (M_{ij}, n_{ij}).

On a : $x_G = \frac{1}{30}(59 + 2 \times 62 + 2 \times 62 + 2 \times 65 + 65 + 3 \times 65 + 2 \times 68 + 4 \times 68 + 68 + 71 + 3 \times 71 + 71 + 74 + 2 \times 74 + 2 \times 74 + 2 \times 77) = 68{,}4$;

$y_G = \frac{1}{30}(165 + 2 \times 168 + 2 \times 174 + 2 \times 165 + 171 + 3 \times 174 + 2 \times 165 + 4 \times 171 + 177 + 171 + 3 \times 174 + 177 + 168 + 2 \times 174 + 2 \times 177 + 2 \times 180) = 172{,}1.$

On a également : $\begin{cases} x_G = \frac{1}{30}(59 + 4 \times 62 + 6 \times 65 + 7 \times 68 + 5 \times 71 + 5 \times 74 + 2 \times 77) = \overline{x} \\ y_G = \frac{1}{30}(5 \times 165 + 3 \times 168 + 6 \times 171 + 10 \times 174 + 4 \times 177 + 2 \times 180) = \overline{y} \end{cases}$

où $\overline{x}$ et $\overline{y}$ sont les moyennes respectives des séries marginales (x_i, n_i) et (y_j, n_j).

G est appelé point moyen du nuage associé à la série (x_i, y_j, n_{ij}).

Définition

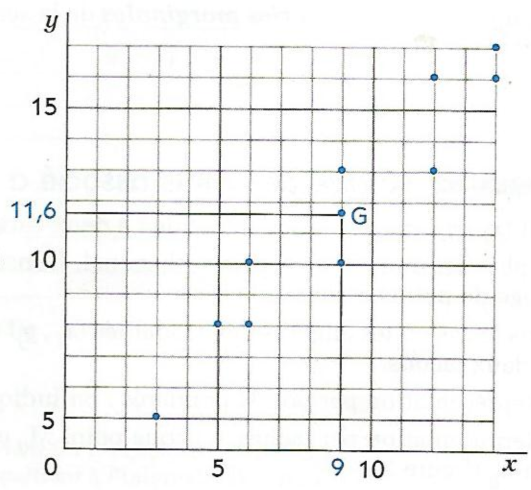
Soit (x_i, y_j, n_{ij}) une série statistique à deux caractères quantitatifs.

On appelle point moyen du nuage de points représentant cette série le point de coordonnées $(\overline{x}, \overline{y})$, où $\overline{x}$ et $\overline{y}$ désignent les moyennes respectives des séries marginales (x_i, n_i) et (y_j, n_j).

Exemple

Les notes obtenues par 10 élèves aux épreuves de biologie et de physique d'un examen sont indiquées dans le tableau suivant.

Biologie (x)	9	12	5	6	9	14	3	6	12	14
Physique (y)	10	13	8	10	13	17	5	8	16	16



On remarque que, dans cette série, les effectifs des modalités sont tous égaux à 1.

Les moyennes des séries marginales sont :

$\overline{x} = \frac{3 + 5 + 2 \times 6 + 2 \times 9 + 2 \times 12 + 2 \times 14}{10} = 9$;

$\overline{y} = \frac{5 + 2 \times 8 + 2 \times 10 + 2 \times 13 + 2 \times 16 + 17}{10} = 11{,}6.$

Le point moyen du nuage associé à la série est $G\begin{pmatrix} 9 \\ 11{,}6 \end{pmatrix}$.

2.2. Ajustement linéaire

On considère dans ce paragraphe une série statistique à deux caractères x et y telle que l'effectif de chacune des modalités est égal à 1. Une telle série sera notée $(x_i\,,\,y_i)_{1\,\leqslant\,i\,\leqslant\,N}$, où N est l'effectif total de la série et $(x_i\,,\,y_i)$ la modalité du i^e individu.
Le nuage de points associé à cette série est l'ensemble des points M_i de coordonnées $(x_i\,,\,y_i)$.

On désigne par $\bar{x}$ et $\bar{y}$ les moyennes respectives des séries marginales relatives aux caractères x et y, par $V(x)$ et $V(y)$ leurs variances respectives, que l'on suppose non nulles.

Introduction

Dans le plan muni du repère (O, I, J), on construit le nuage de points associé à la série double ; on envisage trois cas.

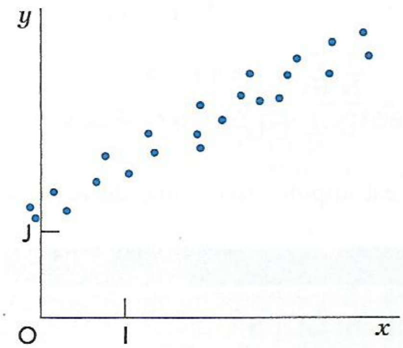


figure 1

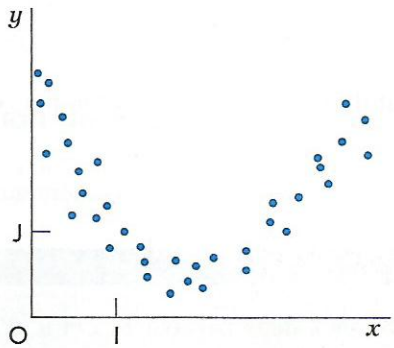


figure 2

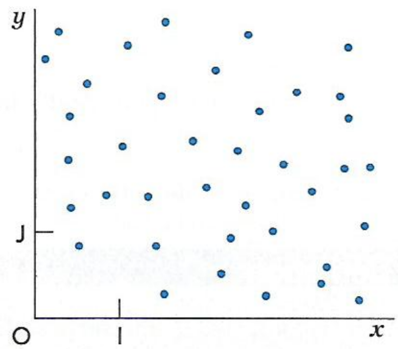


figure 3

La répartition des points dans les deux premiers nuages suggère une relation entre les deux caractères x et y ; ce n'est pas le cas pour le nuage de la figure 3.
• Le nuage de la figure 1 a une forme qui se rapproche d'une droite ; elle suggère une relation de la forme $y = ax + b$.
• Le nuage de la figure 2 a une forme qui se rapproche d'une parabole ; elle suggère une relation de la forme $y = ax^2 + bx + c$.

Ajuster un nuage de points consiste à déterminer une courbe simple passant « le plus près possible » des points du nuage. Si la courbe recherchée est une droite, l'ajustement est dit linéaire.

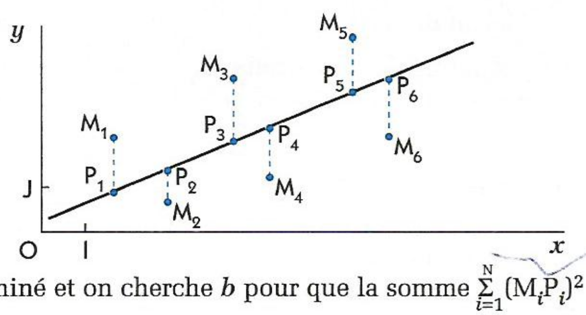
L'objectif de ce paragraphe est de donner une méthode pour effectuer l'ajustement linéaire d'un nuage de points. Cette méthode, dite « des moindres carrés », permet de déterminer deux droites appelées droites de régression.

Droite de régression de y en x

Soit une droite d'équation : $y = ax + b$. Pour tout nombre entier i tel que $1 \leqslant i \leqslant N$, on désigne par P_i le point d'abscisse x_i de cette droite.
La somme des carrés des distances de M_i à P_i est :

$$\sum_{i=1}^{N}(M_iP_i)^2 = \sum_{i=1}^{N}[y_i - (ax_i + b)]^2.$$

La méthode consiste à déterminer la droite $(\mathcal{D})$, appelée droite de régression de y en x, telle que cette somme soit la plus petite possible.



• On suppose dans un premier temps que a est déterminé et on cherche b pour que la somme $\sum_{i=1}^{N}(M_iP_i)^2$ soit minimale.

On a :
$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{N}(M_iP_i)^2 &= \sum_{i=1}^{N}\Big[(y_i - ax_i) - b\Big]^2\\ &= \sum_{i=1}^{N}\Big[(y_i - ax_i)^2 - 2b(y_i - ax_i) + b^2\Big]\\ &= Nb^2 - 2b\sum_{i=1}^{N}(y_i - ax_i) + \sum_{i=1}^{N}(y_i - ax_i)^2.\end{aligned}$$

On obtient un polynôme du second degré en b, de la forme : $\alpha b^2 + \beta b + \gamma$; α étant positif, ce polynôme admet un minimum en b tel que : $b = -\dfrac{\beta}{2\alpha} = \dfrac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(y_i - ax_i)$.

Donc, pour une droite de coefficient directeur a, la somme $\sum_{i=1}^{N}(M_iP_i)^2$ est minimale pour :
$b = \dfrac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} y_i - a\dfrac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i = \overline{y} - a\overline{x}$.

La droite ($\mathcal{D}$) passe donc par G, point moyen du nuage.

• On suppose maintenant que : $b = \overline{y} - a\overline{x}$.

$$\text{On a : } \sum_{i=1}^{N}(M_iP_i)^2 = \sum_{i=1}^{N}\left[(y_i - \overline{y}) - a(x_i - \overline{x})\right]^2$$
$$= a^2\sum_{i=1}^{N}(x_i - \overline{x})^2 - 2a\sum_{i=1}^{N}(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y}) + \sum_{i=1}^{N}(y_i - \overline{y})^2.$$

On obtient un polynôme du second degré en a, qui admet un minimum pour $a = \dfrac{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})}{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \overline{x})^2}$.

La droite ($\mathcal{D}$) a donc pour coefficient directeur le nombre a tel que : $a = \dfrac{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})}{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \overline{x})^2}$.

Le dénominateur de cette expression est égal à $V(x)$. Le numérateur est appelé covariance de la série double et noté $\mathrm{Cov}(x, y)$.

Définition

Soit $(x_i, y_i)_{1 \leq i \leq N}$ une série statistique à deux caractères x et y, d'effectif total N.

La covariance de cette série est le nombre réel, noté $\mathrm{Cov}(x, y)$, tel que :

$$\mathrm{Cov}(x, y) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y}).$$

Le calcul pratique de la covariance s'effectue en général à l'aide de la propriété suivante, dont la démonstration est analogue à celle de la formule de Kœnig établie en classe de seconde.

Propriété 1

Soit $(x_i, y_i)_{1 \leq i \leq N}$ une série statistique à deux caractères x et y, d'effectif total N.

On a : $\mathrm{Cov}(x, y) = \left(\dfrac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i y_i\right) - \overline{x}\,\overline{y}$.

L'étude précédente permet d'établir la propriété suivante.

Propriété 2

Soit $(x_i, y_i)_{1 \leq i \leq N}$ une série statistique à deux caractères x et y telle que : $V(x) \neq 0$.

La droite de régression de y en x passe par le point moyen du nuage associé à cette série et a pour coefficient directeur $\dfrac{\mathrm{Cov}(x, y)}{V(x)}$.

Une équation de cette droite est : $y - \overline{y} = \dfrac{\mathrm{Cov}(x, y)}{V(x)}(x - \overline{x})$.

Exemple

Reprenons la série des notes obtenues par 10 élèves en biologie et en physique (§ 2.1.).

Les calculs sont généralement disposés dans un tableau de la façon suivante.

	x_i	y_i	x_iy_i	x_i^2
	9	10	90	81
	12	13	156	144
	5	8	40	25
	6	10	60	36
	9	13	117	81
	14	17	238	196
	3	5	15	9
	6	8	48	36
	12	16	192	144
	14	16	224	196
Total :	90	116	1 180	948

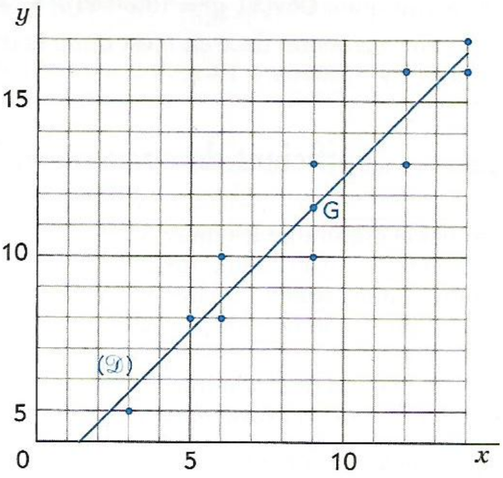
On en déduit que :

$\text{Cov}(x, y) = \frac{1\,180}{10} - 9 \times 11{,}6 = 13{,}6$;

$V(x) = \frac{948}{10} - 9^2 = 13{,}8.$

La droite de régression de y en x est donc la droite $(\mathscr{D})$ d'équation : $y - 11{,}6 = \frac{13{,}6}{13{,}8}(x - 9)$;

c'est-à-dire : $y = 0{,}986x + 2{,}730$.

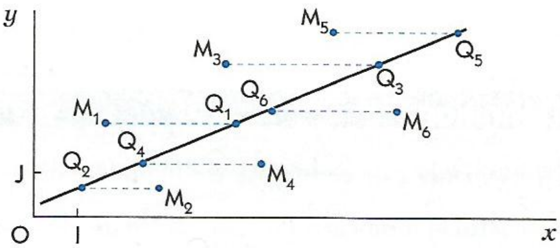


Droite de régression de x en y

Soit une droite d'équation : $x = ay + b$. Pour tout nombre entier i tel que $1 \leqslant i \leqslant N$, on désigne par Q_i le point d'ordonnée y_i de cette droite.

On cherche cette fois à déterminer la droite $(\mathscr{D}')$, appelée droite de régression de x en y, telle que la somme $\sum_{i=1}^{N}(M_iQ_i)^2$ soit la plus petite possible.

Par un calcul analogue au précédent, on démontre que cette somme est minimale si la droite passe par le point moyen du nuage et si $a = \frac{\text{Cov}(x, y)}{V(y)}$.



Propriété

Soit $(x_i, y_i)_{1 \leqslant i \leqslant N}$ une série statistique à deux caractères x et y telle que : $V(y) \neq 0$.

La droite de régression de x en y passe par le point moyen du nuage associé à cette série et a pour équation : $x - \bar{x} = \frac{\text{Cov}(x, y)}{V(y)}(y - \bar{y})$.

Remarque

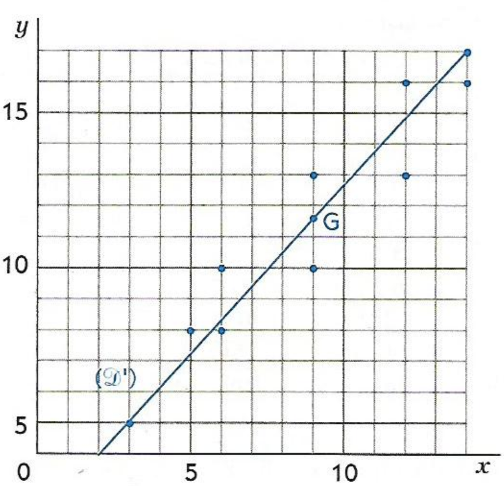
Si la covariance de la série est non nulle, le coefficient directeur de cette droite est : $\frac{V(y)}{\text{Cov}(x, y)}$.

Exemple

Reprenons la série des notes obtenues par 10 élèves en biologie et en physique (§ 2.1.).

On a le tableau suivant.

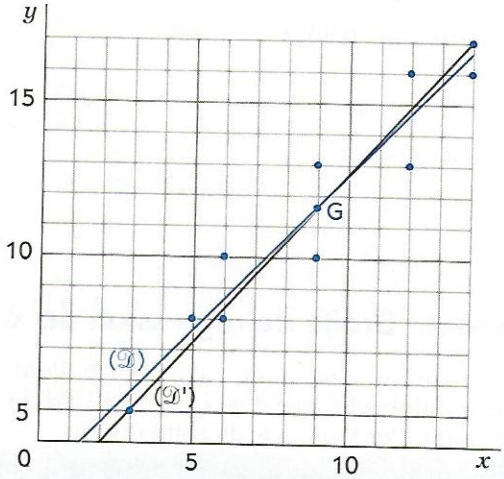
	x_i	y_i	x_iy_i	y_i^2
	9	10	90	100
	12	13	156	169
	5	8	40	64
	6	10	60	100
	9	13	117	169
	14	17	238	289
	3	5	15	25
	6	8	48	64
	12	16	192	256
	14	16	224	256
Total :	90	116	1 180	1 492



On en déduit que : $\mathrm{Cov}(x, y) = 13{,}6$; $V(y) = \dfrac{1\,492}{10} - 11{,}6^2 = 14{,}64$.
La droite de régression de x en y est donc la droite $(\mathscr{D}')$ d'équation : $x - 9 = \dfrac{13{,}6}{14{,}64}(y - 11{,}6)$;
c'est-à-dire : $y = 1{,}076x + 1{,}912$.

Coefficient de corrélation linéaire

Reprenons l'exemple ci-dessus, et représentons sur un même graphique les deux droites de régression $(\mathscr{D})$ et $(\mathscr{D}')$. Ces deux droites ne sont pas confondues, mais sont « proches » l'une de l'autre. En effet, leurs coefficients directeurs respectifs sont très voisins.
On dit dans ce cas qu'il y a une bonne corrélation linéaire entre les deux caractères x et y.



Plus généralement, lorsque la covariance de la série est non nulle, les deux droites de régression sont confondues si elles ont même coefficient directeur, c'est-à-dire si : $\dfrac{\mathrm{Cov}(x, y)}{V(x)} = \dfrac{V(y)}{\mathrm{Cov}(x, y)}$.

Cette égalité est équivalente à : $\dfrac{\mathrm{Cov}^2(x, y)}{V(x)V(y)} = 1$.

Définition

Soit $(x_i, y_i)_{1 \leq i \leq N}$ une série statistique à deux caractères x et y telle que : $V(x) \neq 0$ et $V(y) \neq 0$.

Le coefficient de corrélation linéaire de cette série est le nombre réel r tel que : $r = \dfrac{\mathrm{Cov}(x, y)}{\sqrt{V(x)}\sqrt{V(y)}}$.

Remarques

- *On admet que : $|r| \leq 1$.*
- *La corrélation entre les deux caractères x et y est d'autant meilleure que $|r|$ est proche de 1.*

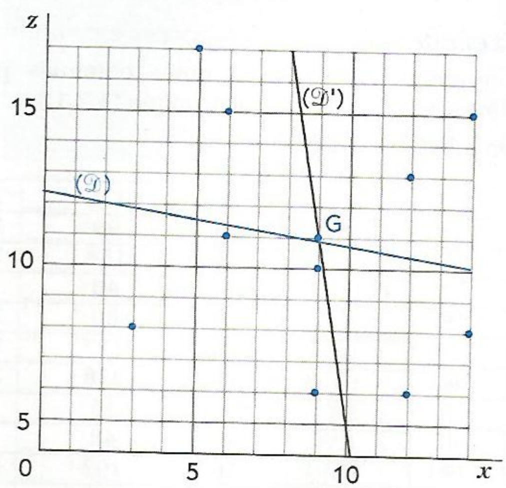
Exemples

- Dans l'exemple ci-dessus, le coefficient de corrélation est r tel que : $r \approx 0{,}957$.

Il y a donc une bonne corrélation entre les notes en biologie et en physique de ces dix élèves.

- Considérons maintenant la série des notes obtenues par ces mêmes élèves en biologie et en éducation physique. On a le tableau suivant.

	Biologie (x_i)	E.P.S. (z_i)	x_i^2	z_i^2	x_iz_i
	9	6	81	36	54
	12	13	144	169	156
	5	17	25	289	85
	6	11	36	121	66
	9	10	81	100	90
	14	8	196	64	112
	3	8	9	64	24
	6	15	36	225	90
	12	6	144	36	72
	14	15	196	225	210
Total :	90	109	948	1 329	959



On en déduit que : $\bar{x} = 9$; $\bar{z} = 10{,}9$. Donc : $\mathrm{Cov}(x, z) = 95{,}9 - 9 \times 10{,}9 = -2{,}2$.

La droite ($\mathscr{D}$) de régression de z en x admet pour équation : $z - 10{,}9 = -\frac{2{,}2}{13{,}8}(x - 9)$; c'est-à-dire : $z = -0{,}159x + 12{,}335$.

On a : $V(z) = 132{,}9 - 10{,}9^2 = 14{,}09$; donc la droite ($\mathscr{D}$') de régression de x en z admet pour équation : $x - 9 = -\frac{2{,}2}{14{,}09}(z - 10{,}9)$; c'est-à-dire : $z = -6{,}405x + 68{,}541$.

Le coefficient de corrélation de cette série est le nombre r tel que : $r = -\frac{2{,}2}{\sqrt{13{,}8}\sqrt{14{,}09}}$; donc : $r \approx -0{,}158$.

Il y a une mauvaise corrélation linéaire entre les notes de biologie et d'éducation physique de ce groupe d'élèves. Effectuer un ajustement linéaire sur cette série ne se justifie pas.

2.3. Travaux dirigés

Ajustement linéaire par la méthode de Mayer

Le tableau suivant donne le chiffre d'affaires d'une entreprise, exprimé en millions de francs, pendant huit années consécutives.

numéro de l'année (x_i)	1	2	3	4	5	6	7	8
chiffre d'affaires (y_i)	41	68	55	80	95	104	100	122

1°) Représenter le nuage de points $\{M_i\}_{1 \leq i \leq 8}$ associé à cette série statistique.

2°) *a)* Calculer les coordonnées de G, point moyen du nuage.
***b)* Déterminer une équation de la droite de régression de y en x et représenter cette droite.**

3°) On partage le nuage de points en deux parties d'effectifs égaux : $\{M_i\}_{1 \leq i \leq 4}$ et $\{M_i\}_{5 \leq i \leq 8}$.
***a)* Calculer les coordonnées de G_1 et G_2, points moyens respectifs des nuages partiels ainsi obtenus.**
***b)* Déterminer une équation de la droite (G_1G_2) et représenter cette droite.**
Démontrer que G appartient à la droite (G_1G_2).
Cette droite est une droite d'ajustement de la série ; la méthode utilisée est appelée méthode de Mayer (si le nombre de points du nuage est impair, on met indifféremment le point central dans l'un ou l'autre des nuages partiels).

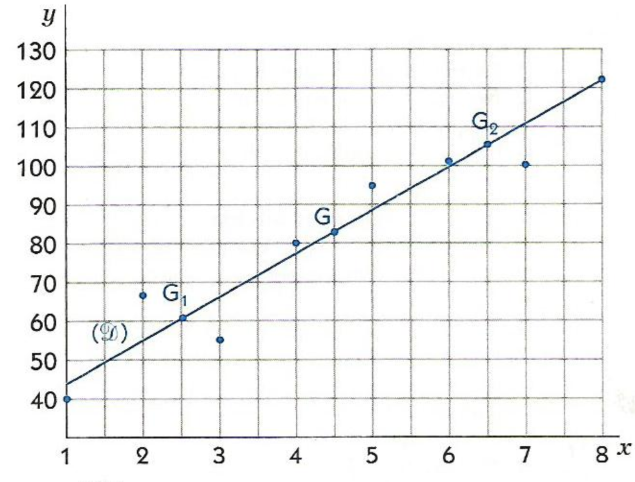
4°) En supposant que l'évolution du chiffre d'affaires de cette entreprise gardera la même tendance, déterminer ce chiffre d'affaires pour la 9^e année :
***a)* à l'aide de la droite de régression de y en x ;**
***b)* à l'aide de la droite (G_1G_2).**

Solution

1°) Le nuage de points associé à la série est représenté ci-dessous.

2°) On établit le tableau de calculs suivant.

	x_i	y_i	x_i^2	x_iy_i
	1	41	1	41
	2	67	4	134
	3	55	9	165
	4	80	16	320
	5	95	25	475
	6	104	36	624
	7	100	49	700
	8	122	64	976
Total :	36	664	204	3 435



a) On a : $\bar{x} = \frac{36}{8} = 4{,}5$; $\bar{y} = \frac{664}{8} = 83$.
G a pour coordonnées (4,5 ; 83).

b) On a : $\mathrm{Cov}(x, y) = \frac{3\,435}{8} - 4{,}5 \times 83 = 55{,}875$; $V(x) = \frac{204}{8} - 4{,}5^2 = 5{,}25$.
La droite ($\mathscr{D}$) de régression de y en x admet donc pour équation : $y - 83 = \frac{55{,}875}{5{,}25}(x - 4{,}5)$; c'est-à-dire : $y = 10{,}643x + 35{,}107$.

3°) *a)* G_1 a pour coordonnées : $\left(\dfrac{1+2+3+4}{4}\ ;\ \dfrac{41+67+55+80}{4}\right)$; d'où : $G_1\begin{pmatrix}2,5\\60,75\end{pmatrix}$.

G_2 a pour coordonnées : $\left(\dfrac{5+6+7+8}{4}\ ;\ \dfrac{95+104+100+122}{4}\right)$; d'où : $G_2\begin{pmatrix}6,5\\105,25\end{pmatrix}$.

b) La droite (G_1G_2) admet pour équation : $y - 60,75 = \dfrac{105,25 - 60,75}{6,5 - 2,5}(x - 2,5)$;
c'est-à-dire : $y = 11,125x + 32,937$.
G est l'isobarycentre des points du nuage. D'après le théorème des barycentres partiels, G est le barycentre de $(G_1\ ,\ 4)$ et $(G_2\ ,\ 4)$; donc G appartient à la droite (G_1G_2).

4°) Le chiffre d'affaires que peut espérer l'entreprise pour la 9ᵉ année est obtenu en cherchant l'ordonnée du point d'abscisse 9 de la droite d'ajustement.
a) Avec la droite de régression de y en x, on obtient : $y = 10,643 \times 9 + 35,107 = 130,894$.
b) Avec la droite (G_1G_2), on obtient : $y = 11,125 \times 9 + 32,937 = 133,062$.
Les résultats obtenus par les deux méthodes sont donc très voisins.

La méthode de Mayer permet généralement d'obtenir des résultats assez proches de ceux obtenus par la méthode des moindres carrés et nécessite moins de calculs.

Exercices

2.a Dans une maternité, on a relevé, pour chacune des vingt naissances d'une journée, l'âge x de la mère et le poids y du nouveau-né. Les résultats sont regroupés dans le tableau ci-dessous.

x	22	18	20	20	16	22	26	22	18	22	18	26	20	26	18	18	22	26	22	20
y	3,2	2,8	3,2	3,6	2,8	2,8	3	2,8	3	3	3,4	3,6	3,2	3	3	3,4	2,8	2,6	3	3,2

1. Présenter ces données dans un tableau à double entrée.
2. Déterminer les séries marginales associées aux caractères x et y.
3. Représenter par des taches le nuage de points associé à cette série double.

2.b Lors d'une enquête portant sur 100 familles, on a relevé le nombre x d'enfants de chaque famille et le nombre y de pièces de leur habitation. Les résultats sont présentés dans le tableau à double entrée ci-contre.

y_j \ x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8
1	6	3	2	2	0	0	0	0	0
2	3	3	6	7	3	1	0	0	0
3	1	1	4	7	7	5	4	2	0
4	0	2	3	5	4	5	6	5	3

1. *a)* Représenter à l'aide de deux tableaux les séries marginales associées aux caractères x et y.
b) Déterminer les moyennes respectives de ces séries marginales.
2. Représenter par des points pondérés le nuage associé à cette série double ; placer son point moyen G.

2.c On considère la série $(x_i\ ,\ y_i)$ déterminée par le tableau ci-contre.

x_i	– 3	– 1	0	5
y_i	1	– 1	4	2

1. Représenter le nuage de points associé à cette série.
2. Déterminer une équation de la droite de régression de y en x et une équation de la droite de régression de x en y. Tracer ces deux droites.
3. Calculer le coefficient de corrélation linéaire de cette série.

2.d Une bille tombe dans le vide de différentes hauteurs. En mesurant chaque fois le temps t (en secondes) de la chute et la vitesse v (en mètres par seconde) de la bille en fin de chute, on obtient le tableau ci-contre.

t_i	0,20	0,28	0,35	0,40	0,45
v_i	2	2,7	3,2	4	4,5

1. Représenter le nuage de points associé à cette série.
2. Déterminer le point moyen de ce nuage.
3. *a)* Calculer le coefficient de corrélation linéaire de cette série.
Sa valeur justifie-t-elle un ajustement linéaire ?
b) Déterminer une équation de la droite de régression de v en t. Tracer cette droite.
4. Sachant que, dans une chute libre, la vitesse s'exprime en fonction du temps par l'égalité $v = gt$, déterminer une estimation de l'accélération de la pesanteur g.

Exercices

APPRENTISSAGE

Séries présentant un regroupement en classes

1 On a relevé dans une agence bancaire les montants, en milliers de francs, des 49 premiers versements effectués au guichet. On a obtenu les résultats suivants.

50	300	100	800	200	30	75
250	600	260	150	45	490	400
200	375	360	620	130	1450	880
25	560	350	450	400	280	190
1180	220	520	120	900	110	350
600	850	290	1400	125	900	1000
130	1100	430	950	45	310	590

1. Regrouper ces montants par classes d'amplitude 300, la première étant [0 ; 300[, puis dresser le tableau des fréquences et des fréquences cumulées croissantes de la série ainsi obtenue.
2. Déterminer la classe modale de cette série.
3. Calculer les moyennes respectives :
a) de la série avant le regroupement en classes ;
b) de la série obtenue par regroupement en classes.

2 On considère une série dont les effectifs cumulés décroissants sont donnés dans le tableau suivant.

Classe	[0 ; 4[	[4 ; 6[	[6 ; 8[	[8 ; 10[
Eff. cum. décroissant	60	45	24	6

1. Construire le polygone des effectifs cumulés décroissants.
2. Déterminer graphiquement la médiane de cette série. Vérifier le résultat par le calcul.
3. Calculer la moyenne de cette série.

3 On considère une série dont les effectifs sont donnés dans le tableau suivant.

Classe	[−2 ; −1[	[−1 ; 0[	[0 ; 2[	[2 ; 4[
Effectif	14	16	8	12

1. Dresser le tableau des effectifs cumulés croissants et décroissants.
2. Construire les polygones des effectifs cumulés croissants et décroissants.
3. Déterminer graphiquement le nombre d'individus dont la modalité est :
a) inférieure à 1 ;
b) supérieure à − 0,4.
4. Déterminer graphiquement l'intervalle dans lequel on trouve :
a) les 9 individus de modalité la plus grande ;
b) les 20 individus de modalité la plus petite.

4 On considère une série dont les fréquences sont données dans le tableau suivant.

Classe	[0 ; 3[	[3 ; 5[	[5 ; 7[	[7 ; 10[
Fréquence	10 %	25 %	35 %	30 %

Calculer la moyenne, la variance et l'écart type de cette série.

5 Le tableau suivant donne les durées de vie en heures, regroupées en huit classes, d'un lot de piles d'une même marque pour lampes de poche.

Durée de vie	Effectif	Durée de vie	Effectif
[50 ; 60[	10	[90 ; 100[	30
[60 ; 70[	15	[100 ; 110[	20
[70 ; 80[	35	[110 ; 120[	15
[80 ; 90[	40	[120 ; 130[	5

1. Calculer la moyenne, la variance et l'écart type de cette série.
2. Calculer, par interpolation linéaire, la médiane de cette série.

6 La série suivante donne la répartition des tailles en cm de 36 élèves d'une classe de première.

Taille	Effectif	Taille	Effectif
[145 ; 155[	3	[165 ; 170[	8
[155 ; 160[	5	[170 ; 175[	8
[160 ; 165[	6	[175 ; 185[	6

1. Représenter cette série par l'histogramme des effectifs.
2. Déterminer la (ou les) classe(s) modale(s) de cette série et calculer sa moyenne.
3. Construire le polygone des effectifs cumulés croissants.
Déterminer la médiane de cette série.

7 On considère la série statistique présentée dans le tableau suivant.

Classe	[1 ; 2[	[2 ; 4[	[4 ; 5[	[5 ; 6[	[6 ; 9[
Effectif	258	133	164	108	337

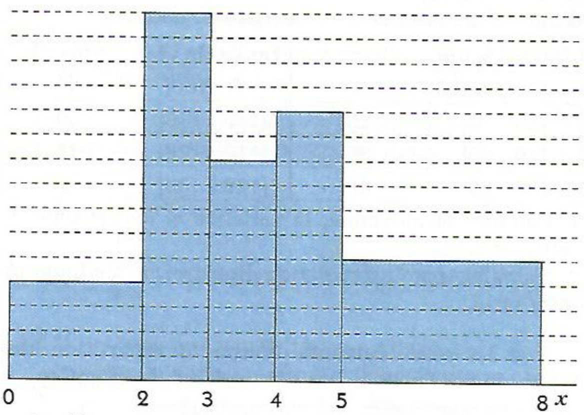
1. Construire les polygones des effectifs cumulés croissants et décroissants.
2. Déterminer le nombre d'individus dont la modalité est :
a) inférieure à 3 ;
b) supérieure à 5,3 ;
c) comprise entre 3 et 5,3.
3. Calculer la moyenne, la variance et l'écart type de cette série.

8 Une machine à ensacher le café produit des sacs de 250 grammes. On a mesuré le poids net de 125 sacs produits par cette machine et obtenu la série statistique suivante.

Poids	Effectif	Poids	Effectif
[242 ; 244[	2	[250 ; 252[	30
[244 ; 246[	14	[252 ; 254[	15
[246 ; 248[	18	[254 ; 256[	4
[248 ; 250[	40	[256 ; 258[	2

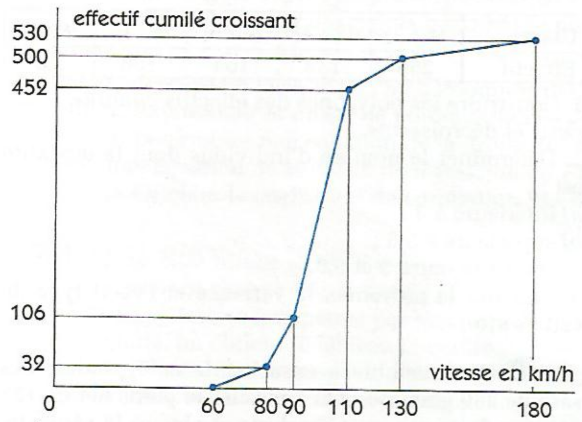
1. *a)* Construire les polygones des fréquences cumulées croissantes et décroissantes.
b) Déterminer la médiane de cette série.
2. *a)* Calculer la moyenne $\bar{x}$ et l'écart type σ (on donnera les résultats à 10^{-3} près).
b) Quel est le pourcentage des sacs dont le poids est compris :
- entre $\bar{x} - \sigma$ et $\bar{x} + \sigma$?
- entre $\bar{x} - 2\sigma$ et $\bar{x} + 2\sigma$?

9 Une étude statistique portant sur un caractère x a permis de construire l'histogramme ci-dessous.



1. Quelle est la (ou les) classe(s) modale(s) de la série statistique correspondante ?
2. Construire les polygones des fréquences cumulées croissantes et décroissantes.
En déduire la médiane à l'aide d'une interpolation linéaire.
3. Calculer la moyenne et l'écart type de cette série.
4. Sachant que l'effectif total de la population est 720, dresser le tableau des effectifs.

10 Un contrôle de vitesse a été effectué sur une autoroute où la vitesse est limitée à 130 km/h.
La série statistique obtenue est représentée ci-dessous par son polygone des effectifs cumulés croissants.



1. Établir le tableau des effectifs de cette série statistique.
2. *a)* Quel est le pourcentage de véhicules en infraction ?
b) On a décidé de ne verbaliser que les conducteurs roulant à une vitesse strictement supérieure à 140 km/h. Combien d'amendes va-t-on donner ?
3. Déterminer la classe modale et la moyenne de cette série.

Séries statistiques à deux caractères

11 Soit la série statistique à deux caractères donnée par le tableau à double entrée suivant.

x_i \ y_j	−1	0	2
2	6	3	1
3	4	8	3

1. Représenter par des taches le nuage de points associé à cette série.
2. Déterminer et placer le point moyen du nuage.

12 On relevé le nombre x de sœurs et le nombre y de frères de chacun des 40 élèves d'une classe de première. On a obtenu la série double suivante.

x_i \ y_j	0	1	2	4	5
0	0	3	0	0	0
1	0	4	2	2	0
2	3	5	4	4	2
3	1	4	0	1	0
5	0	2	2	0	1

1. Représenter par des points pondérés le nuage associé à cette série.
2. Déterminer et placer le point moyen du nuage.

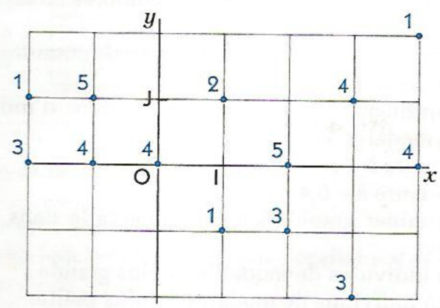
13 Lors d'une enquête auprès des élèves d'un lycée, on a étudié les caractères suivants :
- nombre x de livres lus au cours du dernier mois ;
- nombre y de sorties au cinéma au cours du dernier mois.

Les résultats sont présentés dans le tableau suivant.

x_i \ y_j	0	1	2	3	4	5
0	35	30	50	25	12	0
1	34	58	44	47	10	19
2	72	65	57	30	12	7
3	24	32	26	25	16	6
4	5	21	20	11	7	0

1. Dresser le tableau des effectifs et des fréquences des séries marginales associées à cette série double.
2. Représenter par des points pondérés le nuage associé à cette série.
3. Déterminer et placer le point moyen du nuage.

14 Dans le plan muni du repère (O, I, J), on a représenté par des points pondérés le nuage associé à une série statistique à deux caractères x et y.



1. Dresser les tableaux des effectifs des deux séries marginales.
2. Déterminer et placer le point moyen du nuage.

15 Le tableau suivant donne, pour dix pays, la population x de ces pays et la population y de leurs capitales, exprimées en millions d'habitants (Quid 97).

Pays	Population du pays (x_i)	Population de la capitale (y_i)
Bénin	5,6	0,18
Burkina Faso	10,6	0,69
Burundi	6,6	0,30
Cameroun	13,6	0,80
Mali	10,6	0,81
Madagascar	14,3	0,80
Mauritanie	2,3	0,73
Niger	9,5	0,42
Sénégal	8,6	1,15
Togo	4,3	0,38

1. Représenter le nuage de points associé à cette série.
2. Déterminer une équation de la droite de régression de y en x et une équation de la droite de régression de x en y.
Tracer ces deux droites.
3. Calculer le coefficient de corrélation linéaire.

16 Le tableau suivant donne le poids y en kg d'un nourrisson, x jours après sa naissance.

x_i	5	7	10	14	18	22	26
y_i	3,61	3,70	3,75	3,85	3,90	4,05	4,12

1. Représenter le nuage de points associé à cette série.
2. Déterminer une équation de la droite de régression de y en x et représenter cette droite sur le graphique.
3. Donner une estimation du poids du nourrisson 30 jours après sa naissance.

17 Le directeur des ressources humaines d'une entreprise doit embaucher des ouvriers. Lors de précédents recrutements pour des postes analogues, il a fait une étude statistique et a dressé le tableau suivant.

Salaires proposés (x_i)	60 000	64 000	68 000	72 000
Nombre de candidatures (y_i)	11	17	20	25

1. Représenter le nuage de points associé à cette série.
2. Déterminer la droite de régression de y en x.
3. En déduire une estimation du salaire que doit proposer le directeur s'il veut recruter 30 ouvriers.

18 On a étudié trois caractères x, y et z sur une population de cinq individus et on a obtenu les résultats suivants.

x_i	1	2	3	4	5
y_i	40	45	35	35	30
z_i	0	− 3	1	4	− 1

1. Représenter sur deux graphiques différents les nuages de points associés respectivement aux séries (x_i , y_i) et (x_i , z_i).
2. Déterminer une équation de la droite de régression de y en x et une équation de la droite de régression de z en x.
3. Calculer les coefficients de corrélation linéaire des séries (x_i , y_i) et (x_i , z_i).
De ces deux séries, quelle est celle qui se prête le mieux à un ajustement linéaire ?

19 Le tableau suivant donne l'évolution, de 1981 à 1990, du nombre (exprimé en milliers) d'ovins et de caprins en Côte d'Ivoire.

Année (x_i)	**81**	**82**	**83**	**84**	**85**
Ovins (y_i)	905	927	949	973	997
Caprins (z_i)	710	727	745	763	782
Année (x_i)	**86**	**87**	**88**	**89**	**90**
Ovins (y_i)	1025	1051	1077	1102	1121
Caprins (z_i)	805	825	845	865	878

1. Représenter sur le même graphique, en utilisant deux couleurs différentes, les nuages de points associés aux séries (x_i , y_i) et (x_i , z_i).
2. Déterminer une équation de la droite de régression de y en x et une équation de la droite de régression de z en x.
3. Donner une estimation du cheptel ovin et caprin en Côte d'Ivoire en l'an 2000, en supposant que la tendance observée dans les années 80 s'est maintenue par la suite.

20 Le tableau suivant donne la tension artérielle moyenne y en fonction de l'âge x d'une population.

Age (x_i)	36	42	48	54	60	66
Tension (y_i)	11,8	14	12,6	15	15,5	15,1

1. Représenter le nuage de points associé à cette série.
2. Déterminer une équation de la droite de régression de y en x et une équation de la droite de régression de x en y. Tracer ces deux droites.
3. Calculer le coefficient de corrélation linéaire.
4. Une personne de 70 ans a une tension artérielle de 16,2. Cela vous paraît-il « normal » ?

21 Le tableau suivant donne, pour six années, les montants x des frais de publicité d'une entreprise et y de son chiffre d'affaires, exprimés en millions de francs.

x_i	5,8	4	6,4	4,6	5,2	7
y_i	128	102	138	116	118	142

1. Représenter le nuage de points associé à cette série.
2. Calculer le coefficient de corrélation linéaire de cette série.
Le résultat permet-il d'envisager un ajustement linéaire ?
3. Déterminer la droite de régression de y en x.
4. En déduire :
a) une estimation du chiffre d'affaires si l'on engage 9 millions de francs de publicité ;
b) une estimation du budget de publicité à prévoir si l'on désire réaliser un chiffre d'affaires de 200 millions de francs.

APPROFONDISSEMENT

22 Les salaires mensuels, exprimés en milliers de francs, des ouvriers d'une entreprise se répartissent comme indiqué sur le tableau page suivante.
1. Construire un histogramme représentant cette série.

Salaires	Effectif	Salaires	Effectif
[65 ; 75[	40	[95 ; 100[	33
[75 ; 85[	30	[100 ; 110[	24
[85 ; 90[	45	[110 ; 120[	20
[90 ; 95[	58	[120 ; 150[	14

2. *a)* Dresser un tableau des effectifs et des fréquences cumulés croissants.
b) Construire le polygone des fréquences cumulées croissantes (échelle : 1 cm pour 10 000 francs en abscisse et 10 cm pour 100 % en ordonnée).
3. Déterminer graphiquement les salaires S_1, S_2 et S_3 tels que l'on trouve 25 % de l'effectif total dans chacun des intervalles [65 ; S_1[, [S_1 ; S_2[, [S_2 ; S_3[et [S_3 ; 150]. Vérifier les résultats par le calcul.
S_1, S_2 et S_3 s'appellent les quartiles de la série. S_2 n'est autre que sa médiane.

23 La distribution des poids en kg des élèves d'un lycée est donnée dans le tableau suivant.

Classe	Fréquence
[30 ; 35[	1,15 %
[35 ; 40[	5,50 %
[40 ; 45[	16 %
[45 ; 50[	27,35 %
[50 ; 55[	27,35 %
[55 ; 60[	15,90 %
[60 ; 65[	5,40 %
[65 ; 70[	1,35 %

1. Tracer l'histogramme des fréquences.
2. Construire le polygone des fréquences cumulées décroissantes.
3. Déterminer graphiquement :
a) la médiane de la série ;
b) le poids minimum des dix pour cent des élèves les plus lourds ;
c) le pourcentage des élèves dont le poids est compris entre 42,5 kg et 52,5 kg.
Vérifier les résultats par le calcul.
4. Déterminer la moyenne et l'écart type de cette série.

24 Un agriculteur désire acquérir une machine pour stocker sa récolte dans des sacs de 50 kg. On lui propose deux machines, A et B, qu'il teste sur 80 sacs. Les résultats sont donnés dans le tableau suivant.

Classe	A	B	Classe	A	B
[49 ; 49,2[	7	4	[49,8 ; 50[	11	14
[49,2 ; 49,4[	6	6	[50 ; 50,2[	14	16
[49,4 ; 49,6[	14	9	[50,2 ; 50,4[	9	17
[49,6 ; 49,8[	14	11	[50,4 ; 50,6[	5	3

1. Calculer, pour chaque machine la moyenne, la variance et l'écart type.
2. Trois conditions doivent être réalisées :
- la moyenne doit être comprise entre 49,7 et 50,3 ;
- l'écart type doit être inférieur à 0,5 kg ;
- l'intervalle [49,3 ; 50,5] doit contenir 85% des sacs.

Quelle machine l'agriculteur doit-il acheter ?
3. Pour la machine retenue précédemment, déterminer le pourcentage de sacs dont le poids est compris entre $\bar{x} - \sigma$ et $\bar{x} + \sigma$.

25 Une machine produit automatiquement des pièces cylindriques. Afin de déterminer la fréquence des réglages, on prélève une pièce toutes les cent pièces produites et on mesure son diamètre. Les résultats sont donnés dans le tableau suivant, où x est le numéro de la pièce prélevée et y son diamètre en cm.

x_i	100	200	300	400	500	600
y_i	2,498	2,496	2,495	2,494	2,492	2,489

1. Représenter le nuage de points associé à cette série.
2. Donner une équation de la droite de régression de y en x.
3. L'augmentation du diamètre des pièces est dûe essentiellement à l'usure de l'outil.
a) Quelle est l'usure moyenne de l'outil pour une pièce produite ?
b) Au bout de combien de pièces l'usure de l'outil atteint-elle la valeur de 15 centièmes de mm ?

26 Une entreprise a mis au point un nouveau produit et cherche à en fixer le prix de vente. Une enquête est réalisée auprès des clients potentiels ; les résultats sont donnés dans le tableau suivant, où y_i représente le nombre d'exemplaires du produit que les clients sont disposés à acheter si le prix de vente, exprimé en milliers de francs, est x_i.

x_i	60	80	100	120	140	160	180	200
y_i	952	805	630	522	510	324	205	84

1. *a)* Représenter le nuage de points associé à cette série.
b) Calculer le coefficient de corrélation linéaire. La valeur trouvée justifie-t-elle la recherche d'un ajustement linéaire ?
2. Déterminer la droite de régression de y en x.
3. Les frais de conception du produit se sont élevés à 28 millions de francs ; le prix de fabrication de chaque exemplaire est de 25 000 francs.
a) Déduire de la question précédente que le bénéfice z, en fonction du prix de vente x, est donné par l'égalité : $z = -5{,}956\,x^2 + 1\,427{,}18\,x - 59\,957$, où x et z sont exprimés en milliers de francs.
b) Déterminer, à un franc près, le prix de vente x permettant de réaliser le bénéfice maximum et calculer ce bénéfice.

27 On considère la série statistique à deux caractères présentée dans le tableau suivant.

x_i	4	20	1	10	9	5
y_i	3,3	0,6	10,5	1,3	1,3	2,2
x_i	2	2	6	5	11	15
y_i	5	8	1,8	2	1,2	0,9

1. Représenter le nuage de points associé à cette série. La forme du nuage suggère-t-elle un ajustement linéaire ?
2. On pose : $z = \dfrac{1}{y}$.
a) Déterminer le coefficient de corrélation linéaire de la série statistique (x_i, z_i). La valeur de ce coefficient justifie-t-elle un ajustement linéaire ?
b) Déterminer une équation de la droite de régression de z en x.

INDEX
des notions abordées

Achevé d'imprimér en Italie par «La Tipografica Varese S.p.A.»
Dépôt Légal: 53098-11/2004 - Collection: 61 - Édition: 06
59/4819/5

Fruits de la collaboration entre les mathématiciens des pays francophones d'Afrique et de l'océan Indien, les ouvrages de la Collection Inter-Africaine de Mathématiques (CIAM) reposent sur un profond travail d'investigation et d'expérimentation.

Cette collection a pour objectifs :

- l'harmonisation de la pédagogie des mathématiques et la mise à la disposition des élèves et des enseignants africains de manuels de qualité, tenant compte du milieu socio-culturel africain en tant que support et véhicule privilégiés des concepts mathématiques ;
- l'acquisition par les élèves des bases d'une formation mathématique solide qui leur permettent d'analyser une situation, de conjecturer des hypothèses et de les valider ou non à l'épreuve des faits ou du raisonnement, de recourir aux modèles mathématiques qu'ils connaissent et de dégager une conclusion ;
- la diminution du coût du manuel, pour permettre la réalisation d'un vieux rêve : un élève, un livre.

9 782841 293582

DIFFUSION :
R.C.I. : NOUVELLES ÉDITIONS IVOIRIENNES
AUTRES PAYS : EDICEF

59.4819.5